МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, Т. 1.

Кудрявцев Л. Д.

Учебник предназначен для вузов с повышенной математической подготовкой. Его задачей является не только изложение основных сведений из математического анализа, но и подготовка учащихся к чтению современной математической литературы. Особое внимание обращено на изложение аналитических методов, вместе о тем в книге нашли свое отражение и некоторые геометрические вопросы теории функций.

В первом томе излагаются дифференциальное и интегральное исчисление функций одного переменного, простейшие сведения о функциях многих переменных и теория рядов. Учебник предназначен для студентов физических и инженерно-физических специальностей высших учебных заведений.

ОГЛАВЛЕНИЕ Стр.

Глава первая.
Дифференциальное исчисление функций одного переменного
§ 1. Вещественные числа 11
1.1. Свойства вещественных чисел 11
1.2. Обозначения 20
§ 2. Верхние и нижние грани множеств 22
2.1. Свойства верхних и нижних граней множеств 22
2.2. Сечения в множестве вещественных чисел 27
§ 3. Предел последовательности 28
3.1. Определение предела последовательности и некоторые его свойства 28
3.2. Пределы монотонных последовательностей 31
3.3. Теорема Больцано—Вейерштрасса и критерий Коши 35
3.4. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности 39
3.5. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями над последовательностями 41
3.6. Изображение вещественных чисел бесконечными десятичными дробями 47
3.7. Счетность рациональных чисел. Несчетность вещественных чисел 52
3.8. Верхний и нижний пределы последовательностей 55
§ 4. Функции и их пределы 60
4.1. Понятие функции 60
4.2. Способы задания функции 64
4.3. Элементарные функции и их классификация 68
4.4. Первое определение предела функции 69
4.5. Второе определение предела функции 72
4.6. Свойства пределов функций 76
4.7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции 78
4.8. Пределы монотонных функций 80
4.9. Критерий Коши существования предела функции 81
§ 5. Непрерывность функции в точке 84
5.1. Точки непрерывности и точки разрыва функции 84
5.2. Свойство функций, непрерывных в точке 88
§ 6. Свойства функций, непрерывных на промежутках 89
6.1. Ограниченность непрерывных функций. Достижимость экстремальных значений 89
6.2. Промежуточные значения непрерывной функции 91
6.3. Обратные функции 93
§ 7. Непрерывность элементарных функций 96
7.1. Многочлены и рациональные функции 96
7.2. Показательная, логарифмическая и степенная функции 97
7.3. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции 105
§ 8. Сравнение функций. Вычисление пределов 106
8.1. Некоторые замечательные пределы 106
8.2. Сравнение функций 111
8.3. Эквивалентные функции 116
8.4. Метод выделения главной части функции. Применение к вычислению пределов 117
§ 9. Производная и дифференциал 121
9.1. Определение производной 121
9.2. Дифференциал функции 124
9.3. Геометрический смысл производной и дифференциала 127
9 4. Физический смысл производной и дифференциала 131
9.5. Правила вычисления производных, 133

связанные с арифметическими действиями над функциями
9.6. Производная обратной функции 137
9.7, Производная и дифференциал сложной функции 139
9.8. Гиперболические функции и их производные 145
§ 10. Производные и дифференциалы высших порядков 148
10.1. Производные высших порядков 148
10.2. Свойства производных высших порядков. ... 149
10.3. Производные высших порядков от сложных функций, от обратных функций и от функций, заданных параметрически. 151
10.4. Дифференциалы высших порядков. 154
§11, Теоремы о среднем для дифференцируемых функций 156
11.1. Теорема Ферма 156
11.2. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о средних значениях 158
§ 12. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя 164
12.1. Неопределенности вида $\frac{0}{0}$ 165
12.2. Неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ 168
§ 13. Формула Тейлора 173
13.1. Вывод формулы Тейлора 173
13.2. Многочлен Тейлора как многочлен наилучшего приближения функции в окрестности данной точки 176
13.3. Примеры разложения по формуле Тейлора 179
13.4. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора (метод выделения главной части 181
§ 14. Исследование поведения функции 184
14.1. Критерий монотонности функции 184
14.2. Экстремумы функций. Определение наибольших и наименьших значений функций 184
14.3. Выпуклость и точки перегиба 190
14.4. Асимптоты 196
14.5. Построение графиков функций 198
§ 15. Вектор-функция 209
15.1. Понятие предела и непрерывности для вектор-функции 209
15.2. Производная и дифференциал вектор-функции. 212
§ 16. Длина дуги кривой 216
16.1. Понятие кривой 216
16.2. Касательная к кривой. Геометрический смысл производной вектор-функции 221
16.3. Длина дуги кривой и дифференциал длины дуги 224
16.4. Плоские кривые 231
16.5. Физический смысл производной вектор-функции 233
§ 17. Кривизна кривой 234
17.1. Две леммы. Радиальная и трансверсальная составляющие 234
17.2. Определение кривизны кривой и ее вычисление 237
17.3. Главная нормаль. Соприкасающаяся плоскость 239
17.4. Центр кривизны и эволюта кривой 241
17.5. Формулы для кривизны и эволюты плоских кривых 241

Глава вторая. Дифференциальное исчисление функций многих переменных
§ 18. Множества на плоскости и в пространстве 247
18.1. Окрестности и пределы последовательностей точек 247
18.2. Различные типы множеств 261
§ 19. Предел и непрерывность функций многих переменных 265
19.1. Предел функции 265
19.2. Непрерывность функций 270
19.3. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций 272
19.4. Теоремы о функциях, непрерывных на множествах 273
19.5. Равномерная непрерывность функций. Модуль непрерывности 276
§ 20. Частные производные. Дифференцируемость функций многих переменных 283
20.1. Частные производные и частные дифференциалы 283
20.2, Дифференцируемость функции в точке 286
20.3. Дифференцирование сложной функции 293
20.4. Инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных, Правила вычисления дифференциалов 296
20.5. Геометрический смысл частных производных и полного дифференциала 302
20,6. Производная по направлению 305
§ 21. Частные производные и дифференциалы высших порядков 310
21.1. Частные производные высших порядков 310
21.2. Дифференциалы высших порядков 313

Глава третья. Интегральное исчисление функций одного переменного
§ 22. Определение и свойства неопределенного интеграла 318
22.1. Первообразная и неопределенный интеграл 318
22.2. Табличные интегралы 321
22.3. Интегрирование подстановкой 323
22.4. Интегрирование по частям 325
§ 23. Некоторые сведения о комплексных числах и многочленах 327
23.1. Комплексные числа 327
23.2. Некоторые понятия анализа в области комплексных чисел 332
23.3. Разложение многочленов на множители 336
23.4. Общий наибольший делитель многочленов. 338
23.5. Разложение правильных рациональных дробей на элементарные 343
§ 24. Интегрирование рациональных дробей 350
24.1. Интегрирование элементарных рациональных дробей 350
24.2. Общий случай 352
24.3. Метод Остроградского 354
§ 25. Интегрирование некоторых иррациональностей 359
25.1. Интегралы вида 360
$\int R[x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{r_1},...,(\frac{ax+b}{cx+d})^{r_s}]dx$
25.2. Интегралы вида 363
$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$
Подстановка Эйлера 363
25.3. Интегралы от дифференциального бинома 366
25.4. Интегралы вида $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ 369
§ 26. Интегрирование некоторых классов трансцендентных функций 371
26.1. Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$ 371
26.2. Интегралы вида $\int \sin^n x\cos^m xdx$ 373
26.3. Интегралы вида $\int \sin\alpha x\cos\beta xdx$, 374
$\int \sin\alpha x\sin\beta xdx$, $\int \cos\alpha x\cos\beta xdx$
26.4. Интегралы от трансцендентных функций, вычисляющиеся с помощью интегрирования по частям 375
26.5. Интегралы вида $\int R(shx,chx)dx$ 376
26.6. Замечания об интегралах, не выражающихся через элементарные функции 377
§ 27. Определенный интеграл 379
27.1. Определение интеграла по Риману 379
27.2. Ограниченность интегрируемой функции 382
27.3. Верхние и нижние интегральные суммы Дарбу Верхний и нижний интегралы Дарбу 383
27.4. Необходимые и достаточные условия интегрируемости 386
27.5. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций... 388
§ 29. Свойства интегрируемых функций 390
28.1. Свойства определенного интеграла 390
28.2. Теорема о среднем для определенного интеграла. 399
28.3. Интегрируемость кусочно-непрерывных функций 403
§ 29. Определенный интеграл с переменным верхним пределом 405
29.1. Непрерывность интеграла по верхнему пределу. 405
29.2. Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу. Существование первообразной у непрерывной функции 406
29.3. Формула Ньютона—Лейбница 408
§ 30. Методы вычисления определенного интеграла 409
30.1. Замена переменного 409
30.2. Интегрирование по частям 411
§ 31. Мера плоских открытых множеств 413
31.1. Определение меры (площади) открытых множеств 413
31.2. Монотонность меры открытых множеств 415
§ 32. Некоторые геометрические и физические приложения определенного интеграла 423
32.1. Вычисление площадей 423
32.2. Объем тел вращения 429
32.3. Вычисление длины кривой 431
32.4. Площадь поверхности вращения 434
32.5. Работа силы 438
32.6. Вычисление статических моментов и центра тяжести кривой 439
§ 33. Интегралы от неограниченных функций 442
33.1, Определение интеграла от неограниченной функции 442
33.2. Формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов на конечном промежутке 447
33.3. Несобственные интегралы от неотрицательных на конечном промежутке функций 449

33.4. Критерий Коши. Абсолютно сходящиеся несобственные интегралы на конечном промежутке 457
§ 34, Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования 459
34.1. Определение несобственных интегралов с бесконечными пределами. 459
34.2. Формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов 461
34.3. Несобственные интегралы с бесконечными пределами от неотрицательных функций 465
34.4. Критерий Коши. Абсолютно сходящиеся несобственные интегралы с бесконечными пределами. Метод улучшения сходимости интегралов 469

Глава четвертая. Ряды
§ 35. Числовые ряды 477
35.1. Определение ряда и его сходимость 477
35.2. Свойства сходящихся рядов 480
35.3. Критерии сходимости рядов 482
35.4. Критерии сходимости рядов с неотрицательными членами. Метод выделения главной части n-го члена ряда 484
35.5. Знакопеременные ряды 496
35.6. Абсолютно сходящиеся ряды. Использование абсолютно сходящихся рядов для исследования сходимости произвольных рядов 499
35.7. Сходящиеся ряды, не сходящиеся абсолютно. Признак Дирихле 506
§ 36. Функциональные последовательности и ряды. 514
36.1. Сходимость функциональных последовательностей и рядов 514
36.2. Равномерная сходимость последовательностей и рядов 518
36.3. Свойства равномерно сходящихся рядов и последовательностей 529
§ 37. Степенные ряды 536
37.1. Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда. Формула Коши—Адамара 536
37.2. Аналитические функции 543
37.3. Вещественные аналитические функции 544
37.4. Разложение функций в степенные ряды. Различные способы записи остаточного члена формулы Тейлора 547
37.5. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора 552
37.6. Разложение в степенные ряды и суммирование степенных рядов методом почленного дифференцирования и интегрирования 560
§ 38. Кратные ряды 562
38.1. Кратные числовые ряды 562
38.2. Кратные функциональные ряды 568
Алфавитный указатель

Математические методы исследования всегда играли и играют огромную роль в естествознании. Математика неустанно продолжает развиваться и находит все новые и новые области своего применения. Задачи практики в свою очередь приводят к созданию новых направлений математики и ее приложений. Развитие математики в целом определяет уровень ее приложений и оказывает существенное влияние на развитие других наук и техники.

Математика является точной абстрактной наукой, изучающей количественные соотношения и пространственные формы реального мира. Точность математики означает, что методом исследования в математике являются строгие логические рассуждения, а результаты исследований формулируются в строгой логической форме. Абстрактность же математики означает, что объектами ее изучения являются логические модели, построенные для описания и исследования того или иного явления. В этих моделях математика изучает соотношения между их элементами, количественные связи между ними, их форму. Одна и та же математическая модель может описывать свойства очень далеких друг от друга по своему физическому содержанию реальных процессов. Для математики важна не природа рассматриваемых объектов, а лишь существующие между ними соотношения. С абстрактностью математики связана, с одной стороны, определенная трудность ее усвоения, а с другой—ее сила, универсализм и общность.

В последнее время, благодаря появлению быстродействующих вычислительных машин, произошел большой качественный скачок в использовании математических методов, которые стали применяться не только в тех областях, где математика использовалась уже давно (например, в механике, физике), но и в тех областях человеческого знания, где математика еще совсем недавно либо применялась мало, либо ее применение даже не представлялось возможным (медицина, экономика, лингвистика, социология и т. п.). Современный научный работник или инженер должен в достаточной степени

хорошо владеть как классическими, так и современными математическими методами исследования, которые могут применяться в его области. Для того чтобы иметь возможность с успехом применять математические методы при изучении того или иного вопроса, нужно, конечно, прежде всего уметь правильно обращаться с математическим аппаратом, знать границы допустимого использования рассматриваемой математической модели. Вместе с тем, указанными обстоятельствами не исчерпываются характерные особенности решения задач математическими методами, да и вообще математического творчества, т. е. познания объективно существующих математических истин. Для правильной постановки задачи, для оценки ее данных, для выделения существенных из них и для выбора способа ее решения необходимо обладать еще математической интуицией, фантазией и чувством гармонии, позволяющими предвидеть нужный результат прежде, чем он будет получен. Однако интуитивно почувствовать ожидаемый результат и наметить путь исследований — это далеко не все. Интуитивное чувство гармонии является в математике лишь первой, хотя и весьма важной ступенью: интуитивные соображения отдаются на суд холодного рассудка для их изучения, доказательства или опровержения. При этом в математике справедливость рассматриваемого факта доказывается не проверкой его на ряде примеров, не проведением ряда экспериментов в узком смысле этого слова, а чисто логическим путем, по законам формальной логики. Эксперимент или пример могут дать лишь иллюстрацию утверждения или его опровержение или натолкнуть на какую-либо идею. При математическом доказательстве гипотезы, при математическом решении задачи правильный выбор аппарата и метода—залог успеха и, более того, часто залог того, что в результате будет получено больше полезной информации об изучаемом предмете, чем можно было заранее предвидеть. Это связано с тем, что математический аппарат таит в себе много скрытой информации и скрытого богатства, накапливавшихся в нем в течение веков. Формулы могут оказаться «умнее» применяющего их и дать больше, чем от них ожидалось. Результат математического исследования часто записывается с помощью длинных, и однообразных формул, подобно тому как прекрасная симфония может быть записана с помощью многочисленных рядов однообразных нотных знаков.

Конечно, эта схема весьма идеализирована. Было бы большим заблуждением думать, что для математики имеют значение только доказанные утверждения, только исследования, доведенные в известном смысле до логического завершения. Можно привести много примеров математических теории и положений, которые, будучи сформулированы лишь в виде гипотез, тем не менее оказывали или оказывают существенное влияние на развитие математики.

Свободное владение математическими методами, знания и интуиция приобретаются, накапливаются и развиваются в процессе систематических занятий, в результате длительной и настойчивой работы. Тот, кто последовательно овладевает математическим аппаратом, кто последовательно приобретает твердое и точное знание математических фактов легко и просто двигается дальше; усвоив одно, усваивает и последующее. Для него деревья не загораживают леса, он легко оценивает силу и красоту математических методов, приобретает уверенность в способности и умении справиться с встречающейся ему задачей, и математика делается послушным инструментом в его руках.

При изучении математики весьма важно, чтобы учащийся понял и хорошо усвоил основные математические понятия, а не составил о них приближенное расплывчатое представление. То что понято и освоено, входит в плоть и кровь, делается естественным и очевидным, а следовательно, и простым в обращении. При изучении математики важно также, чтобы учащийся стремился овладеть процессом творческого мышления, чтобы он освоил сущность идей и понятий, понял их взаимосвязь, а не усвоил лишь их внешнюю окончательную форму, записанную с помощью символов.

Часто мнение о трудности изучения математики связано с туманным и нечетким ее изложением на интуитивном уровне. Кажущаяся трудность тех или иных математических методов нередко связана с тем, что эти методы не были своевременно, достаточно хорошо разъяснены учащемуся и потому остались им не понятыми. Полное освещение понятия, как правили, не требует больше времени, чем создание о нем интуитивного описательного представления, нуждающегося в дополнительных пояснениях, и оправдывает себя при применении этого понятия, позволяя его правильно использовать.

Лучший и кратчайший способ разъяснить какое-либо математическое понятие—это дать его точную формулировку. Лучший способ на первом этапе обучения объяснить теорему, выявить ее смысл, установить ее связь с ранее изученными фактами—это доказать теорему. Безусловно, при приобретении достаточно хорошей математической культуры вполне допустимо знакомство с рядом утверждений, ограничиваясь лишь их формулировкой без проведения доказательства. Однако на первом этапе обучения это явно нецелесообразно.

Косвенная польза от изучения математики состоит в том, что оно (изучение) совершенствует общую культуру мышления, дисциплинирует ее, приучает человека логически рассуждать, воспитывает точность и обстоятельность аргументации. Математика учит не загромождать исследование ненужными подробностями, не влияющими на сущность дела, и, наоборот, не пренебрегать тем, что имеет принципиальное значение для существа изучаемого вопроса. Все это дает возможность эффективно исследовать и осмысливать новые задачи, возникающие в различных областях человеческой деятельности.

Умение логически мыслить, владение математическим аппаратом, правильное использование математических методов дают большую экономию мышления, дают в руки человека мощный метод исследования.

Овладеть в достаточной мере математическим методом, математической культурой мышления— далеко не простая задача. Но для того, кто сумеет этого достичь, труд не пропадет зря. Для него откроются новые перспективы человеческой деятельности, заманчивые дороги в неизвестное, откроются качественно новые возможности творчества, качественно новые возможности познания мира. Причем важно отметить, что все это доступно для каждого, кто хочет овладеть математикой, кто серьезно и последовательно займется ее изучением.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий курс является учебником, в котором излагаются основные разделы математического анализа: дифференциальное и интегральное исчисление и теория рядов. Курс написан на основе лекций по математическому анализу, которые читаются автором с 1956 г. в Московском физико-техническом институте.

Математический анализ изучает функциональные зависимости и является той частью классической математики, которая является основой почти для любой математической дисциплины. Поэтому не случайно, что он обычно является первым серьезным курсом высшей математики, с которым приходится сталкиваться учащемуся. Задачей этого курса является не только сообщение известного запаса сведений (определений, теорем, их доказательств, связей между ними, методов решения задач) и обучение их применению. В его задачу входят развитие у учащихся логического мышления и математической культуры, необходимых для изучения математики (да и вообще для проведения научно-исследовательской работы), развитие математической (аналитической и геометрической) интуиции. Наконец, курс математического анализа идейно готовит читателя к изучению других математических методов, других математических дисциплин.

Запас сведений, сообщаемых в предлагаемой книге, автор старался сделать по возможности минимальным. Он состоит из изложения лишь тех фактов, которые рассматриваются обычно на лекциях, и необходимых дополнений к ним, которые предназначены ответить на вопросы и рассеять неясности, могущие возникнуть у части слушателей лекций, и этим помочь преодолеть неизбежные затруднения.

Материал в книге автор старался изложить так, чтобы максимально помочь учащемуся овладеть различными математическими методами, сделать их простыми и естественными, научить свободно их применять. С этой целью в учебнике довольно много места отводится разбору решения задач на основе рассмотренных общих методов. Имеется также много упражнений, которые позволяют лучше усвоить изложенный материал, по существу разобраться в его содержании, проконтролировать его понимание, развить математическую культуру мышления, научить применять математический аппарат к решению простейших задач. В упражнениях формулируются факты, которые могут быть легко доказаны методами разобранными в курсе, причем эти факты иногда используются в дальнейшем. К упражнениям отнесены такие задания, которые посильны каждому учащемуся. Весьма рекомендуется при изучении курса делать все упражнения по мере того, как они появляются в тексте, ибо они составляют неотъемлемую часть всего изложения. Если какое-либо из упражнений вызывает затруднение, это означает, что соответствующая часть курса не усвоена и целесообразно вернуться назад.

Кроме упражнений, в курсе изредка попадаются и задачи, решения которых, в отличие от упражнений, отнюдь не являются необходимым условием усвоения курса. Они предназначаются для тех учащихся, у которых появится желание померить свои силы на решении более серьезных и глубоких вопросов, часто требующих новых идей и методов, не рассматриваемых в курсе. Эти задачи весьма различны по своей трудности, и среди них имеются такие, решение которых может потребовать весьма

длительного времени. Некоторые упражнения и задачи в известной мере имеют своей целью ответить на вопросы, которые могут возникнуть у учащегося при изучении основных понятий математического анализа.

Примеров на применение методов математического анализа к решению задач из смежных дисциплин приводится лишь небольшое количество, поскольку курсы этих дисциплин читаются в высших учебных заведениях параллельно с курсом математического анализа и предполагается, что последний используется в них в достаточной степени.

Изложение материала ведется на уровне строгости, принятом в настоящее время в классической математике. Исключение сделано лишь для некоторых вопросов теории поля, связанных, например, с так называемым правилом штопора, изложенным менее строю. Наведение здесь математической строгости существенно увеличило бы объем изложения этого круга вопросов.

Понятие математической строгости в определенном смысле следует считать пока историческим понятием. Уровень строгости при изложении математических методов определяется потребностью практики в широком смысле слова. Невозможность решить ту или иную задачу на прежнем уровне строгости или возникающие противоречия приводят к возникновению новых логических концепций, нового понятия строгости. Во всяком случае, мы в нашем курсе нигде не останавливаемся на вопросах существования (непротиворечивости) возникающих в процессе наших рассуждений множеств и понятий, не подвергаем сомнению принцип произвольного выбора. Мы не будем приводить соответствующих примеров, дабы не посеять у неискушенного учащегося излишних сомнений, которые могут затруднить на первых порах изучение предлагаемого курса.

Отметим некоторые особенности построения нашего курса. Начинается он, как обычно, с изучения основных понятий анализа: числа, функции, предела, непрерывности, производной, интеграла и т. д. Теория вещественного числа излагается аксиоматическим методом. Этот метод, являясь наиболее коротким, логически равноправен другим методам введения понятия числа: с помощью ли бесконечных десятичных дробей, с помощью ли классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел, с помощью ли сечений в множестве рациональных чисел. Равноправен в том смысле, что ни при одном из этих способов не доказывается существование (непротиворечивость) множества вещественных чисел.

При изучении свойств функций большое внимание обращается на метод выделения главной части: показывается, что этот метод является универсальным для решения многих задач анализа; он применяется, например, при исследовании поведения функции (пределы, экстремумы, точки перегиба, асимптоты и т. п), при исследовании сходимости рядов, как числовых, так и функциональных, при исследовании сходимости интегралов, при изучении отображений многомерных областей, при приближенных вычислениях и т. п.

По возможности в курсе производится ознакомление учащегося с методами, выходящими, собственно говоря, за рамки классического анализа и находящими свое дальнейшее развитие в других отделах математики. Это делается там, где это полезно, где это в какой-то мере лучше разъясняет рассматриваемые свойства и, конечно, принципиально не усложняет изложения. Сюда относятся идеи теории функций вещественной переменной, метрической топологии, функционального анализа. Благодаря этому учащемуся будет легче в дальнейшем усваивать другие математические дисциплины, которые ему встретятся в процессе обучения или работы.

Существенным для последней части курса является введение пространства L_2, как пополнения пространства непрерывных функций в соответствующей метрике. Такой подход к пространству L_2 является достаточно коротким. Его недостаток, состоящий в том, что исходное пространство непрерывных функций дополняется некоторыми идеальными элементами, уменьшается за счет доказательства того, что всякая кусочно-непрерывная функция с интегрируемым квадратом (вообще говоря, в несобственном смысле) может быть рассматриваема как элемент пространства L_2 Этого вполне достаточно для широкого круга прикладных задач. Введение пространств L_2 позволяет с достаточной полнотой изложить теорию рядов Фурье по ортогональным системам и сказывается полезным во многих дальнейших математических курсах (интегральные уравнения, уравнения с частными производными, теория вероятностей и др.).

Порядок изложения материала максимально приближен к порядку изложения его на лекциях в МФТИ. Этим объясняется, например, то, что дифференциальное исчисление функций многих переменных излагается в двух разных главах (гл. II и V).

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить профессора С. М. Никольского, в беседах с которым в продолжение многих лет совместной работы обсуждалось преподавание различных вопросов математического анализа.

Автор приносит глубокую и искреннюю благодарность профессору В. С. Владимирову и преподавателям кафедры математики Московского физико-технического института К. А. Бежанову, И. А. Борачинскому, Б. И. Голубову, В. Б. Демьянову, Ю. П. Иванилову, С. И. Колесниковой, А. А. Крумингу, В. Ю. Крылову, Ф. Г. Маслова, Б. В, Федосову, Т. Х. Яковлевой и студентке МГУ И. Ф. Бывшевой, взявших на себя труд прочитать рукопись отдельных глав и параграфов.

Автор особенно благодарит рецензентов профессора В. А. Ильина и доцента И. С. Аршона, прочитавших рукопись всей книги.

Большую благодарность автор приносит редакторам книги А. И. Селиверстовой и доценту Г. Н. Яковлеву, проделавшим большую работу по ее улучшению.

Все сделанные замечания были учтены автором при окончательном редактировании книги.

Трудную работу по подготовке рукописи проделали ст. лаборанты кафедры Г. Е. Пономарева и Е. З. Лобанова, за что автор выражает им свою сердечную благодарность.

Автор считает также своим долгом отметить, что на него безусловно оказал влияние ряд курсов математического анализа, с которыми он знакомился в то или иное время. Из них следует отметить курсы Ш. Ж. де ла Валле—Пуссена «Курс математического. анализа бесконечно малых (Москва, ГТТИ, 1933), Г. П. Толстова «Курс математического анализа» (Москва, ГИТТЛ, 1954), Г. М. Фихтенгольца «Курс дифференциального и интегрального исчисления» (Москва, ГИТТЛ, 1947).

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абеля неравенство 511
— преобразование 511
— теорема о сходимости степенного ряда 536
Абсолютная величина числа 16
Абсолютно сходящийся интеграл 458, 469
— — ряд 499, 516, 565
Аддитивность интеграла 320
Аксиоматическое определение вещественных чисел 19
Алгебраическая функция 68
Алгоритм Евклида 342
Аналитическая функция 543
Аргумент (независимая переменная) 61
— комплексного числа 328
Архимеда свойство вещественных чисел 17
— спираль 442
Асимптота 196, 201, 203
— вертикальная 197, 198
— наклонная 196, 198
Ассоциативный (сочетательный) закон сложения 12
— — — умножения 14
Астроида 244, 433, 434, 442
Безу теорема 336
Бесконечная геометрическая прогрессия 479, 483
— десятичная дробь 47, 49, 50
— — — допустимая 49
— производная 122
Бесконечно большая последовательность 40
— — функция 79
— малая последовательность 39, 333, 334
— — функция 78, 114
Бесконечность 20
Бесконечный промежуток 20
Бесконечный предел 40
— частичный предел 55
Билинейная форма 313
Бином дифференциальный 366
Больцано — Вейерштрасса теорема 36, 256
Бореля лемма (о покрытии) 417
Вейерштрасса признак равномерной сходимости 522, 524
— теорема об ограниченности непрерывной функции 90, 274
— — об экстремальных значениях непрерывной функции 90
Векторное представление (вектор-представление) кривой 216
Вектор-функция (векторная функция) 209, 210
— — дифференцируемая 213
— — непрерывная 212
Величина мгновенной скорости 132
— скорости 131
— средней скорости 131, 132
Вертикальная асимптота 197, 198
— касательная 128
Верхний интеграл Дарбу 386
— предел последовательности 56 Верхняя грань множества 22, 23
— — последовательности 32
— — функции 63
Верхняя подходящая десятичная дробь 48
— сумма Дарбу 384
Вещественная функция одного переменного 61

— часть комплексного числа 327
Вещественные (действительные) числа 11, 19, 52
Винтовая линия 230
Внутренняя точка множества 257
Вторая производная 148
Второй дифференциал, 154, 315
Выпуклая область 265
— функция 191
Гамильтона символ (набла) 307
Гармонический ряд 483
Геометрическая прогрессия 479, 483
Гиперболические функции 145, 146
Гиперболический косинус 145, 146
— котангенс 146
— синус 145, 146
— тангенс 146
Главная нормаль 239
— часть функции 117, 118
Гладкая кривая 224
Годограф вектор-функции 216
Градиент функции 171, 196
Граница множества 262
Граничная точка множества 262
График функции 65, 198, 266
Даламбера признак 493
Дарбу интегралы 386
— интегральные суммы 384
Дедекинда принцип 27
Действительные (вещественные) числа 11, 19
Декарта лист 209
Деление вещественных чисел 14
— комплексных чисел 330
Делитель многочлена 338
Десятичная дробь 47, 49, 50
— — допустимая 49
Диаметр множества 282
Дини теорема 532
Дирихле признак 472, 473, 512, 528
— функция 65, 383
Дистрибутивный (распределительный) закон умножения 15
Дифференциал вектор-функции 213
— функции 124, 141, 287, 293, 300
— — полный 287
— — частный 284
Дифференциалы высших порядков 154, 315, 317
Дифференциальный бином 366
Дифференцируемая вектор-функция 213
— функция 124, 127, 286
Длина кривой 225, 431
Допустимое преобразование параметра 218
Дуга простая 216
e (число) 34, 108
Евклида алгоритм 342
Евклидово пространство 248
Единица 14
Единичная сфера 260
Единичный шар 260
Жордана теорема 217
Зависимая переменная 61
Зависимость функциональная 60
Замкнутая кривая (контур) 217
— область 265
Замкнутое множество 259
Замкнутый шар 258
Замыкание множества 258
Знакопеременный ряд 496
Знакочередующийся ряд 496
Изолированная точка множества 258
Изоморфизм 52
Инвариантность формы первого дифференциала 141, 299
Интеграл неопределенный 319
— несобственный 443—446, 459— 462
— определенный 380, 381
— с переменным верхним пределом 405
Интеграл табличный 322
Интегралы Дарбу 386
— эллиптические 377, 378
Интегральная сумма Римана 380
— теорема о среднем 400, 402, 403
Интегральные суммы Дарбу 384
Интегральный признак сходимости рядов 485
Интегрирование подстановкой 323
— по частям 325, 411
Интегрируемая функция 380
Интервал 20
— выпуклости вверх 191
— — вниз 191
— сходимости ряда 545
Иррациональное число 11
Кантора теорема о несчетности вещественных чисел 55
— — о равномерной непрерывности 277
Кардиоида 246, 429
Касательная 128, 222
— вертикальная 128
— наклонная 128
— плоскость 304
Квадратичная форма 314
Квадраты ранга m 413
Квадрильяж плоскости 413
Колебание функции на множестве 282
Коммутативный (переместительный) закон сложения 12
Коммутативность умножения 14
Комплексное число 11, 327
— — сопряженное 31

Комплекснозначная функция комплексного переменного 62
Конечная производная 122
Конечное покрытие 417
Контур (замкнутая кривая) 217
— простой 217
Концевой экстремум 189
Координатное представление кривой 216
Координаты полярные 244
Корень многочлена 336
Косинус гиперболический 145, 146
Котангенс гиперболический 146
Коши-Адамара формула 540
Коши критерий для последовательностей 37
— — для функций 82
— — равномерной сходимости 521, 524
— — для несобственных интегралов 457, 469
— — для рядов 482
— признак 495
— теорема о промежуточных значениях непрерывной функции 91
— — о среднем 163
— условие для последовательностей 37
— — для функций 82, 84
— форма остаточного члена формулы Тейлора 176, 549
— формула конечных приращений 164
Коши — Шварца неравенство 248
Коэффициенты степенного ряда 536
Кратная точка кривой 216
Кратность корня 336
Кратный ряд 562, 568, 569
Кривая 216, 218, 263
— гладкая 224
— кусочно-гладкая 224
— непрерывно дифференцируемая 219
— ориентированная 217
— — противоположно 220
— открытая 221
— параметрически заданная 216
— плоская 217, 231
— спрямляемая 225 Кривизна кривой 237
Круг сходимости степенного ряда 577
Куб n-мерный 252
Кубильяж пространства 423
Кусочно-гладкая кривая 224
Кусочно непрерывная функция 403
Кусочно-непрерывно дифференцируемая функция 411
Лагранжа теорема о среднем 159
— форма остаточного члена формулы Тейлора 176, 549
— формула конечных приращений 161
Левая производная 122
Лейбница признак 496
— формула 149
Лемма Бореля (о покрытии) 417
— о сохранении знака 271
Лемниската 442
Линейная плотность 133, 439
Линейная функция n-переменных 292
— — точки 292
Лист Декарта 269
Логарифмическая производная 144
— функция 104
Логарифмическая спираль 434
Ломаная, вписанная в кривую 225
Лопиталия правило 165—168
Луч 264
Маклорена формула 175
Максимальный (наибольший) элемент множества 23
Мгновенная скорость, величина 132
Мелкость разбиения 379
Мера (площадь) открытого множества 414
Метод выделения главной части 117, 118, 176, 181, 182
— неопределенных коэффициентов 348
— Остроградского 354, 357
— улучшения сходимости 472
Минимальный (наименьший) элемент множества 23
Мнимая часть комплексного числа 327
Многозначная функция 64
Многочлен (полином) 68, 96
— Тейлора 175
Множество 20
— замкнутое 258
— значений функции 61
— — элементов последовательности 31
— неограниченное 22
— ограниченное 22, 256
Множество, ограниченное сверху 22
Множество, ограниченное снизу 22
— открытое 257
— пустое 20
— связное 264
— счетное 53
— элементов последовательности 31
Модуль комплексного числа 327
Модуль непрерывности 279
Момент кривой относительно оси 440
Моменты точки 439
Монотонная последовательность 33
Монотонно возрастающая последовательность 33
— — функция 80, 93, 184
— убывающая последовательность 33
— — функция 80, 93, 184
Монотонность меры 415

Набла (символ Гамильтона) 307
Наибольший (максимальный) элемент множества 23
Наибольшее значение функции 63, 64
Наименьший (минимальный) элемент множества 23
Наименьшее значение функции 63, 64
Наклонная асимптота 196, 198
— касательная 128
Направление касательной 223
Направляющие косинусы прямой 309
Натуральные числа 14
Натуральный ряд чисел 11
Независимая переменная (аргумент) 61
Необходимое условие сходимости ряда 483
— — равномерной сходимости ряда 524
Неограниченная последовательность 32
Неопределенный интеграл 319
Неособая точка кривой 224
Непрерывная функция 83, 85, 86, 270, 335
— вектор-функция 212
Непрерывно дифференцируемая кривая 219
— — функция 148, 290
Непрерывность вещественных чисел 17, 18, 27, 28
Неравенство Абеля 511
— Коши—Шверца 248
— треугольника 248
Несобственный интеграл 443—446, 459—462
Несчетность вещественных чисел 55
Неявная функция 66, 67
Неявное представление кривой 220
Нижний интеграл Дарбу 386
— предел последовательности 56
Нижняя грань множества 22, 23
— — последовательности 32
— — функции 63
— подходящая десятичная дробь 48
— сумма Дарбу 384
Нормаль (к кривой) 239
— главная 239
Носитель кривой 216
— точки кривой 216
Нуль 12
Ньютона — Лейбница формула 408
Область 264
— выпуклая 265
— замкнутая 265
— определения функции 61
Образ множества 61
Обратная функция 64, 93
Обратное число 14
Обратные тригонометрические функции 106
Общий делитель 339
— наибольший делитель 339
Объединение (сумма) множеств 21
Ограниченная последовательность 32
— функция 63
Ограниченное множество 22, 256
— сверху множество 22
— снизу множество 22
Однозначная функция 64
Однородная кривая 439
Односторонние окрестности 81
— пределы 72, 74
Окрестность числа (точки) 29
— односторонняя 81
— символов ∞, $+\infty$, $-\infty$ 41
— точки 250, 251, 252, 257
— — прямоугольная 252
— сферическая 251
Окружность соприкасающаяся 246, 159
Операция дифференцирования 122
— интегрирования 321
Определение позитивное 30
Определенный интеграл 380, 381
Ориентированная кривая 217
Особая точка кривой 224
Остаток ряда 477, 516
Остаточный член формулы Тейлора 175
— — — — в форме Коши 176, 549
— — — — — Лагранжа 176, 549
— — — — — Пеано 175
— — — — — Шлемиха — Роша 176
Остроградского метод 354, 357
— формула 355
Открытая кривая 221
Открытое множество 257
— покрытие множества 417
Открытый шар n-мерный 259
Отображение 61
Отрезок (числовой) 17
— разбиения 379
Отрицательное число 11, 13
Параллепипед n-мерный 251
Параметрически заданная кривая 216
Параметр кривой 216, 263
Пеано форма остаточного члена формулы Тейлора 175
Первообразная 318
Переменная 60
— зависимая 61
— независимая (аргумент) 61
Переместительный (коммутативный) закон сложения 12
— — — умножения 14
Пересечение множеств 21
Плоская кривая 217, 231
Плоскость касательная 304
— соприкасающаяся 240

Плотность линейная 133, 439
Площадь (мера) открытого множества 414
— поверхности вращения 435
Повторный предел 268
Подпоследовательность 35
Подстановки Эйлера 363, 364, 365
Подходящая десятичная дробь, верхняя 48
— — —, нижняя 48
Позитивное определение 30
Показательная функция 97, 100, 101
Покрытие множества 417
Полином (многочлен) 68, 96
Полное приращение функции 286
Полнота системы аксиом вещественных чисел 52
Полный дифференциал 287
Положительное число 13
— направление касательной 223
Полуинтервал 20
Полукубическая парабола 244
Полуотрезок 20
Полярные координаты 244
Последовательность 28, 332
— бесконечно большая 40
— — малая 39, 334
— монотонная 33
— монотонно возрастающая 35
— — убывающая 33
— неограниченная 32
— ограниченная 32
— — сверху 32
— — снизу 32
— расходящаяся 29
— сходящаяся 29, 333
— — равномерно 518
— точек 253, 254
—фундаментальная 37
— функциональная 514
Последовательности одного порядка 334
— эквиваленгные 334
Правая производная 122
Правило Лопиталия 165—168
Правильная рациональная дробь 343
Предел вектор-функции 210
— последовательности 28, 29, 30, 41, 333, 563
— — верхний 56
— — нижний 56
— — точек 253
— частичный 36, 37
Предел функции 69, 73, 81, 267
— повторный 268
— функции по множеству 266
— —в данном направлении 266
— — по кривой 266
— — слева 71, 74, 81
— — справа 71, 74, 81
— — односторонний 72, 74, 81
Предельная точка множества 258
Представление кривой 216
— — неявное 220
Преобразование параметра 218
— — допустимое 218
Признак Вайерштрасса равномерной сходимости 522, 524
— Даламбера 493
— Дирихле 472, 473, 512
— — равномерной сходимости 528
— Коши 495
Признак Лейбница 496
— сходимости ряда, интегральный 485
Принцип вложенных отрезков 18
— Дедекинда 27
Приращение аргумента 85
— функции 85
— — полное 286
Прогрессия геометрическая 479, 483
Произведение вещественных чисел 14
— комплексных чисел 329
— последовательностей 39
— ряда на число 480
Производная 121
— вектор-функции 212
— высшего порядка 148, 310
— левая 122
— логарифмическая 144
— правая 122
— по направлению 305, 306, 309
— частная 283
Промежуток 20
— бесконечный 20
Прообраз множества 61
Простая дуга 216
Простой контур 217
Противоположное число 12
Противоположно ориентированная кривая 220
Пространство евклидово 248
Прямая в n-мерном пространстве 264
— числовая 20
Прямолинейный отрезок 264
Прямоугольная окрестность точки 252
Пустое множество 20
Работа силы вдоль кривой 439
— элементарная 438
Равномерная непрерывность 276
Равномерное стремление функции к нулю 291
Равномерно сходящаяся последовательность 518
— сходящийся ряд 522
Равномощные множества 53
Радиальная составляющая скорости 236
Радиус-вектор 216

Радиус кривизны 237
Радиус сходимости степенного ряда 537
Разбиение отрезка 224, 225, 379
Разность вещественных чисел 13
— комплексных чисел 328
— множеств 21
— последовательностей 39
Ролля теорема о среднем 158
Распределительный (дистрибутивный) закон умножения 15
Расстояние в евклидовом пространстве 248
— между множествами 261
Расходящаяся последовательность 29
Рациональная дробь правильная 343
— — элементарная 348
— функция (дробь) 68, 96, 359
Рациональное число 11, 15, 53
Римана интегральная сумма 380
— теорема о перестановке членов ряда 509
Ряд 477
— гармонический 483
— знакопеременный 496
— знакочередующийся 496
— кратный 562, 568, 569
— расходящийся 478, 563
— степенной 536, 568
— сходящийся 478, 563, 568
— — абсолютно 499, 516, 565
— Тейлора 547
— функциональный 568
Свойство Архимеда вещественных чисел 17
Связное множество 264
Сечение в множестве чисел 27
Сила тока 132
Символ Гамильтона (набла) 307
Синус гиперболический 145, 146
Система вложенных квадратов 416
— — отрезков 17
Скачок функции в точке 86
Скорость, величина 131
— вращения вектор-функции 234
— движения 233
Сложение вещественных чисел 12
Сложная функция 67, 88
Смешанная частная производная 310
Соответствие 61
— взаимно однозначное 50
Соприкасающаяся окружность 246
— плоскость 240
Сопряженное комплексное число 331
Сочетательный (ассоциативный) закон умножения 14
— — — сложения 12
Спираль Архимеда 442
— логарифмическая 434
Спрямляемая кривая 225
Средняя линейная плотность 133
— сила тока 132
— скорость, величина 131, 132
Статические моменты 440
Степенная функция 105
Степенный ряд 536, 569
Степень многочлена 336
Строго монотонно возрастающая функция 93
— — убывающая функция 93
— монотонные функции 93
Сумма вещественных чисел 12
— Дарбу, интегральная 384
— комплексных чисел 328
— кривых 220
— (объединение) множеств 21
— последовательностей 39
— Римана, интегральная 380
— ряда 478, 516, 563, 569
— — частичная 477, 516, 568
— рядов 481
Суперпозиция функций 67
Существенно комплексное число 327
Сфера единичная 26
— (n —1)-мерная 259
Сферическая окрестность точки 251
Сходящаяся последовательность 29, 333
— — точек 254
Сходящийся интеграл 458, 469
— ряд 478, 499, 516, 563, 565, 568
Счетное множество 53
Таблица поведения функции 200
Табличный интеграл 322
Тангенс гиперболический 146
Тейлора многочлен 175
— ряд 547
Тейлора формула 173, 175
Теорема Абеля о сходимости степенного ряда 536
— Больцано—Вейерштрасса 36, 256
— Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции 90, 274
— — об экстремальных значениях непрерывной функции 90
— Дини 532
— Жордана 217
— Кантора о несчетности вещественных чисел 55
— — о равномерной непрерывности 277
— Коши о среднем 163
— — о промежуточных значениях непрерывной функции 91
— Лагранжа о среднем 159
— Римана о перестановке членов ряда 509
— Ролл я о среднем 158

— о среднем интегральная 400, 402, 403
— Ферма 156Точка 20
— возрастная функции 186
— кривой 216
— — кратная 216
— — неособая 224
— — —особая 224
— максимума функции 184, 189
— минимума функции 184, 189
— множества, внутренняя 257
— —, граничная 262
— —, изолированная 258
— n-мерного пространства 247
— перегиба 191, 192
Точка прикосновения множества 258
— разрыва функции 87
— — первого рода 86
— — второго рода 86
— самопересечения кривой 216
— строго максимума функции 185, 189
— — минимума функции 185, 189
— убывания функции 186
— устранимого разрыва 87
— экстремума функции 185
Транзитивность упорядоченности вещественных чисел 12
Трансцендентная функция 69
Трапеция криволинейная 424
Тригонометрическая запись комплексного числа 328
Тригонометрические функции 105, 106
Умножение вещественных чисел 14
Упорядоченность вещественных чисел 12
Условие Коши для последовательностей 37
— — для функций 82, 84
Ферма теорема 156
Форма билинейная 313
— квадратичная 314
— Коши остаточного члена формулы Тейлора 176, 549
Форма Лагранжа остаточного члена формулы Тейлора 176, 549
— Пеано остаточного члена формулы Тейлора 175
— Шлемиха — Роша остаточного члена формулы Тейлора 176
Формула конечных приращений Лагранжа 161
— — —Коши 164
— Коши — Адамара 540
— Лейбница 149
— Маклорена 175
— Ньютона — Лейбница 408
— Тейлора 173, 175
— Остроградского 355
— Френе 239
Формулы Эйлера 555
Фундаментальная последовательность 37
Функциональная зависимость 60
Функциональная последовательность 514
— —, ограниченная на множестве 515
— —, сходящаяся в точке 515
— —, — на множестве 515
— —, — равномерно 518
Функциональный ряд 568
Функции одного порядка 112
— эквивалентные 113, 116
Функция 60, 61
— алгебраическая 68
— аналитическая 543
— бесконечно большая 79
— — малая 78
— — — по сравнению с другой функцией 114
— вещественная 61
— выпуклая вверх 191
— — вниз 191
— гиперболическая 145, 146
Функция Дирихле 65, 383
— дифференцируемая 124, 127, 286
— , заданная параметрически 152
— интегрируемая 380
Функция комплекснозначная 62
— кусочно непрерывная 403
— кусочно-непрерывно дифференцируемая 411
— логарифмическая 104
— многих переменных 62
— многозначная 64
— монотонно возрастающая 80, 184
— — убывающая 80, 184
— непрерывная в точке 84, 85, 86, 270, 335
— — — слева 87
— — — справа 87
— — на множестве 273
— — на отрезке 89
— непрерывно дифференцируемая 148, 290
— неявная 66
— обратная 64, 93
— ограниченная 63
— — сверху 63
— — снизу 63
— однозначная 64
— показательная 97, 100, 101
— рациональная 68, 96, 359
— сложная 67, 88
— сравнения 453
— степенная 105
Функция строго выпуклая вверх 191
— — — вниз 191
— строго монотонная 93
— — монотонно возрастающая 93, 184
— — — убывающая 93, 184

— трансцендентная 69
— тригонометрическая 105, 106
—числовая 62
— элементарная 68, 273
Целое число 14
Центр кривизны 241
— тяжести кривой 441
Цепная линия 431, 438, 441, 442
Циклоида 442
Частичная сумма ряда 477, 516, 562, 568
Частичный предел последовательности 36, 37
— — —, бесконечный 55
Частичная производная 283
— — высшего порядка 310
— — смешанная 310
— — чистая 310
Частное вещественных чисел 14
Частный дифференциал 284
Часть кривой 220
Числа вещественные (действительные) 11, 19
— иррациональные 11, 13
Числа комплексные 11, 327
— натуральные 14
— отрицательные 11, 13
— положительные 13
— рациональные 11, 15, 53
— целые 14
Число e 34, 108, 123
— обратное 14
— противоположное 12
Числовой отрезок 17
Числовая последовательность 28
— прямая 20
— функция 62
Шар единичный 260
— n-мерный замкнутый 259
— — открытый 259
Шлемиха — Роша форма остаточного члена формулы Тейлора 176
Эволюта кривой 214
Эйлера подстановки 363, 364, 365
— формулы 555
Эквивалентные вектор-функции 218
— последовательности 334
— функции 113, 116
Экстремум концевой 189
Экстремумы функций 184, 185
Элементарная работа 348
Элементарная рациональная дробь 348
Элементарная функция 68, 273
Элементарные статистические моменты 440
Элемент множества 20
Эллипс 434
Эллиптические интегралы 377, 378, 434
— — в форме Лежандра 378, 474

ГЛАВА
ПЕРВАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

1.1. Свойства вещественных чисел

В курсе элементарной математики изучаются *вещественные* (действительные) и *комплексные числа*. Сначала в процессе счета возникает так называемый *натуральный ряд* чисел $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. Над числами натурального ряда можно производить операции сложения и умножения, что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными внутри натурального ряда. Чтобы все четыре арифметические операции (сложение, вычитание, умножение и деление) были возможны для любой пары чисел (кроме операции деления на ноль, которой нельзя приписать разумного смысла), приходится расширить класс рассматриваемых чисел. К необходимости такого расширения запаса чисел приводят также потребности измерения тех или иных геометрических и физических величин. Поэтому вводятся целые *отрицательные* (вида $-1, -2, \ldots, -n, \ldots$), а затем и *рациональные* (вида $\frac{p}{q}$, где p, q — любые целые числа) числа.

Та же потребность измерения величин и проведение таких операций, как возведение в дробную степень, вычисление логарифмов, решение алгебраических уравнений приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел; появляются *иррациональные* и, наконец, *комплексные числа*.

Напомним кратко известные из элементарной математики свойства вещественных чисел и дополним их описанием некоторых свойств, обычно там не рассматриваемых.

Множество вещественных чисел образует совокупность, обладающую следующими свойствами.

I. Свойство упорядоченности

Для любых двух чисел a и b определено соотношение порядка, т. е. *два любых вещественных числа a и b удовлетворяют одному и только одному из следующих трех соотношений:*

$$a < b,\ a = b \text{ или } a > b;$$

при этом, если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Последнее свойство называется свойством *транзитивности* упорядоченности вещественных чисел.

Запись $a < b$ равнозначна записи $b > a$. Запись $a \geqslant b$ ($b \leqslant a$) означает, что либо $a = b$, либо $a > b$. Например, можно написать $2 \geqslant 2$, $5 \geqslant 2$.

II. Свойства операции сложения

Для любой упорядоченной пары чисел a и b*) определено и притом единственным образом число, называемое их *суммой* и обозначаемое $a + b$, так что при этом имеют место следующие свойства.

II_1. *Для любой пары чисел a и b*

$$a + b = b + a.$$

Это свойство называется *переместительным*, или *коммутативным*, *законом сложения*.

II_2. *Для любой тройки чисел a, b, c*

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Это свойство называется *сочетательным*, или *ассоциативным*, *законом сложения*.

II_3. *Существует число, обозначаемое 0 и называемое нулем, такое, что для любого числа a*

$$a + 0 = a.$$

Следствие 1. *Число, обладающее свойством нуля, единственно.* Действительно, допустим, что существует два нуля 0 и 0′, тогда $0 + 0' = 0$ и $0' + 0 = 0'$. В силу коммутативности сложения левые части этих равенств равны, следовательно, равны и правые, т. е. $0 = 0'$.

II_4. *Для любого числа a существует число, обозначаемое $-a$ и называемое противоположным данному, такое, что*

$$a + (-a) = 0.$$

*) Термин «упорядоченная пара чисел» или вообще «упорядоченная система n чисел» (n — натуральное число) не следует понимать в том смысле, что эти числа упорядочены по величине (что всегда можно сделать согласно свойству I). Это выражение просто означает, что заданные числа перенумерованы, т. е. указано, какое число является первым, какое вторым и т. д.

Следствие 2. *Число, противоположное данному, единственно.*
Пусть некоторому числу a числа b и c противоположны, т. е. $a + b = 0$ и $a + c = 0$, тогда из первого из этих равенств имеем $(a + b) + c = c$, откуда $(a + c) + b = c$, но $a + c = 0$, следовательно, $b = c$.
Следствие 3. *Для любого числа* a

$$-(-a) = a. \tag{1.1}$$

Из равенства $a + (-a) = 0$, определяющего противоположный элемент, в силу коммутативности сложения получим $-a + a = 0$. Это и означает, что $a = -(-a)$.

II_5. *Если* $a < b$, *то для любого числа* c

$$a + c < b + c.$$

Следствие 4. *Если* $a < b$, *то* $-a > -b$.
В частности, если $a > 0$, *то* $-a < 0$, *а если* $a < 0$, *то* $-a > 0$.
Действительно, из $a < b$ следует, что $b + (-a) > 0$. Поэтому

$$-a = -a + b + (-b) = [b + (-a)] + (-b) > 0 + (-b) = -b.$$

Число $a > 0$ называется *положительным*, число $a < 0$ — *отрицательным*.

Следствие 5. *Если* $a < b$ *и* $c < d$, *то*

$$a + c < b + d, \tag{1.2}$$

т. е. можно производить почленное сложение неравенств одного знака.
Действительно, если $a < b$ и $c < d$, то, согласно II_5, $a + c < b + c$ и $c + b < d + b$, и поэтому из I имеем $a + c < b + d$.

Для любой упорядоченной пары чисел a и b число $a + (-b)$ называется *разностью* чисел a и b и обозначается $a - b$, т. е. по определению

$$a - b = a + (-b). \tag{1.3}$$

Очевидно,

$$a - a = 0, \tag{1.4}$$

ибо

$$a - a = a + (-a) = 0.$$

Следствие 6. *Для любых чисел* a *и* b

$$-a - b = -(a + b).$$

Действительно,

$$a + b + (-a - b) = (a - a) + (b - b) = 0.$$

Следствие 7. *Если* $a < b$, $c \geqslant d$, *то* $a - c < b - d$.
Действительно, из $c \geqslant d$ имеем $-c \leqslant -d$. Складывая неравенства $a < b$ и $-c \leqslant -d$, получим $a - c < b - d$.

III. Свойства операции умножения

Для любой упорядоченной пары чисел a и b определено и притом единственным образом число, называемое их *произведением* и обозначаемое ab, так что при этом имеют место следующие свойства.

III_1. *Для любой пары чисел a и b*

$$ab = ba.$$

Это свойство называется *переместительным*, или *коммутативным*, *законом умножения*.

III_2. *Для любой тройки чисел a, b, c*

$$a(bc) = (ab)c.$$

Это свойство называется *сочетательным*, или *ассоциативным*, *законом умножения*.

III_3. *Существует число, обозначаемое* 1 *и называемое единицей, такое, что* $1 \neq 0$ *и для любого числа a*

$$a \cdot 1 = a.$$

III_4. *Для любого числа* $a \neq 0$ *существует число, обозначаемое* $\frac{1}{a}$ *и называемое обратным данному, такое, что*

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Аналогично доказательству единственности нуля и числа, противоположного данному, доказывается единственность единицы и числа, обратного данному.

III_5. *Если* $a < b$ *и* $c > 0$, *то* $ac < bc$. *Если же* $a < b$ *и* $c < 0$, *то* $ac > bc$.*)

Следствие 8. $1 > 0$.

Действительно, если $1 < 0$, то $-1 > 0$. Умножая в этом случае неравенство $1 < 0$ на положительное число -1, получим, согласно III_5,

$$1 \cdot (-1) < 0.$$

Отсюда в силу определения единицы и коммутативности умножения следует, что $-1 < 0$, что противоречит сделанному допущению $1 < 0$.

Для любой упорядоченной пары чисел a и b, $b \neq 0$, число $a \cdot \frac{1}{b}$ называется *частным от деления a на b* и обозначается $\frac{a}{b}$, т. е. по определению

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}. \tag{1.5}$$

Число $1 + 1$ обозначается 2, число $2 + 1$ обозначается 3 и т. д. Эти числа 1, 2, 3, ... называются *натуральными числами*. Числа 0, ± 1, ± 2, ... называются *целыми числами*.

*) Отметим, что второе утверждение следует из первого и нижеследующего свойства IV.

Числа вида $\frac{m}{n}$, где m целое, а n натуральное, называются *рациональными числами.*

IV. Связь операций сложения и умножения

Для любой тройки чисел a, b c

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Это свойство называется *распределительным*, или *дистрибутивным, законом умножения* относительно сложения.

Следствие 9. *Для любых чисел* a, b, c

$$a(b - c) = ab - ac. \tag{1.6}$$

В самом деле,

$$a(b - c) = a(b - c) + ac - ac = a(b - c + c) - ac = ab - ac.$$

Следствие 10. *Для любого числа* a

$$a \cdot 0 = 0. \tag{1.7}$$

Действительно, возьмем какое-либо число b, тогда $b - b = 0$ (см. (1.4)), и согласно (1.6) получим $a \cdot 0 = a(b - b) = ab - ab = 0$*).

Следствие 11. *Для любых чисел* a *и* b

$$(-a)b = -ab, \tag{1.8}$$

$$(-a)(-b) = ab, \tag{1.9}$$

в частности, $(-1)a = -a$.

В самом деле,

$$(-a)b = (-a)b + ab - ab = (-a + a)b - ab = -ab. \tag{1.10}$$

Далее,

$$(-a)(-b) = -a(-b) = (-1)[a(-b)] = (-1)(-ab) = -(-ab) = ab.$$

Легко показать, что свойства II_1, II_2, III_1, III_2 и IV распространяются по индукции на любое конечное число членов. В качестве примера покажем, что для любых чисел a_1, a_2, ..., a_n ($n \geqslant 2$) и b

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)b = a_1 b + a_2 b + \ldots + a_n b. \tag{1.11}$$

В самом деле, при $n = 2$ эта формула справедлива согласно свойству IV. Пусть теперь (1.11) справедливо при $n = k$, покажем, что она будет справедлива и при $n = k + 1$.

---

*) Из следствия 10 вытекает, что утверждение $1 \neq 0$ при наличии других рассматриваемых свойств эквивалентно тому, что существует хоть одно число отличное от нуля. Очевидно, достаточно показать, что если существует число $a \neq 0$, то $1 \neq 0$. Действительно, если существует $a \neq 0$, то из равенств $a \cdot 1 = a$ следует, что $1 \neq 0$, так как в противном случае $a = 0$.

Применяя свойство II_2 для $k+1$ слагаемых (считая, что оно уже доказано), затем свойство IV, и используя предположение индукции, получим

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{k+1})\,b=[(a_1+\ldots+a_k)+a_{k+1}]\,b=$$
$$=(a_1+\ldots+a_k)\,b+a_{k+1}\,b=a_1\,b+\ldots+a_k\,b+a_{k+1}\,b.$$

Из формулы (1.11) в случае $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$ следует, что

$$nb=\underbrace{b+\ldots+b}_{n\text{ раз}},$$

т. е. что умножение числа на натуральное число n сводится к сложению этого числа n раз.

Для любого числа a число, обозначаемое $|a|$ и определяемое по формуле

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{если } a<0,\end{cases} \tag{1.12}$$

называется *абсолютной величиной* числа a.

Отметим ряд свойств абсолютной величины.

1. *Для любого числа* a

$$|a|\geqslant 0, \tag{1.13}$$
$$|a|=|-a|, \tag{1.14}$$
$$a\leqslant|a|,\quad -a\leqslant|a|. \tag{1.15}$$

В самом деле, если $a\geqslant 0$, то $|a|=a\geqslant 0$; если же $a<0$, то $|a|=-a>0$ (см. следствие 4). Неравенство (1.13) доказано.

Докажем равенство (1.14). Если $a\geqslant 0$, то $|a|=a$ и $-a\leqslant 0$, поэтому, согласно определению и равенству (1.1), получим $|-a|=-(-a)=a=|a|$. Если же $a<0$, то $|a|=-a$ и $-a>0$, поэтому $|-a|=a$. Равенство (1.14) доказано.

Докажем неравенства (1.15). Если $a\geqslant 0$, то $a=|a|$ и $-a\leqslant 0\leqslant a=|a|$, т. е. (1.15) выполняется; если же $a<0$, то $a<0<-a=|a|$, т. е. (1.15) также выполняется.

2. *Для любых чисел* a *и* b

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|, \tag{1.16}$$
$$||a|-|b||\leqslant|a-b|. \tag{1.17}$$

Докажем эти неравенства. Согласно (1.15),

$$a\leqslant|a|,\quad -a\leqslant|a|,$$
$$b\leqslant|b|,\quad -b\leqslant|b|.$$

Отсюда, согласно (1.2) и следствию 6,

$$a+b\leqslant|a|+|b|,\quad -(a+b)\leqslant|a|+|b|.$$

Одно из чисел $a + b$ и $-(a + b)$ неотрицательно и, значит, совпадает с $|a + b|$. Неравенство (1.16) доказано.

Неравенство же (1.17) является следствием (1.16). В самом деле,

$$|a| - |b| = |(a - b) + b| - |b| \leqslant |a - b| + |b| - |b| = |a - b|.$$

Аналогично

$$|b| - |a| \leqslant |a - b|.$$

Согласно следствию 4, $|b| - |a| = -(|a| - |b|)$. Одно из чисел $|a| - |b|$ или $-(|a| - |b|)$ совпадает с $||a| - |b||$.

Из сформулированных свойств I—IV вещественных чисел можно получить и другие хорошо известные свойства чисел, связанные с арифметическими операциями, например, правила арифметических действий с рациональными числами.

V. Свойство Архимеда

Каково бы ни было число a, существует такое целое число n, что $n > a$.

Отсюда вытекает, что, *каковы бы ни были два числа $a > 0$ и b, существует целое n, такое, что $na > b$, т. е., складывая числа a достаточно большое число раз, мы заведомо превзойдем число b*)*.

В самом деле, в силу условия $a \neq 0$ существует частное $\frac{b}{a}$, но тогда по свойству V найдется целое $n > \frac{b}{a}$, откуда $na > b$.

VI. Свойство непрерывности вещественных чисел

Совокупность вещественных чисел обладает еще так называемым свойством *непрерывности*, на которое, так же как и на свойство Архимеда, обычно не обращают особого внимания при изучении элементарной математики. Чтобы его сформулировать, введем следующие определения.

Если заданы два числа a и b, $a \leqslant b$, то совокупность всех чисел x, таких, что $a \leqslant x \leqslant b$, называется числовым *отрезком* и обозначается $[a, b]$. Число a называется левым, а число b правым концом отрезка $[a, b]$. В случае $a = b$ отрезок $[a, b]$ состоит из одной точки.

Система числовых отрезков

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

называется *системой вложенных отрезков* (рис. 1), если

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1.$$

*) Это свойство допускает наглядную геометрическую интерпретацию: если мы имеем два отрезка длины a и b, $0 < a < b$, то, откладывая последовательно меньший отрезок на большем, мы через конечное число шагов выйдем за пределы большего отрезка.

Принцип вложенных отрезков. *Для всякой системы вложенных отрезков существует хотя бы одно число, которое принадлежит всем отрезкам данной системы.*

Это свойство чисел называют также *непрерывностью множества вещественных чисел* в смысле Кантора*).

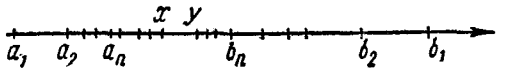


Рис. 1

Определение 1. *Пусть задана система отрезков* $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$. *Мы скажем, что длина отрезков* $[a_n, b_n]$ *стремится к нулю с возрастанием* $n = 1, 2, \ldots$, *если для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существует номер* n_ε, *такой, что для всех номеров* $n \geqslant n_\varepsilon$ *выполняется неравенство* $b_n - a_n < \varepsilon$.

Теорема 1. *Для всякой системы вложенных отрезков, по длине стремящихся к нулю, существует единственное число, принадлежащее всем отрезкам данной системы.*

Доказательство. Пусть $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$,— заданная система вложенных отрезков, по длине стремящихся к нулю. Предположим противное. Пусть существуют два различных числа x и y, принадлежащих всем отрезкам $[a_n, b_n]$ (см. рис. 1), т. е. $x \neq y$ и

$$a_n \leqslant x \leqslant b_n, \quad a_n \leqslant y \leqslant b_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Пусть для определенности $x < y$. Вычитая из неравенства $y \leqslant b_n$ неравенство $x \geqslant a_n$, получим

$$y - x \leqslant b_n - a_n.$$

Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует n_ε, такое, что при всех $n \geqslant n_\varepsilon$ справедливо неравенство $b_n - a_n < \varepsilon$ и, следовательно, $y - x < \varepsilon$. Полагая $\varepsilon = y - x$ (это возможно, поскольку из условия $x < y$ следует, что $y - x > 0$), получим $y - x < y - x$, что противоречиво. Следовательно, предположение о существовании двух различных чисел x и y, принадлежащих всем отрезкам $[a_n, b_n]$, неверно.

Теорема доказана.

Свойство непрерывности вещественных чисел повсеместно используется на практике. При измерении какой-либо физической величины (температуры тела, длины тела, силы тока и т. д.) мы всегда получаем с большей или меньшей точностью ее приближенные значения. Если в результате экспериментального измерения данной величины мы будем получать ряд значений, дающих значение иско-

*) Г. Кантор (1845—1918) — немецкий математик.

мой величины с недостатком или избытком, и если каждое последующее измерение будет проводиться с большей точностью, то мы получим некоторую последовательность вложенных отрезков. Свойство непрерывности вещественных чисел выражает собой объективную уверенность в том, что измеряемая величина имеет определенное значение, расположенное между ее приближенными значениями, вычисленными с недостатком и с избытком.

Следует отметить, что в отличие от свойств I—V, которые присущи не только всей совокупности вещественных чисел, но и, например, совокупности только одних рациональных чисел (в чем нетрудно убедиться), свойство VI, т. е. свойство непрерывности, является свойством, которым обладает множество всех вещественных чисел, но которое отсутствует у совокупности одних только рациональных чисел.

Например, если взять последовательность «рациональных отрезков»

$$[1; 2],\ [1{,}4; 1{,}5],\ [1{,}41; 1{,}42],\ [1{,}414; 1{,}415],\ \ldots,$$

т. е. последовательность множеств рациональных чисел, лежащих на отрезках, концы a_n и b_n, $n = 1, 2, \ldots$, которых суть значения $\sqrt{2}$, вычисленные соответственно с недостатком и с избытком с точностью $\frac{1}{10^n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$*), то, очевидно, не существует никакого рационального числа, принадлежащего всем этим отрезкам. В самом деле, таким числом могло быть только число $\sqrt{2}$ (почему?), которое, однако, не является рациональным.

Мы перечислили все характерные свойства множества вещественных чисел. Подытожим сказанное.

Вещественные числа представляют собой совокупность элементов, обладающую свойствами I—VI.

Для вдумчивого читателя заметим, что ссылка в начале параграфа на то, что вещественные числа и их свойства известны из курса элементарной математики, не является необходимой. Сформулированные выше свойства вещественных чисел можно взять за исходное определение. Именно, перефразируя подведенный итог наших рассмотрений, получим следующее определение.

Определение 2. *Множество элементов, обладающих свойствами I—VI, называется множеством вещественных чисел. Каждый элемент этого множества называется вещественным числом.*

Построение теории вещественных чисел, основывающееся на таком их определении, называется *аксиоматическим* (см. также замечание в конце п. 2.2 и 3.6), а свойства I — VI — аксиомами вещественных чисел.

*) Это означает, что $a_n^2 \leqslant 2 \leqslant b_n^2$ и $b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Геометрически множество вещественных чисел изображается направленной (ориентированной) прямой, а отдельные числа — точками этой прямой. Поэтому совокупность вещественных чисел часто называют *числовой прямой*, а отдельные числа — *точками*.

Имея в виду такое изображение вещественных чисел иногда вместо a меньше b (соответственно a больше b) говорят, что число a лежит левее числа b (соответственно, что a лежит правее b).

1.2. Обозначения

В дальнейшем нам придется иметь дело с различными совокупностями (множествами) тех или иных элементов (чисел, точек, функций и т. п.). Понятия *множества* и *элемента множества* являются первичными понятиями. Первичным понятием является также понятие *пустого множества*. Пустое множество не содержит элементов.

Запись $A = \{a, b, c, \ldots\}$ означает, что совокупность A состоит из элементов a, b, c, ...; подобным образом запись $A = \{x_\alpha\}$ обозначает, что совокупность A состоит из элементов x_α, где α — индекс, пробегающий некоторое множество, которое, конечно, в конкретных случаях всегда указывается. Запись

$$A = \{x: \ldots\}$$

означает, что совокупность A состоит из элементов, обладающих свойством, указанным после двоеточия в фигурных скобках. Например, если $a \leqslant b$, то определение числового отрезка $[a, b]$ запишется следующим образом:

$$[a, b] = \{x \quad a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Если $a < b$, то множество

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}$$

называется *интервалом*. Интервал (a, b) называется внутренностью отрезка $[a, b]$.

Числовые множества $[a, b) = \{x : a \leqslant x < b\}$, $(a, b] = \{x : a < x \leqslant b\}$ называются *полуотрезками*, или *полуинтервалами*.

Множества $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$ и $(a, b]$ называются *промежутками*, точки a и b называются концами, а все остальные их точки — внутренними точками.

Мы будем рассматривать также *бесконечные промежутки*, употребляя для их записи символы бесконечности: ∞, $+\infty$ и $-\infty$. При этом будем считать по определению, что для любого вещественного

числа x имеет место неравенство $-\infty < x < +\infty$. Это делает естественными, например, следующие обозначения:

$$(a, +\infty) = \{x : x > a\}, \quad (-\infty, b) = \{x : x < b\},$$
$$[a, +\infty) = \{x : x \geqslant a\}, \quad (-\infty, a] = \{x : x \leqslant a\},$$
$$(-\infty, +\infty) = \{x : -\infty < x < +\infty\}.$$

Эти множества и будем называть бесконечными промежутками.

Если элемент x принадлежит множеству A, то будем писать $x \in A$, если же x не принадлежит A, то $x \notin A$.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то будем говорить, что A является подмножеством множества B, и писать $A \subset B$ (читается: множество A содержится во множестве B), или, что то же, $B \supset A$ (читается: множество B содержит множество A).

Пусть даны два множества A и B. Совокупность всех элементов, каждый из которых принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B, называется их *объединением*, или их *суммой* и обозначается $A \cup B$.

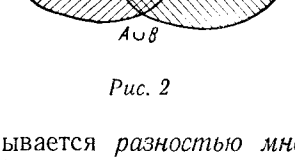


Рис. 2

Совокупность всех элементов, каждый из которых принадлежит и множеству A и множеству B, называется их *пересечением* и обозначается $A \cap B$.

Совокупность всех элементов, каждый из которых принадлежит множеству A, но не принадлежит множеству B, называется *разностью множеств* A и B и обозначается $A \setminus B$ (рис. 2).

Кратко эти определения можно записать следующим образом:

$$A \cup B =$$
$$= \{x : x \text{ принадлежит по крайней мере одному из множеств } A \text{ и } B\};$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\};$$
$$A \setminus B = \{x : x \in A, \ x \notin B\}.$$

Если задана система множеств $\{A_\alpha\}$, то их объединение $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ и пересечение $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ определяются соответственно по формулам

$$\bigcup_\alpha A_\alpha =$$
$$= \{x : x \text{ принадлежит по крайней мере одному из множеств } A_\alpha\};$$
$$\bigcap_\alpha A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha \text{ при всех } \alpha\}.$$

§ 2. ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ГРАНИ МНОЖЕСТВ

2.1. Свойства верхних и нижних граней множеств

Определение 1. *Множество M вещественных чисел называется ограниченным сверху (соответственно ограниченным снизу) числом a, если для всякого числа $x \in M$ выполняется неравенство $x \leqslant a$ (соответственно $x \geqslant a$). При этом говорят, что число a ограничивает сверху (снизу) множество M. Множество, ограниченное сверху (соответственно снизу) некоторым числом, называется ограниченным сверху (снизу) множеством.*

Определение 2. *Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется просто ограниченным множеством.*

Другими словами, *множество M называется ограниченным, если существуют такие числа a и b, что $a \leqslant x \leqslant b$ для любого $x \in M$.*

Множество, не являющееся ограниченным (сверху, снизу), называется *неограниченным* (сверху, снизу).

Примеры ограниченных множеств дают отрезок $[1; 2]$, интервал $(0; 1)$, множество значений функции $\sin x$. Бесконечный интервал $(-5, +\infty)$, множество натуральных чисел 1, 2, 3, ... являются множествами, ограниченными снизу, но не ограниченными сверху. Наконец, множество всех целых чисел, всех рациональных чисел суть множества, не ограниченные как сверху, так и снизу.

Покажем в дальнейшем, что среди всех чисел, ограничивающих сверху (снизу) данное множество (если, конечно, такие числа для рассматриваемого множества существуют), есть наименьшее (наибольшее). Такое число называется верхней (нижней) гранью множества.

Дадим точное определение верхней (нижней) грани.

Определение 3. *Пусть задано множество M. Число a называется верхней гранью (нижней гранью) множества M, если:*

1) *a не меньше (не больше) любого $x \in M$:*

$$x \leqslant a \ (x \geqslant a);$$

2) *для любого $a' < a$ (соответственно $a' > a$) существует по крайней мере одно $x_{a'} \in M$, такое, что $x_{a'} > a'$ (соответственно $x_{a'} < a'$).*

Значок a' у числа $x \in M$ означает, что число $x_{a'}$ зависит от выбора a'.

Верхняя грань множества M обозначается $\sup M$ или $\sup\limits_{x \in M} x$, а нижняя грань соответственно $\inf M$ или $\inf\limits_{x \in M} x$.

Очевидно, что если для некоторого множества существует верхняя (нижняя) грань, то это множество ограничено сверху (снизу).

Это сразу следует из свойства 1 определения верхней (нижней) грани множества.

Условие 2 в определении верхней (нижней) грани множества эквивалентно условию:

2′) *каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *существует такое* $x_\varepsilon \in M$, *что* $x_\varepsilon > a - \varepsilon$ (*соответственно* $x_\varepsilon < a + \varepsilon$).

Чтобы убедиться в равносильности условий 2 и 2′, достаточно положить $\varepsilon = a - a'$ (соответственно $\varepsilon = a' - a$).

Приведем примеры, иллюстрирующие понятия верхней и нижней грани множеств. Если $M = [a, b]$, то $\inf M = a$, $\sup M = b$. Если $M = (a, b)$, то также $\inf M = a$, $\sup M = b$. Если M состоит из двух точек a и b, $a \leqslant b$, т. е. $M = \{a\} \cup \{b\}$, то снова $\inf M = a$, $\sup M = b$.

Приведенные примеры, в частности, показывают, что верхняя (нижняя) грань множества может как принадлежать самому множеству, так и не принадлежать ему.

Определение 4. *Пусть задано множество* M. *Если существует такой элемент* $x_0 \in M$, *что* $x \leqslant x_0$ (*соответственно* $x \geqslant x_0$) *для всех* $x \in M$, *то* x_0 *называется наибольшим, или максимальным* (*соответственно наименьшим, или минимальным*), *элементом множества* M *и пишется* $x_0 = \max M$ (*соответственно* $x_0 = \min M$).

Очевидно, что если в множестве M существует наибольший (наименьший) элемент x_0, то $x_0 = \sup M$ (соответственно $x_0 = \inf M$).

Дадим еще одно определение верхней и нижней граней множества.

Определение 5. *Пусть задано множество* M. *Пусть* B — *множество всех чисел, ограничивающих сверху* (*снизу*) *множество* M. *Наименьший* (*наибольший*) *элемент множества* B *называется верхней* (*нижней*) *гранью множества* M.

Определение 5 является, по существу, простой перефразировкой определения 3. Действительно, условие $a \in B$ означает, что a ограничивает сверху множество M, т. е. означает выполнение условия 1 определения 1. Условие, что a является минимальным элементом множества B, означает, что любое число $a' < a$ не ограничивает сверху множество M, т. е. что найдется такой элемент $x \in M$, что $x > a'$. Это и есть условие 2 определения 1.

Аналогично показывается равносильность определений для нижней грани.

Для множества M, не ограниченного сверху (снизу), никакое число не может являться верхней (нижней) гранью, и мы будем считать по определению верхнюю грань равной $+\infty$ и писать $\sup M = +\infty$ (для множества, не ограниченного снизу, $\inf M = -\infty$). Если, как указывалось выше, формально считать, что, каково бы ни было число a, для символа $+\infty$ (соответственно символа $-\infty$) имеет место соотношение порядка $a < +\infty$ (соответственно

$-\infty < a$), то определение $\sup M = +\infty$ ($\inf M = -\infty$) удовлетворяет условиям 1 и 2 определения верхней (нижней) грани. Если верхняя (нижняя) грань множества является числом, то говорят, что она конечна, если же она является символом $+\infty$ (соответственно $-\infty$), то говорят, что она бесконечна.

Первый вопрос, который естественно возникает после определения понятия верхней (нижней) грани, состоит в следующем: всегда ли существует верхняя (нижняя) грань множества. Если множество не ограничено сверху (снизу), то этот вопрос решается просто: в этом случае мы, как это было отмечено выше, по определению считаем верхнюю (нижнюю) грань равной $+\infty$ (соответственно $-\infty$). Если же множество ограничено сверху (снизу), то ответ на вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. *Всякое ограниченное сверху непустое множество вещественных чисел имеет конечную верхнюю грань, а всякое ограниченное снизу — нижнюю грань.*

Доказательство. Пусть M — непустое, ограниченное сверху множество. Это означает, во-первых, что существует по крайней мере один элемент $a \in M$, и, во-вторых, что существует такое число b, что $x \leqslant b$ для всех элементов $x \in M$. Отрезок $[a, b]$ содержит хотя бы одну точку множества M, например, точку a. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам, т. е. рассмотрим два отрезка $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Первый из них назовем левым, а второй — правым отрезком. Если правый отрезок содержит хоть одну точку множества M, то мы обозначим его $[a_1, b_1]$; если же не содержит, то мы обозначим через $[a_1, b_1]$ левый отрезок. Таким образом, в обоих случаях $[a_1, b_1]$ содержит точки множества M, и все множество M расположено левее точки b_1, т. е. $x \leqslant b_1$ для всех $x \in M$. Из отрезка $[a_1, b_1]$ аналогичным образом получим отрезок $[a_2, b_2]$ и т. д.

Пусть мы получили отрезок $[a_n, b_n]$, разделим его на два равных отрезка. Если правый из получившихся отрезков содержит хоть одну точку множества M, то мы обозначим его $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, если же не содержит, то через $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ мы обозначим левый отрезок. В результате этого процесса мы получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, длины которых $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ стремятся к нулю при возрастании n.

Действительно, для всякого $\varepsilon > 0$, согласно свойству Архимеда, найдется такое натуральное n_0, что для всех натуральных $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $n > \frac{b-a}{\varepsilon}$, и, следовательно, $\frac{b-a}{n} < \varepsilon$.

Замечая, что $2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \ldots > n$, получим

$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому для всех $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство

$$\frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n} < \varepsilon.$$

Это и означает стремление к нулю длин отрезков $[a_n, b_n]$ при возрастании n.

Эта последовательность отрезков обладает следующими свойствами:

а) $x \leqslant b_n$ для любого $n = 1, 2, \ldots$ и любого элемента $x \in M$, т. е. все множество M расположено левее правого конца любого отрезка $[a_n, b_n]$ полученной системы;

б) любой отрезок $[a_n, b_n]$ содержит хоть одну точку множества M.

В силу принципа вложенных отрезков существует и притом единственная точка β, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$. Покажем что $\beta = \sup M$. Для этого докажем сначала, что $x \leqslant \beta$ для любого $x \in M$.

Допустим противное: пусть существует $x_0 \in M$, такое, что $x_0 > \beta$ (рис. 3). Из условия, что длина $b_n - a_n$ стремится к нулю при возрастании $n = 1, 2, \ldots$, следует, что существует такое n_0,

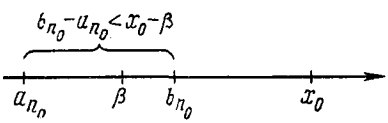


Рис. 3

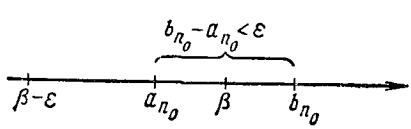


Рис. 4

что $b_{n_0} - a_{n_0} < x_0 - \beta$, отсюда $b_{n_0} < x_0 - (\beta - a_{n_0})$; так как $\beta \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$, то $\beta - a_{n_0} \geqslant 0$, и поэтому $x_0 - (\beta - a_{n_0}) \leqslant x_0$. Следовательно, $b_{n_0} < x_0$. Это противоречит свойству а), и, значит, указанного x_0 не может существовать.

Докажем теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $x_\varepsilon \in M$, что $x_\varepsilon > \beta - \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Выберем n_0 так, чтобы $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$ (рис. 4). Тогда, согласно свойству б), существует $x \in M$, такое, что $x \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$. По только что доказанному $x \leqslant \beta$. Таким образом,

$$a_{n_0} \leqslant x \leqslant \beta \leqslant b_{n_0}.$$

Из этого следует, что $\beta - x \leqslant b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$ и, значит, $x > \beta - \varepsilon$.

Итак, мы доказали, что $\beta = \sup M$.

Для доказательства существования конечной нижней грани у ограниченного снизу множества M достаточно заметить, что в этом случае множество M^* всех чисел $-x$, где $x \in M$, является ограниченным сверху множеством и $\inf M = -\sup M^*$ (почему?).

Теорема 1 доказана.

Будет ли единственной верхняя (нижняя) грань множества? Ответ на этот вопрос, естественно возникающий при изучении понятия верхней (нижней) грани, оказывается положительным.

Теорема 2. *У всякого числового множества верхняя (нижняя) грань единственна.*

Допустим противное. Пусть существует множество M, у которого по крайней мере две различные верхние грани a и a'. Пусть для определенности $a' < a$ (при этом не исключается и случай $a = +\infty$). Согласно определению верхней грани, из того, что $a = \sup M$ и $a' < a$, следует существование такого $x_{a'} \in M$, что $x_{a'} > a'$. Это противоречит тому, что $a' = \sup M$. Единственность верхней грани доказана. Аналогично доказывается единственность нижней грани.

Рис. 5

Замечание. Пусть $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, — система вложенных отрезков, по длине стремящихся к нулю при возрастании n. Согласно принципу вложенных отрезков, существует единственная точка ξ, являющаяся общей точкой всех отрезков данной системы (рис. 5).

Покажем, что

$$\xi = \sup_{n=1, 2, \ldots} \{a_n\} = \inf_{n=1, 2, \ldots} \{b_n\}.$$

Из условия $\xi \in [a_n, b_n]$ следует, что $\xi \geqslant a_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Из условия же, что длина отрезков $[a_n, b_n]$ стремится к нулю, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что $b_{n_\varepsilon} - a_{n_\varepsilon} < \varepsilon$, и так как $\xi - a_{n_\varepsilon} < b_{n_\varepsilon} - a_{n_\varepsilon}$, то $\xi - a_{n_\varepsilon} < \varepsilon$, или $a_{n_\varepsilon} > \xi - \varepsilon$. Таким образом, оба требования 1 и 2 определения верхней грани выполнены и, значит, $\xi = \sup\limits_{n=1, 2, \ldots} \{a_n\}$.

Аналогично доказывается, что $\xi = \inf\limits_{n=1, 2, \ldots} \{b_n\}$.

Упражнения. 1. Пусть заданы числовые множества X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ и пусть

$$X = \{x : x = x_1 + \ldots + x_n, \quad x_i \in X_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Доказать, что

$$\sup X = \sum_{i=1}^{n} \sup X_i.$$

2. Пусть заданы два числовых множества X и Y и пусть $Z = \{z : z = x - y, \ x \in X, \ y \in Y\}$. Доказать, что $\sup Z = \sup Y - \inf X$.

2.2. Сечения в множестве вещественных чисел

Рассмотрим разбиения вещественных чисел на два класса, обладающих определенными свойствами и называемых сечениями. Дадим их определение.

Определение 6. *Два множества вещественных чисел A и B называются сечением множества вещественных чисел, если:*

1) *каждый из классов A и B не пуст;*

2) *каждое вещественное число принадлежит одному из классов A и B;*

3) *если $a \in A$, $b \in B$, то $a < b$.*

Сечение множества вещественных чисел обозначается A/B. Класс A называется нижним, класс B — верхним.

Из 3 следует, что множества A и B не пересекаются. Каждое число α естественным образом производит сечение множества вещественных чисел следующим образом. В класс A входят все числа, меньшие α, а в класс B — все числа, большие α. Само же число α можно отнести либо к классу A, либо к классу B.

Таким образом, мы будем говорить, что *число α производит сечение A/B*, если $a \leqslant \alpha \leqslant b$ для всех $a \in A$ и всех $b \in B$.

Естественно возникает вопрос: всякое ли сечение в множестве вещественных чисел производится некоторым числом? Оказывается, что да; именно справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Всякое число определяет сечение множества вещественных чисел и для всякого сечения в множестве вещественных чисел существует число α, которое производит данное сечение. Это число α является либо наибольшим в нижнем классе (тогда в верхнем классе нет наименьшего), либо наименьшим в верхнем классе (тогда в нижнем классе нет наибольшего).*

Свойство вещественных чисел, выражаемое утверждением этой теоремы, часто называют принципом Дедекинда непрерывности числовой прямой.

То, что всякое число производит сечение, показано выше. Докажем второе утверждение теоремы.

Пусть A/B — некоторое сечение множества вещественных чисел. Согласно определению сечения, если x есть произвольный элемент множества A и y — произвольный элемент множества B, то $x < y$. Таким образом, множество A ограничено сверху и $\sup A \leqslant y$ для всех $y \in B$. Откуда в свою очередь следует, что множество B ограничено снизу и $\sup A \leqslant \inf B$. Случай $\sup A < \inf B$ невозможен, так как тогда нашлось бы число ξ, например $\xi = \frac{\sup A + \inf B}{2}$, такое, что $\sup A < \xi < \inf B$. Это число ξ не принадлежало бы ни к классу A, ни к классу B, что невозможно в силу определения понятия сечения.

Таким образом, $\sup A = \inf B$ и число $\alpha = \sup A = \inf B$ производит сечение A/B. Возможны два случая: либо $\alpha \in A$, либо $\alpha \in B$. В первом случае α является наибольшим числом в классе A, а в классе B нет наименьшего (почему?), а во втором случае α является наименьшим в классе B, а в классе A нет наибольшего (почему?).

Теорема доказана.

Замечание. В заключение отметим, что непрерывность множества вещественных чисел в смысле Кантора (принцип вложенных отрезков), принцип непрерывности Дедекинда и теорема о существовании конечной верхней грани ограниченного сверху множества, играющие фундаментальную роль при построении основ математического анализа, эквивалентны между собой: из любого из них, принятого за аксиому, вытекают два остальных утверждения.

Заметим также, что эти свойства характеризуют именно совокупность всех вещественных чисел. Например, можно показать, что для множества рациональных чисел аналоги этих свойств уже не имеют места (см. также замечание в конце п. 3.6).

Задача 1. Доказать с помощью сечений, что для любого числа $a > 0$ и любого натурального n существует $\sqrt[n]{a}$, т. е. существует такое число b, что $b^n = a$.

§ 3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

3.1. Определение предела последовательности и некоторые его свойства

Определение 1. *Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое вещественное число a_n (при этом разным натуральным числам n могут оказаться поставленными в соответствие и одинаковые числа). Совокупность элементов a_n, $n = 1, 2, \ldots$, называется числовой последовательностью, или просто последовательностью; каждый элемент a_n называется элементом этой последовательности, а число n — его номером.*

Числовую последовательность с элементами a_n будем обозначать либо a_n, $n = 1, 2, \ldots$, либо $\{a_n\}$.

По самому определению последовательность всегда содержит бесконечное множество элементов.

Определение 2. *Число a называется пределом данной последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε *), что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство*

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

*) Запись n_ε подчеркивает, что n_ε зависит от ε.

При этом пишут

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{или} \quad a_n \to a \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Последовательность, у которой существует предел, называется сходящейся.

Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется расходящейся.

Отметим, что неравенство (3.1) равносильно неравенству

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Определение 3. *Для заданного числа x всякий интервал вида $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε-окрестностью, или просто окрестностью, числа (точки) x на числовой прямой и обозначается $O(x, \varepsilon)$ или $O(x)$.*

С помощью понятия окрестности определение предела последовательности можно перефразировать следующим образом.

Определение 2′. *Число a является пределом последовательности $\{a_n\}$, если в любой его окрестности содержатся почти все члены последовательности, т. е. все члены последовательности, за исключением их конечного числа.*

Примеры. 1. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ сходится и имеет своим пределом ноль. В самом деле, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, по свойству Архимеда (см. свойство V в п. 1.1) вещественных чисел существует такое натуральное число n_ε, что $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому $0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Последовательность $\left\{\sin \frac{\pi}{2} n\right\}$ является расходящейся. В самом деле, каково бы ни было число a, вне его ε-окрестности, например при $0 < \varepsilon < 1$, заведомо лежит бесконечное число членов данной последовательности, и, значит, оно не является ее пределом.

3. Последовательность $\left\{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2} n\right\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2} n = 0$, что следует (почему?) из того, что

$$\left|\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2} n\right| \leqslant \frac{1}{n},$$

и того, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

4. Последовательность $\{n\}$ расходится, что легко устанавливается, например, аналогично примеру 2.

В примерах 2 и 4 при доказательстве расходимости последовательности целесообразно использовать не негативное определение этого понятия, т. е. определение, состоящее из отрицания (расходящаяся последовательность не сходится), а *позитивное*, т. е. утверждающее наличие каких-то свойств (тем самым в позитивном определении отсутствуют слова «не», «нет», «нельзя» и т. п.).

Поясним это на примере позитивного определения того, что некоторое число не является пределом данной последовательности.

Определение 4. *Число a не является**) *пределом последовательности $\{a_n\}$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для всякого натурального n существует такое натуральное $m_n > n$***, *что* $|a - a_{m_n}| \geqslant \varepsilon$.

Упражнения. 1. Сформулировать позитивное определение того, что данная последовательность расходится.

2. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Теорема 1. *Числовая последовательность не может иметь более одного предела.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть существует последовательность $\{a_n\}$, у которой имеется по крайней мере два различных предела a и b, и пусть для определенности $a < b$.

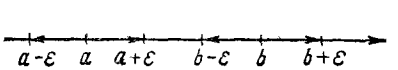


Рис. 6

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы окрестности $O(a, \varepsilon)$ и $O(b, \varepsilon)$ не пересекались (рис. 6). Например, можно взять $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Существует такой номер n_1, что $a_n \in O(a, \varepsilon)$ для всех $n \geqslant n_1$, и существует такой номер n_2, что $a_n \in O(b, \varepsilon)$ для всех $n \geqslant n_2$. Обозначим через n_0 наибольший из номеров n_1 и n_2, тогда $a_n \in O(a, \varepsilon)$ и $a_n \in O(b, \varepsilon)$ для любого $n \geqslant n_0$, что невозможно в силу того, что указанные окрестности не пересекаются.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Отметим три полезных свойства сходящихся последовательностей.

I. *Если*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

---

*) Следует обратить внимание, что здесь частица «не» входит не в определение, а в определяемое понятие.

**) Индекс n у числа m_n показывает, что это число зависит от числа n.

и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

то последовательность $\{b_n\}$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Доказательство. Пусть зафиксировано $\varepsilon > 0$. Существуют такие n'_ε и n''_ε, что при $n \geqslant n'_\varepsilon$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

а при $n \geqslant n''_\varepsilon$

$$a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon.$$

Обозначим через n_ε наибольший из номеров n'_ε и n''_ε. Тогда для всех $n \geqslant n_\varepsilon$

$$a - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant a + \varepsilon.$$

Отсюда в силу (3.2) при $n \geqslant n_\varepsilon$

$$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

II. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $a < b$ (*соответственно* $a > c$), *то существует такое* n_b (*соответственно* n_c), *что* $a_n < b$ *при* $n \geqslant n_b$ ($a_n > c$ *при* $n \geqslant n_c$).

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = b - a$. В силу определения предела, существует такой номер n_b, что при $n \geqslant n_b$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon = b.$$

Первое утверждение доказано. Аналогично рассматривается и случай $a > c$.

III. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $a_n \geqslant b$ (*соответственно* $a_n \leqslant c$), $n = 1, 2, \ldots$, *то и* $a \geqslant b$ (*соответственно* $a \leqslant c$).

Доказательство. Если бы было $a < b$, то, согласно свойству II, найдется такое a_n, что $a_n < b$, но это противоречит условию. Аналогично разбирается случай $a_n \leqslant c$.

3.2. Пределы монотонных последовательностей

Следует различать *последовательность*, т. е. множество ее элементов, и *множество значений ее элементов*. Первое множество всегда бесконечно, так как состоит из совокупности элементов, отличающихся по крайней мере номерами $n = 1, 2, \ldots$. Второе множество состоит из всех чисел, являющихся значениями элементов

данной последовательности, оно может быть и конечным. Например, для последовательности $a_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, сама последовательность, как и всякая последовательность, состоит из бесконечного числа элементов, а множество значений ее элементов состоит из одного числа 1.

Определение 5. *Последовательность называется ограниченной сверху (снизу), если множество значений ее элементов ограничено сверху (снизу).*

В терминах элементов последовательности это определение может быть перефразировано следующим образом.

Определение 5′. *Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число b, что $a_n \leqslant b$ (соответственно $a_n \geqslant b$) для всех номеров n.*

Определение 6. *Последовательность, ограниченная сверху и снизу, называется просто ограниченной.*

Определение 7. *Последовательность, не являющаяся ограниченной (сверху, снизу), называется неограниченной (сверху, снизу).*

Очевидно, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда существует такое число b, что $|a_n| \leqslant b$ для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$.

Например, последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\sin \frac{\pi}{2} n\right\}$ ограничены. Последовательность $\{n\}$ ограничена снизу, но не ограничена сверху, а последовательность $\left\{n \sin \frac{\pi}{2} n\right\}$ является неограниченной.

Теорема 2. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть дана сходящаяся последовательность $\{a_n\}$ и пусть $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Зафиксируем, например, $\varepsilon = 1$. Согласно определению предела последовательности, существует такое n_1, что $|a_n - a| < 1$ для всех $n \geqslant n_1$.

Пусть d — наибольшее из чисел $1, |a_1 - a|, \ldots, |a_{n_1 - 1} - a|$. Тогда $|a_n - a| \leqslant d$ для всех n, т. е. $a - d \leqslant a_n \leqslant a + d$ для всех n. Это и означает ограниченность заданной последовательности.

Определение 8. *Верхняя (нижняя) грань множества значений элементов последовательности $\{a_n\}$ называется верхней (нижней) гранью данной последовательности и обозначается* $\sup \{a_n\}$ *или* $\sup\limits_{n=1,2,\ldots} a_n$ *(соответственно* $\inf \{a_n\}$ *или* $\inf\limits_{n=1,2,\ldots} a_n$*).*

Если верхняя (нижняя) грань является числом, то это определение можно сформулировать следующим образом.

Число a является верхней (нижней) гранью последовательности a_n, $n = 1, 2, \ldots$, если: 1) $a_n \leqslant a$ (соответственно $a_n \geqslant a$)

для всех n; 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что $a_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$ (соответственно $a_{n_\varepsilon} < a + \varepsilon$).

В аналогичной формулировке можно дать определение верхней (нижней) грани последовательности в случае, когда указанная грань бесконечна. (Сделайте это.)

В качестве примеров отметим, что $\sup\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1$, $\inf\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$, $\sup\{n\} = +\infty$, $\inf\{n\} = 1$.

Определение 9. *Последовательность a_n, $n = 1, 2, \ldots$, называется монотонно возрастающей (монотонно убывающей), если $a_n \leqslant a_{n+1}$ (соответственно $a_n \geqslant a_{n+1}$) для всех n.*

Монотонно возрастающие и монотонно убывающие последовательности называются просто монотонными.

Например, последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ монотонно убывает, последовательность $\{n\}$ монотонно возрастает, а последовательность $\left\{\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ не является монотонной.

Теорема 3. *Всякая ограниченная сверху (снизу) монотонно возрастающая (монотонно убывающая) последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, причем* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$).

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. В силу последнего условия она имеет конечную верхнюю грань $\sup\{a_n\} = a$. Покажем, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из того что $a = \sup\{a_n\}$, следует, что $a_n \leqslant a$ для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$, и существует такой номер n_ε, что $a_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$. Тогда в силу монотонности заданной последовательности для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ имеем $a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leqslant a_n \leqslant a$. Поэтому $|a - a_n| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$, что и означает, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Аналогично доказывается существование предела для ограниченной снизу монотонно убывающей последовательности.

Мы видели, что если последовательность сходится, то она ограничена (теорема 2), отсюда, в частности, следует, что если монотонно возрастающая последовательность сходится, то она ограничена сверху; с другой стороны, если монотонно возрастающая последовательность ограничена сверху, то она сходится (теорема 3). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие. *Для того чтобы монотонно возрастающая последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху.*

Аналогичное утверждение справедливо и для монотонно убывающей последовательности.

Замечание. Если $[a_n, b_n]$ — система вложенных отрезков, по длине стремящихся к нулю, а ξ — точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы, то

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{3.3}$$

В самом деле, в конце п. 2.1 было показано, что $\xi = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$. С другой стороны, последовательность $\{a_n\}$ (соответственно $\{b_n\}$) монотонно возрастает (убывает), откуда и следует (3.3).

Пример. *Число e.*

Пусть $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Покажем, что эта последовательность сходится.

Раскрывая скобки согласно правилу бинома Ньютона, получим

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots 1}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{3.4}$$

Поскольку при переходе от n к $n+1$ число слагаемых, которые все положительны, возрастает и, кроме того, каждое слагаемое увеличивается:

$$1-\frac{s}{n} < 1-\frac{s}{n+1}, \quad s = 1, 2, \ldots, n-1$$

то

$$x_n < x_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Далее, замечая, что в (3.4) каждая из скобок вида $\left(1-\frac{s}{n}\right)$ меньше единицы и $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$, получим

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Геометрическая прогрессия $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$ при любом $n=1, 2, \ldots$ имеет сумму (которую легко подсчитать по известной из элементарной математики формуле), меньшую единицы, поэтому окончательно

$$2<x_n<3. \tag{3.5}$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, а значит, согласно теореме 3, имеет предел. Этот предел и обозначается буквой e. Из (3.4) и (3.5) следует (см. III в п. 3.1), что

$$2<e\leqslant 3.$$

Более точными оценками можно получить, что

$$e=2{,}718\ldots.$$

Доказывается также, что число e иррационально и, более того, трансцендентно, т. е. не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами.

Число e в математическом анализе играет особую роль. Оно, в частности, является основанием натуральных логарифмов.

3.3. Теорема Больцано—Вейерштрасса и критерий Коши

Определение 10. *Последовательность* b_k, $k=1, 2, \ldots$, *называется подпоследовательностью последовательности* $\{a_n\}$, *если для любого* k *существует такое натуральное* n_k, *что* $b_k=a_{n_k}$, *причем* $n_{k_1}<n_{k_2}$, *тогда и только тогда, когда* $k_1<k_2$. *Последовательность* $\{b_k\}$ *обозначается в этом случае также* $\{a_{n_k}\}$ *или* a_{n_k}, $k=1, 2, \ldots$.

Иначе говоря, если дана какая-либо последовательность и из некоторого подмножества ее элементов образована новая последовательность, то она называется *подпоследовательностью исходной последовательности*, если порядок следования в ней элементов такой же, как и в данной последовательности.

Так, последовательность $1, 3, 5, \ldots, 2n+1, \ldots$ является, а последовательность $2, 1, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ не является подпоследовательностью натурального ряда чисел $1, 2, \ldots, n, \ldots$. В обоих случаях элементы последовательностей образуют подмножество*) множества натуральных чисел, но в первом случае члены последовательности расположены в том же порядке, как в натуральном ряде чисел, а во втором случае этот порядок нарушен.

*) Само множество также считается своим подмножеством.

Упражнение 3. Доказать, что 1) если последовательность имеет предел, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел; 2) отбрасывание или замена конечного числа членов последовательности не влияют на сходимость последовательности, причем в случае сходящейся последовательности не влияют и на величину предела.

Теорема 4 (***Больцано — Вейерштрасс****[*]). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т. е. существует такой отрезок $[a, b]$, что $a \leqslant x_n \leqslant b$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Разделим отрезок $[a, b]$ на два равных отрезка. По крайней мере один из получившихся отрезков содержит бесконечно много элементов данной последовательности. Обозначим его через $[a_1, b_1]$. Пусть x_{n_1} — какой-либо из членов данной последовательности, лежащий на отрезке $[a_1, b_1]$.

Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ на два равных отрезка; снова хоть один из получившихся двух отрезков содержит бесконечно много членов исходной последовательности, обозначим его через $[a_2, b_2]$. В силу того, что на отрезке $[a_2, b_2]$ бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, найдется такой член x_{n_2}, что $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ и $n_2 > n_1$. Продолжая этот процесс, получим последовательность отрезков $[a_n, b_n]$ и последовательность точек $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots$. В силу построения последовательность $\{x_{n_k}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$. Покажем, что эта подпоследовательность сходящаяся.

Последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, является последовательностью вложенных отрезков, по длине стремящихся к нулю, так как $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k} \to 0$ при $k \to \infty$. Согласно лемме Кантора (см. п. 1.1), существует единственная точка ξ, принадлежащая всем этим отрезкам. Как мы видели (см. замечание к теореме 3), $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \xi$, но $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$, $k = 1, 2, \ldots$,

поэтому в силу свойства 1 (см. п. 3.1) сходящихся последовательностей последовательность $\{x_{n_k}\}$ также сходится и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$.

Таким образом, теорема доказана.

Определение 11. *Предел любой сходящейся подпоследовательности данной последовательности называется ее частичным пределом.*

---

*) К. Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик. Б. Больцано (1781—1848) — чешский математик.

Теорема Больцано — Вейерштрасса утверждает, что *всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.*

Упражнение 4. Для того чтобы последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и имела единственный частичный предел.

До сих пор не было дано достаточно общего критерия, с помощью которого можно было бы узнать, сходится ли данная последовательность. Само определение сходящейся последовательности для этого мало удобно, так как в него входит значение предела, которое может быть и неизвестным. Поэтому желательно иметь такой критерий для определения сходимости и расходимости последовательностей, который базировался бы только на свойствах элементов данной последовательности. Нижеследующая теорема 5 и дает как раз подобный критерий.

Определение 12. *Будем говорить, что последовательность* $\{x_n\}$ *удовлетворяет условию Коши* *), *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* n_ε, *что для всех номеров* n *и* m, *удовлетворяющих условию* $n \geqslant n_\varepsilon$, $m \geqslant n_\varepsilon$, *справедливо неравенство*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \text{ **)}. \tag{3.6}$$

Условие (3.6) можно сформулировать и таким образом.

Для любого $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* n_ε, *что для всех номеров* $n \geqslant n_\varepsilon$ *и всех целых положительных* p

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \tag{3.7}$$

Для того чтобы убедиться в равносильности условий (3.6) и (3.7), достаточно положить $p = n - m$, если $n \geqslant m$, и $p = m - n$, если $m > n$.

Теорема 5 (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

Доказательство необходимости условия Коши. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Зададим $\varepsilon > 0$; тогда, согласно определению предела последовательности, существует такое n_ε, что $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ для $n \geqslant n_\varepsilon$.

---

*) О. Коши (1789—1857) — французский математик.

**) Последовательности, удовлетворяющие условию Коши, называются также *фундаментальными последовательностями.*

Пусть теперь $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$, тогда

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. выполняется условие Коши.

Доказательство достаточности условия Коши. Пусть последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε, что если $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$, то $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Возьмем, например, $\varepsilon = 1$, тогда существует такое n_1, что $|x_n - x_m| < 1$ при $n \geqslant n_1$ и $m \geqslant n_1$. В частности, если $n \geqslant n_1$ и $m = n_1$, то $|x_n - x_{n_1}| < 1$, т. е. $x_{n_1} - 1 < x_n < x_{n_1} + 1$ при $n \geqslant n_1$. Это и значит, что последовательность x_n, $n = n_1, n_1 + 1, \ldots$, ограничена. Поэтому в силу теоремы 4 существует ее сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n_k} = a$. Покажем, что вся данная последовательность $\{x_n\}$ также сходится и имеет пределом число a.

Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда, во-первых, по определению предела последовательности существует такое k_ε, что

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.8}$$

для всех $k \geqslant k_\varepsilon$. Причем, согласно определению подпоследовательности, неравенство (3.8) выполняется для всех $n_k \geqslant n_{k_\varepsilon}$. Во-вторых, так как последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, то существует такое n_ε, что

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $m \geqslant n_\varepsilon$.

Положим $N_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$ и зафиксируем некоторое $n_k \geqslant N_\varepsilon$. Тогда для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ получим

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leqslant$$

$$\leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а это и доказывает, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Теорема доказана.

Упражнения. 5. Сформулировать позитивные (без отрицаний) необходимые и достаточные условия, аналогичные условию Коши, для того чтобы данная последовательность не имела предела.

6. Доказать, что для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое n_ε, что $|x_n - x_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$.

3.4. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение 13. *Пусть заданы последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$; *суммой, разностью и произведением этих последовательностей называются соответственно последовательности* $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$ *и* $\{x_n y_n\}$. *Если* $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *то частным от деления последовательности* $\{x_n\}$ *на последовательность* $\{y_n\}$ *называется последовательность* $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$. *Наконец, произведением последовательности* $\{x_n\}$ *на число* c *называется последовательность* $\{cx_n\}$.

Определение 14. *Последовательность* $\{\alpha_n\}$ *называется бесконечно малой последовательностью, если* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Мы уже встречались в п. 3.1 с бесконечно малыми последовательностями $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\alpha_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2} n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Отметим несколько свойств бесконечно малых последовательностей.

I. *Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Покажем, что и последовательности $\{\alpha_n + \beta_n\}$ и $\{\alpha_n - \beta_n\}$ являются также бесконечно малыми. Зададим $\varepsilon > 0$, тогда существует (почему?) такой номер n_ε, что $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$. Поэтому для $n \geqslant n_\varepsilon$ имеем

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n \pm \beta_n) = 0$.

Соответствующее утверждение для любого конечного числа слагаемых следует из доказанного по индукции.

Задача 2. Определив сумму бесконечного числа занумерованных слагаемых (обобщающую понятие суммы конечного числа слагаемых), а затем сумму бесконечного числа последовательностей, построить пример бесконечного числа бесконечно малых последовательностей, сумма которых не является бесконечно малой последовательностью.

II. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой последовательностью.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, а $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, т. е. существует такое число $b > 0$, что $|x_n| \leqslant b$ для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$.

Зададим $\varepsilon > 0$; в силу определения бесконечно малой последовательности существует такой номер n_ε, что $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{b}$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$. Поэтому для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ имеем

$$|\alpha_n x_n| = |\alpha_n|\,|x_n| < \frac{\varepsilon}{b} \cdot b = \varepsilon,$$

что и означает, что последовательность $\{\alpha_n x_n\}$ бесконечно малая.

Следствие. *Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.*

Это сразу следует по индукции из свойства II, если заметить, что бесконечно малая последовательность, как и всякая последовательность, имеющая предел, ограничена (см. теорему 2 п. 3.2).

Задача 3. Определив произведение бесконечного числа занумерованных сомножителей (обобщающее понятие произведения конечного числа сомножителей), а затем определив произведение бесконечного числа последовательностей, построить пример бесконечного числа бесконечно малых последовательностей, произведение которых не является бесконечно малой последовательностью.

Определение 15. *Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого числа ε существует такой номер n_ε, что $|x_n| > \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$. В этом случае пишут*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Если последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, такова, что для любого числа ε существует такое n_ε, что $x_n > \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ (соответственно $x_n < \varepsilon$), то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой последовательностью.

Очевидно, что бесконечно большие последовательности не имеют предела, как мы его определили в п. 3.1. Применение в этом случае обозначения «lim» является традиционным.

В дальнейшем всегда под пределом последовательности будем понимать конечный предел, т. е. число, если, конечно, не оговорено противное.

Упражнения. 7. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$, если $q > 1$, и $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $0 < q < 1$.

8. Привести пример неограниченной последовательности, не стремящейся к бесконечности.

9. Доказать, что если $a_n \leqslant |b_n|$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

10. Доказать, что неограниченная монотонно возрастающая последовательность имеет предел $+\infty$.

11. Доказать, что любая подпоследовательность бесконечно большой последовательности также является бесконечно большой последовательностью.

12. Доказать, что из всякой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую последовательность.

13. Доказать, что для того, чтобы последовательность x_n, $x_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, была бесконечно большой последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\dfrac{1}{x_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, была бесконечно малой последовательностью.

Как мы знаем, окрестностью, или, точнее, ε-окрестностью ($\varepsilon > 0$), числа a называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Определим понятие окрестности для символов ∞, $+\infty$, $-\infty$; ε-окрестностью $O(\infty, \varepsilon)$ *символа* ∞ *назовем множество всех чисел* x, *таких, что* $|x| > \varepsilon$, *т. е.*

$$O(\infty, \varepsilon) = \{x : |x| > \varepsilon\}.$$

Аналогично определяются ε-окрестности для символов $+\infty$ и $-\infty$:

$$O(+\infty, \varepsilon) = \{x : x > \varepsilon\};$$
$$O(-\infty, \varepsilon) = \{x : x < \varepsilon\}.$$

Здесь всюду с целью единообразия предполагается что $\varepsilon > 0$.

Применяя эту терминологию, определение конечного и любого бесконечного предела можно сформулировать единым образом.

Определение 16. *Величина* α *(число или один из символов* ∞, $+\infty$, $-\infty$*) есть предел последовательности* $\{x_n\}$, *если, какова бы ни была* ε*-окрестность* $O(\alpha, \varepsilon)$ *величины* α, *существует такой номер* n_ε, *что* $x_n \in O(\alpha, \varepsilon)$ *для всех* $n \geqslant n_\varepsilon$.

3.5. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями над последовательностями

Лемма. *Для того чтобы число* a *являлось пределом последовательности* $\{x_n\}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $x_n = a + \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *где* $\{\alpha_n\}$ *есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство необходимости. Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Положим $\alpha_n = x_n - a$, $n = 1, 2, \ldots$; согласно определению предела для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$, т. е. $|\alpha_n| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_\varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Доказательство достаточности. Пусть $x_n = a + \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$. Замечая, что $\alpha_n = x_n - a$, имеем, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Лемма доказана.

Эта лемма показывает особую роль бесконечно малых последовательностей при изучении понятия предела, так как общее понятие предела последовательности с помощью этой леммы сводится к понятию нулевого предела. Это обстоятельство далее широко используется при изучении ряда свойств сходящихся последовательностей.

1. *Если* $x_n = c$, $n = 1, 2, \ldots$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

В самом деле, последовательность $x_n - c = c - c = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, бесконечно малая, и поэтому в силу леммы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

2. *Если последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходятся, то последовательности* $\{x_n \pm y_n\}$ *также сходятся и*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

т. е. предел алгебраической суммы двух сходящихся последовательностей равен такой же сумме пределов данных последовательностей.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Согласно необходимости условий леммы для существования предела, имеем

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, поэтому $x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, где в силу свойства I бесконечно малых последовательностей (см. п. 3.4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n \pm \beta_n) = 0$. Поэтому, согласно достаточности условий леммы для существования предела, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Утверждение доказано.

Следствие. *Предел конечной алгебраической суммы сходящихся последовательностей равен той же алгебраической сумме пределов отдельных последовательностей.*

Это непосредственно следует по индукции из доказанного свойства пределов сходящихся последовательностей.

3. *Если последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходятся, то последовательность* $\{x_n y_n\}$ *также сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n,$$

т. е. предел произведения сходящихся последовательностей существует и равен произведению пределов данных последовательностей.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$; поэтому $x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n)$.

В силу свойств I и II бесконечно малых последовательностей (см. п. 3.4)

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n) = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Следствие 1. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *сходится, то для любого числа* c *последовательность* $\{cx_n\}$ *также сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} c\, x_n = c \lim_{n\to\infty} x_n,$$

т. е. постоянную можно выносить за знак предела.

Следствие 2. *Если* $\{x_n\}$ *— сходящаяся последовательность и* k *— натуральное число, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = (\lim_{k\to\infty} x_n)^k.$$

Это непосредственно по индукции следует из свойства 3.

4. *Если последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходятся,* $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *то последовательность* $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ *сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},$$

т. е. предел частного сходящихся последовательностей существует и равен частному от пределов данных последовательностей.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$ и для определенности $b > 0$. Тогда

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$, поэтому

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n}-\frac{a}{b}=\frac{1}{b(b+\beta_n)}(\alpha_n b-\beta_n a). \tag{3.9}$$

Согласно свойству II пределов последовательностей из п. 3.1, существует такой номер n_0, что $y_n>\frac{b}{2}>0$ для всех номеров $n\geqslant n_0$ (действительно, заметив, что $\frac{b}{2}<b$, в указанном свойстве в качестве c надо взять $c=\frac{b}{2}$) — здесь используется предположение, что $b>0$; поэтому при $n\geqslant n_0$ имеем

$$0<\frac{1}{b(b+\beta_n)}=\frac{1}{by_n}<\frac{2}{b^2}.$$

Отсюда следует, что последовательность $\frac{1}{b(b+\beta_n)}$, $n=1, 2, \ldots$, ограничена (почему?). В силу свойств бесконечно малых последовательностей последовательность $\{\alpha_n b-\beta_n a\}$ является бесконечно малой, поэтому и последовательность $\left\{\frac{1}{b(b+\beta_n)}(\alpha_n b-\beta_n a)\right\}$ бесконечно малая. В силу этого из (3.9) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $b<0$.

Замечание. В случае последовательностей, имеющих бесконечные пределы, утверждения, аналогичные 1—4, вообще говоря, не имеют места.

Например, пусть $x_n=n+1$, $y_n=n$, $n=1, 2, \ldots$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=1$.

Если $x_n=2n$, $y_n=n$, $n=1, 2, \ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=+\infty$.

Если же $x_n=n+\sin\frac{n\pi}{2}$, $y_n=n$, $n=1, 2, \ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$, а последовательность $x_n-y_n=\sin\frac{n\pi}{2}$, $n=1, 2, \ldots$, не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

Эти примеры показывают, что при одинаковых предположениях относительно последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, имеющих бесконечные пределы, для последовательности $\{x_n-y_n\}$ могут встретиться самые

разнообразные случаи. Вместе с тем отдельные обобщения свойств 1—4 на случай последовательностей с бесконечными пределами все-таки имеют место. Например, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \text{ (или } \lim_{n\to\infty} y_n \text{ — конечен),}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty \text{ (рекомендуется доказать самостоятельно).}$$

Упражнение 14. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, а последовательность $\{y_n\}$ ограничена, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty$.

Пример. Пусть $a > 0$, $x_0 > 0$ и

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.10}$$

Очевидно, что $x_n > 0$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Докажем, что

$$x_n \geqslant \sqrt{a}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.11}$$

т. е., согласно (3.10), что

$$\frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) \geqslant \sqrt{a}. \tag{3.12}$$

Так как $x_{n-1} > 0$, то неравенство (3.12) равносильно неравенству

$$x_{n-1}^2 - 2x_{n-1}\sqrt{a} + a \geqslant 0,$$

это неравенство очевидно, ибо

$$x_{n-1}^2 - 2x_{n-1}\sqrt{a} + a = (x_{n-1} - \sqrt{a})^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, неравенство (3.11) доказано.

Покажем теперь, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает.

Действительно,

$$x_{n-1} - x_n = x_{n-1} - \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) = \frac{x_{n-1}^2 - a}{2x_{n-1}} \geqslant 0,$$

$$n = 2, 3, \ldots,$$

т. е.

$$x_{n-1} \geqslant x_n, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Итак, последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу и монотонно убывает, поэтому, согласно теореме 3, она имеет предел.

Пусть $\lim x_n = x$. Переходя к пределу в равенстве (3.10) при $n \to \infty$, получим

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right),$$

откуда $x^2 = a$, т. е. $x = \sqrt{a}$.

Формула (3.10) может служить для приближенного вычисления значений квадратного корня из числа a. Она действительно применяется на практике с этой целью, в частности, при вычислениях на быстродействующих счетных машинах.

Нетрудно подсчитать и точность, с которой n-е приближение, т. е. член x_n, дает значение корня. Предварительно заметим, что если $x_n = \sqrt{a}$, то из (3.10) получим

$$2x_{n-1}\sqrt{a} = x_{n-1}^2 + a,$$

откуда $\left(x_{n-1} - \sqrt{a}\right)^2 = 0$, т. е. $x_{n-1} = \sqrt{a}$; продолжая этот процесс дальше, получим в конце концов $x_0 = \sqrt{a}$. Поскольку нас интересует оценка отклонения x_n от числа $\sqrt{a}$, естественно предположить $x_0 \neq \sqrt{a}$, т. е. что нам неизвестно точное значение корня и что мы выбрали наугад исходное его приближение x_0, в этом случае $x_n \neq \sqrt{a}$, поэтому, согласно неравенству (3.11),

$$x_n > \sqrt{a}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.11'}$$

Займемся теперь искомой оценкой погрешности приближения. Имеем

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left[(x_n - x_{n-1}) + a\left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})\left(1 - \frac{a}{x_{n-1}\,x_n}\right).$$

Из неравенства (3.11') следует, что

$$0 < \frac{a}{x_{n-1}\,x_n} < 1, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

поэтому

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Применяя это неравенство $n - 1$ раз, получим

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - x_1|, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Теперь

$$|x_{n+p}-x_n|=|(x_{n+p}-x_{n+p-1})+(x_{n+p-1}-x_{n+p-2})+\ldots+$$

$$+(x_{n+1}-x_n)|\leqslant\sum_{k=0}^{p-1}|x_{n+k+1}-x_{n+k}|\leqslant\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{2^{n+k-1}}|x_2-x_1|<$$

$$|x_2-x_1|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+k-1}}=|x_2-x_1|\frac{\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{|x_2-x_1|}{2^{n-2}},\quad n=2,\ 3,\ \ldots.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $p\to\infty$, получим

$$|\sqrt{a}-x_n|\leqslant\frac{|x_2-x_1|}{2^{n-2}},\quad n=2,\ 3,\ \ldots.$$

Это и есть требуемая оценка погрешности n-го приближения.

Упражнение 15. Пусть $a_0>0$, $b_0>0$,

$$a_n=\sqrt{a_{n-1}\,b_{n-1}},\quad b_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad n=1,\ 2,\ \ldots.$$

Доказать, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ стремятся к одному и тому же пределу a и что

$$0\leqslant a-a_n\leqslant\frac{|b_0-a_0|}{2^n},\quad 0\leqslant b_n-a\leqslant\frac{|b_0-a_0|}{2^n}.$$

3.6. Изображение вещественных чисел бесконечными десятичными дробями

Пусть задано какое-либо число a, для определенности $a\geqslant 0$. В силу свойства Архимеда существует целое число $n_0>a$. Среди чисел $n=1,\ 2,\ \ldots,\ n_0$ возьмем наименьшее, обладающее свойством $n>a$ и обозначим его α_0+1, тогда $\alpha_0\leqslant a<\alpha_0+1$.

Разобьем отрезок $[\alpha_0,\ \alpha_0+1]$ на десять равных отрезков, т. е. рассмотрим отрезки $\left[\alpha_0,\ \alpha_1;\ \alpha_0,\ \alpha_1+\frac{1}{10}\right]$, где $\alpha_1=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 9$.

Возможны два случая: либо точка a не совпадает ни с одной точкой деления (рис. 7), либо точка a совпадает с одной из точек деления (рис. 8, 9). В первом случае точка a принадлежит только одному из этих отрезков. Обозначим его через

$$I_1=\left[\alpha_0,\ \alpha_1;\ \alpha_0,\ \alpha_1+\frac{1}{10}\right],$$

где α_1 обозначает номер отрезка, т. е. одну из цифр 0, 1, ..., 9.

Во втором случае точка a может принадлежать двум соседним отрезкам. Тогда через I_1 обозначим тот из них, для которого точка a является левым концом. Разобьем отрезок I_1 в свою очередь на десять равных отрезков и через $I_2 = \left[\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2;\ \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{10^2}\right]$ обозна-

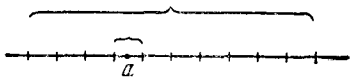


Рис. 7

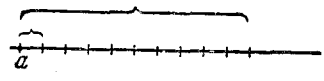


Рис. 8

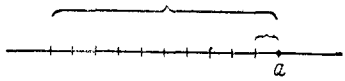


Рис. 9

чим тот из получившихся отрезков, который содержит a и для которого точка a не является правым концом. Продолжая этот процесс, получим систему вложенных отрезков

$$I_n = \left[\underline{a}_n,\ \overline{a}_n\right], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\underline{a}_n = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$, $\overline{a}_n = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + \frac{1}{10^n}$, а α_n — одна из цифр 0, 1, 2, ..., 9.

Конечные десятичные дроби $\underline{a}_n$ и $\overline{a}_n$ называются соответственно *нижней и верхней подходящей десятичной дробью порядка n* для числа a. Они обладают следующими свойствами, непосредственно вытекающими из их определения:

$$\underline{a}_n \leqslant a < \overline{a}_n, \tag{3.13}$$

$$\underline{a}_n \leqslant \underline{a}_{n+1},\ \overline{a}_{n+1} \leqslant \overline{a}_n, \tag{3.14}$$

$$\overline{a}_n - \underline{a}_n = \frac{1}{10^n}. \tag{3.15}$$

В случае, если $a < 0$, то, полагая $b = -a$, определяем

$$\underline{a}_n = -\overline{b}_n,\ \overline{a}_n = -\underline{b}_n. \tag{3.16}$$

Лемма 1. *Каково бы ни было число a, последовательность* $\{\underline{a}_n\}$ *монотонно возрастает, а последовательность* $\{\overline{a}_n\}$ *монотонно убывает и*

$$\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = a. \tag{3.17}$$

Следствие. *Всякое вещественное число является пределом последовательности рациональных чисел.*

Действительно, неравенства (3.13) и (3.14) означают, что в случае $a \geqslant 0$ последовательность $\{\underline{a}_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, а последовательность $\{\bar{a}_n\}$ монотонно убывает и ограничена снизу. Поэтому существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{a} = \underline{a}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{a}_n = \bar{a}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, из неравенства (3.13) получим, что $\underline{a} \leqslant a \leqslant \bar{a}$, а из равенства (3.15), что $\bar{a} - \underline{a} = 0$, т. е. $a = \underline{a} = \bar{a}$.

Итак, (3.17) в случае $a \geqslant 0$ доказано.

Для $a < 0$ оно непосредственно следует из (3.16).

Следствие леммы вытекает из того, что $\underline{a}_n$ и $\bar{a}_n$ суть рациональные числа.

Пусть теперь снова $a \geqslant 0$ и $\underline{a}_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$. Поставим в соответствие числу a бесконечную десятичную дробь $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$. Подчеркнем, что здесь α_0 является неотрицательным целым числом, а α_n, $n = 1, 2, \ldots$, — одной из цифр 0, 1, 2, ..., 9.

Длины отрезков $I_n = [\underline{a}_n, \bar{a}_n]$ равны $\frac{1}{10^n}$ и потому (почему?) стремятся к нулю при $n \to \infty$, поэтому число a является единственным числом, принадлежащим всем отрезкам I_n, $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что при указанном соответствии разным числам соответствуют разные десятичные дроби, т. е. отличающиеся хотя бы одним α_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

Заметим далее, что при нашем построении не может получиться дробь с периодом, состоящим из одной цифры 9. Действительно, пусть числу a соответствует дробь $\alpha_0, \alpha_1\ldots\alpha_{n_0}9\ldots9$, где $\alpha_{n_0} \neq 9$. Тогда, согласно построению,

$$a \in \left[\alpha_0, \underbrace{\alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} 9 \ldots 9}_{n \text{ цифр}}; \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}}\right]$$

для всех $n \geqslant n_0$. Отсюда следует, что a является правым концом всех отрезков I_n, $n \geqslant n_0$, что противоречит выбору этих отрезков. Если же не существует цифры α_{n_0}, такой, что $\alpha_{n_0} \neq 9$, т. е. числу a соответствует дробь $\alpha_0, 99, \ldots 9\ldots$, то a является правым концом всех отрезков вида $[\alpha_0, 99\ldots9; \alpha_0 + 1]$. Следовательно, $a = \alpha_0 + 1$, тогда как по предположению $\alpha_0 \leqslant a < \alpha_0 + 1$.

Таким образом, в силу установленного соответствия каждому вещественному числу $a \geqslant 0$ соответствует некоторая бесконечная десятичная дробь, не имеющая периода, состоящего из одной цифры 9. Такие десятичные дроби называются *допустимыми*.

Наконец, каждая бесконечная допустимая десятичная дробь $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ в результате описанного соответствия оказывается

поставленной в соответствие некоторому числу a, а именно тому единственному числу, которое принадлежит всем отрезкам:

$$\left[\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n;\ \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + \frac{1}{10^n}\right], \quad n = 1, 2, \dots .$$

Это соответствие можно распространить и на отрицательные числа: если числу $a > 0$ соответствует дробь $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$, то числу $-a$ поставим в соответствие дробь $-\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$.

Если заданы два множества X и Y и если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие элемент $y \in Y$, причем разным элементам x соответствуют разные элементы y и каждый элемент $y \in Y$ оказывается поставленным в соответствие некоторому элементу $x \in X$, то говорится, что между множествами X и Y установлено *взаимно однозначное соответствие*.

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 6. *Между множеством всех вещественных чисел и множеством допустимых десятичных дробей существует взаимно однозначное соответствие; причем, если при этом соответствии числу a соответствует дробь $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$, то $\pm \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = a$.*

Бесконечная десятичная дробь $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$, соответствующая числу a, называется его десятичной записью и используется для его обозначения. Поэтому пишется

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots .$$

Замечание. Любой бесконечной десятичной дроби $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ (не обязательно допустимой) можно также естественным образом поставить в соответствие единственное вещественное число, принадлежащее всем отрезкам

$$\left[\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n;\ \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + \frac{1}{10^n}\right].$$

Однако получившееся при этом соответствие уже не будет взаимно однозначным: может случиться, что разным десятичным дробям будет соответствовать одно и то же вещественное число. Именно дробям вида $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n 99 \dots 9 \dots$ и $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots (\alpha_n + 1)00 \dots 0 \dots$ $(\alpha_n \neq 9)$ соответствует одно и тоже число. В описанной выше конструкции соответствия вещественных чисел и бесконечных десятичных дробей мы получили бы не только допустимые десятичные дроби, если бы отказались от условия каждый раз выбирать такой отрезок I_n, что число a не является его правым концом.

Используя запись вещественных чисел, с помощью бесконечных десятичных дробей можно получить правило для их сравнения по величине и правила арифметических действий над ними.

Лемма 2. *Пусть* $a = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ *и* $b = \beta_0,\ \beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$ *— два неотрицательных числа, записанных с помощью бесконечных допустимых десятичных дробей. Тогда* $a < b$ *в том и только том случае, когда существует* n_0, *такое, что* $\underline{a}_n < \underline{b}_n$ *для всех* $n \geqslant n_0$.

Действительно, пусть $a < b$. Из $a = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{a}_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{b}_n$ следует (см. свойства пределов последовательностей в п. 3.1), что существует такое n_0, что при всех $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство $\underline{a}_n < \underline{b}_n$.

Обратно, если существует n_0, такое, что $\underline{a}_n < \underline{b}_n$ для всех $n \geqslant n_0$, то случай $a > b$ невозможен в силу только что доказанного. Невозможен и случай $a = b$, так как тогда бы в силу однозначной записи чисел с помощью допустимых десятичных дробей при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполнялось равенство $\underline{a}_n = \underline{b}_n$. Таким образом, $a < b$.

Лемма доказана.

Замечание. Если a и b оба отрицательны и $a < b$, то $-a > -b$ и для положительных чисел $-a$ и $-b$ справедлива лемма 2. Если же a и b разных знаков, то никакого специального правила сравнения чисел по десятичной записи не нужно, так как всякое отрицательное число меньше неотрицательного.

Лемма 3. *Пусть* a *и* b *— два вещественных числа, тогда*

$$\lim_{n\to\infty} (\underline{a}_n + \underline{b}_n) = a + b,$$

$$\lim_{n\to\infty} (\underline{a}_n - \underline{b}_n) = a - b,$$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n\, \underline{b}_n = ab,$$

а при $b \neq 0$

$$\lim \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} = \frac{a}{b}\ ^{*)}.$$

Все утверждения этой леммы непосредственно следуют из леммы 1 и свойств пределов, связанных с арифметическими действиями над последовательностями (см. п. 3.5).

Из леммы 3 следует, что для того чтобы произвести с заданной степенью точности какое-либо арифметическое действие над числами, записанными в виде допустимых десятичных дробей, надо взять с до-

*) Может случиться, что при некоторых n будем иметь $\underline{b}_n = 0$, и, следовательно, выражение $\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}$ будет лишено смысла. Однако в силу условия $b \neq 0$ и свойства 3 пределов последовательностей, доказанного в п. 3.1, существует такое n_0, что $\underline{b}_n \neq 0$ при $n \geqslant n_0$. В этом случае вместо последовательности $\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, следует рассматривать последовательность $\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}$, $n = n_0,\ n_0 + 1, \ldots$.

статочной точностью их подходящие десятичные дроби и произвести над ними соответствующие действия.

Замечание. При изложении теории вещественных чисел можно идти и в обратном порядке: определить вещественные числа как бесконечные допустимые десятичные дроби и, используя эту запись, ввести в них соответствующим образом соотношение порядка и арифметические действия.

Существуют и другие построения теории вещественных чисел, которые исходят из других конкретных объектов, однако все они приводят к совокупностям элементов, удовлетворяющих свойствам I—VI п. 1.1. Здесь мы встречаемся с характерной чертой математических методов исследования, для которых совершенно безразлична природа элементов, а важны лишь количественные связи между ними, которые в данном случае и выражаются свойствами I—VI.

Заметим, что совокупность свойств I—VI однозначно определяет совокупность элементов, обладающих этими свойствами. Поясним это несколько подробнее.

Пусть мы имеем два множества X и Y элементов произвольной природы и пусть в этих множествах установлены порядок элементов и операции сложения и умножения, удовлетворяющие свойствам I—VI.

Мы скажем, что множества X и Y изоморфны, если существует такое взаимно однозначное соответствие между множествами X и Y — обозначим его $x \to y$ (здесь $y \in Y$ является элементом, соответствующим элементу $x \in X$ при указанном соответствии),— что для любых элементов $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ выполняется условие:
если

$$x_1 \to y_1 \text{ и } x_2 \to y_2,$$

то

$$x_1 + x_2 \to y_1 + y_2, \quad x_1 x_2 \to y_1 y_2.$$

Можно показать, что любые два множества X и Y, удовлетворяющие свойствам I—VI п. 1.1, изоморфны. Иначе говоря, свойства I—VI однозначно, с точностью до изоморфизма, определяют множество вещественных чисел. Это свойство называется *свойством полноты системы аксиом* I—VI. Оно означает невозможность расширить множество вещественных чисел с сохранением всех его свойств.

3.7. Счетность рациональных чисел. Несчетность вещественных чисел

Возникает вопрос: все ли бесконечные множества содержат одинаковое число элементов или бесконечности бывают разные? Прежде всего надо определить понятие «одинаковое число элементов».

Определение 17. *Будем говорить, что два множества X и Y имеют одинаковое число элементов, или они равномощны, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.*

С этой точки зрения натуральные числа 1, 2, ..., n, ... содержат столько же элементов, сколько и четные числа 2, 4, ..., $2n$, ..., хотя на первый взгляд последних кажется в два раза меньше. Требуемое взаимно однозначное соответствие получается, если натуральному числу n поставить в соответствие число $2n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Четные числа составляют часть множества натуральных чисел, однако эти множества равномощны, следовательно, в случае бесконечных множеств часть может равняться в нашем смысле целому!

Определение 18. *Множество, которое содержит столько же элементов, сколько натуральный ряд чисел, т. е. равномощное с множеством натуральных чисел, называется счетным.*

Таким образом, если X счетно, то между множеством X и множеством натуральных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие, или, как говорят, можно занумеровать элементы множества X, понимая под номером каждого элемента $x \in X$ соответствующее ему натуральное число.

Счетные множества являются в определенном смысле простейшими бесконечными множествами. Именно справедлива следующая лемма.

Лемма. *Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Действительно, пусть X — бесконечное множество. Возьмем какой-либо его элемент и обозначим его x_1. В силу того, что X — бесконечное множество, в нем заведомо имеется хоть один элемент, отличный от элемента x_1. Выберем какой-либо из таких элементов и обозначим его x_2.

Пусть уже выбраны элементы x_1, ..., x_n в множестве X. Поскольку X — бесконечное множество, то в нем заведомо есть еще и другие элементы; выберем какой-либо из оставшихся элементов и обозначим его через x_{n+1}, и т. д. В результате мы получили элементы $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, которые образуют счетное подмножество множества X.

Следующая теорема дает интересный пример счетного множества.

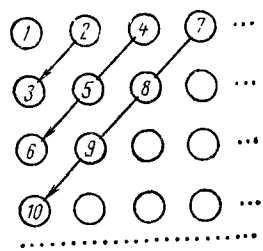
Теорема 7. *Рациональные числа образуют счетное множество.*

Доказательство. Рассмотрим сначала неотрицательные рациональные числа. Расположим их в бесконечную таблицу следующим образом: в первую строчку поместим в порядке возрастания все целые числа 0, 1, 2, ...; во вторую — все несократимые положительные дроби со знаменателем 2, упорядоченные по величине числителя; вообще в n-ю строчку, $n = 1, 2, \ldots$,— все положительные рациональные числа, записывающиеся несократимой дробью со знаменателем n, упорядоченные по величине числителя. Очевидно,

что каждое неотрицательное рациональное число попадет на какое-то место в получившейся таблице:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{1}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Занумеруем теперь элементы получившейся таблицы согласно следующей схеме (в кружочках стоят номера соответствующих элементов, стрелка указывает направление нумерации):



В результате все неотрицательные рациональные числа оказываются занумерованными, т. е. мы доказали, что они образуют счетное множество.

Чтобы убедиться, что и множество всех рациональных чисел также счетно, достаточно их записать в подобную же таблицу. Это можно сделать, например, поместив в написанной выше таблице после каждого положительного рационального числа x в той же строчке число $-x$:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Перенумеровав элементы таблицы тем же методом, что и выше, получим счетность всех рациональных чисел.

Возникает естественный вопрос: а существуют ли бесконечные множества, не являющиеся счетными? Оказывается, что да, существуют, и они называются естественно, несчетными множествами. Важный пример несчетных множеств устанавливается нижеследующей теоремой.

Теорема 8 (Кантор). *Множество вещественных чисел несчетно.*

Допустим противное: пусть удалось занумеровать все вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; запишем их с помощью допустимых десятичных дробей:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_0^{(1)}, \ \alpha_1^{(1)}\ \alpha_2^{(1)}\ \ldots\ \alpha_m^{(1)}\ \ldots \\ x_2 &= \alpha_0^{(2)}, \ \alpha_1^{(2)}\ \alpha_2^{(2)}\ \ldots\ \alpha_m^{(2)}\ \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \alpha_0^{(n)}, \ \alpha_1^{(n)}\ \alpha_2^{(n)}\ \ldots\ \alpha_m^{(n)}\ \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.18}$$

Здесь $\alpha_m^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$, обозначает одну из цифр 0, 1, 2, ..., 9, а $\alpha_0^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$,—целое число с тем или иным знаком.

Выберем цифру α_n, $n = 1, 2, \ldots$, так, чтобы $\alpha_n \neq \alpha_n^{(n)}$ и $\alpha_n \neq 9$. Тогда дробь $0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ является допустимой, но числа $a = 0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ заведомо нет среди чисел x_n, $n = 1, 2, \ldots$, так как десятичная дробь $0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots$ хотя бы одним десятичным знаком отличается от каждой из десятичных дробей (3.18). Полученное противоречие и доказывает теорему.

3.8. Верхний и нижний пределы последовательностей

Определение 19. *Символ $+\infty$ (соответственно $-\infty$) называется бесконечным частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, если существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty \ \left(\text{соответственно } \lim_{n\to\infty} x_{n_k} = -\infty\right).$$

Легко показать, что у любой последовательности существует по крайней мере один частичный предел, конечный или бесконечный.

Действительно, если последовательность не ограничена сверху, то у нее существует подпоследовательность, стремящаяся к $+\infty$ (почему?), и, значит, $+\infty$ — ее частичный предел.

Если же последовательность не ограничена снизу, то $-\infty$ — ее частичный предел. Если, наконец, последовательность ограничена сверху и снизу, то она просто ограничена и, согласно теореме Больцано — Вейерштрасса, имеет конечный частичный предел.

Определение 20. *Наибольший частичный предел последовательности* $\{x_n\}$ *называется ее верхним пределом и обозначается* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, *а наименьший частичный предел называется нижним пределом и обозначается* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Теорема 9. *У любой последовательности* $\{x_n\}$ *существует как наибольший, так и наименьший частичный предел.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если последовательность имеет только один частичный предел, то он будет и наибольшим и наименьшим. Поэтому в дальнейшем при доказательстве будем считать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет по крайней мере два частичных предела.

Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то, очевидно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$, а если не ограничена снизу, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -\infty$.

Пусть теперь последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху. Тогда $+\infty$ не является ее частичным пределом; согласно же предположению, она имеет по крайней мере два частичных предела, поэтому в этом случае существует по крайней мере один конечный частичный предел. Из ограниченности сверху данной последовательности $\{x_n\}$ следует и ограниченность сверху непустого множества A ее конечных частичных пределов. В силу этого множество A имеет конечную верхнюю грань.

Покажем, что $b = \sup A$ есть частичный предел последовательности $\{x_n\}$, т. е. что $b \in A$. Действительно, если бы $b \notin A$, то существовало бы такое $\varepsilon > 0$, что в интервале $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ содержалось бы лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}$, и поэтому, (почему?), в этом интервале не было бы ни одного элемента A, что противоречит условию $b = \sup A$.

Таким образом, $b \in A$ и, следовательно, является наибольшим элементом множества A (см. определение 4 в п. 2.1), поэтому $b = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Аналогично показывается, что если последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу и множество A ее конечных частичных пределов не пусто, то $\inf A = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Теорема доказана.

Упражнение 16. Пусть

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Найти $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$.

Теорема 10. *Для того чтобы число a было верхним пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно выполнение для любого числа $\varepsilon > 0$ совокупности следующих двух условий.*

1. *Существует номер n_ε, такой, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ справедливо неравенство*

$$x_n < a + \varepsilon.$$

2. *Для любого номера n_0 существует номер n' (зависящий от ε и от n_0), такой, что $n' > n_0$ и*

$$x_{n'} > a - \varepsilon.$$

Условие 1 означает, что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ в последовательности $\{x_n\}$ существует лишь конечное число членов x_n, таких, что $x_n \geqslant a + \varepsilon$ (их номера меньше n_ε).

Условие же 2 означает, что при любом фиксировании $\varepsilon > 0$ в последовательности $\{x_n\}$ существует бесконечно много членов x_n, таких, что $x_n > a - \varepsilon$.

Доказательство необходимости. Пусть $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ и пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Если бы на полуинтервале $[a + \varepsilon, +\infty)$ оказалось бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, то нашлась бы подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, элементы которой принадлежат этому полуинтервалу и которая имеет конечный или бесконечный предел. Обозначим его через b. Очевидно, $b \geqslant a + \varepsilon > a$, что противоречит тому, что a — наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$.

Свойство 1 доказано.

Далее, поскольку верхний предел является и частичным пределом, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = a$. Почти все члены последовательности $\{x_{n_k}\}$ больше $a - \varepsilon$ и, следовательно, существует бесконечно много членов данной последовательности $\{x_n\}$ больших, чем $a - \varepsilon$. Свойство 2 также доказано.

Доказательство достаточности. Пусть число a удовлетворяет условиям 1 и 2. Покажем, что тогда a является частичным пределом. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Для каждого натурального k существует номер n_k, такой, что $x_{n_k} > a - \frac{1}{k}$ (согласно свойству 2) и $x_{n_k} < a + \frac{1}{k}$ (согласно свойству 1). Поскольку для любого k множество элементов x_n данной последовательности, для которых выполняются неравенства $a - \frac{1}{k} < x_n < a + \frac{1}{k}$,

бесконечно, то номера n_k можно последовательно ($k = 1, 2, \ldots$) выбрать так, чтобы $n_{k_1} < n_{k_2}$ при $k_1 < k_2$. В результате мы получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ данной последовательности $\{x_n\}$. Из неравенства $|a - x_{n_k}| < \frac{1}{k}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, т. е., что a является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$.

Покажем теперь, что число a является наибольшим частичным пределом. Действительно, если бы нашелся частичный предел b последовательности $\{x_n\}$, такой, что $b > a$, то, беря, $\varepsilon > 0$ так, что $a + \varepsilon < b$, мы получим, что на промежутке $(a + \varepsilon, +\infty)$ будет находиться бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$ (а именно почти все члены подпоследовательности, сходящейся к b). Это противоречит условию 1.

Теорема доказана.

Упражнение 17. Доказать, что, для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел (конечный или бесконечный, равный одному из символов $+\infty$ или $-\infty$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

В дальнейшем (в § 37) нам будет полезно следующее утверждение.

Лемма. *Пусть* $x_n \geqslant 0$ *и* $y_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *и последовательность* $\{x_n\}$ *сходится. Тогда, если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n < +\infty$, *то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n, \tag{3.19}$$

а если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n y_n = +\infty. \tag{3.20}$$

Доказательство. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n = b < +\infty \tag{3.21}$$

и пусть $\{y_{n_k}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{y_n\}$, такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = b$. Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} y_{n_k} = ab$. Следовательно, ab является частичным пределом последовательности $\{x_n y_n\}$, и потому выполняется условие 2 теоремы 10.

Покажем теперь, что число ab удовлетворяет и условию 1 этой теоремы; тем самым будет показано, что ab является наибольшим частичным пределом, т. е. верхним пределом последовательности $\{x_n y_n\}$.

Пусть фиксировано $\varepsilon > 0$, выберем $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы $a\varepsilon_1 + b\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 < \varepsilon$ (это всегда возможно, ибо, для каждой бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}(a\alpha_n + b\alpha_n + \alpha_n^2) = 0$). Из условия (3.21) следует, что существует такой номер n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant x_n < a + \varepsilon_1,$$

$$0 \leqslant y_n < b + \varepsilon_1.$$

Следовательно, при $n \geqslant n_0$ имеем

$$x_n y_n < ab + a\varepsilon_1 + b\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 < ab + \varepsilon,$$

т. е. условие 1 теоремы 10 для числа ab выполнено; поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n y_n = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

Формула (3.19) доказана.

Пусть теперь $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$ и пусть $\{y_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{y_n\}$, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = +\infty$. Поскольку $a > 0$, то существует номер N такой, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $x_n > \frac{a}{2}$. Поэтому последовательность x_n, $n = N, N+1, \ldots$, ограничена снизу положительной постоянной и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} y_{n_k} = +\infty.$$

Это и означает, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n y_n = +\infty$. Формула (3.20) также доказана.

Заметим теперь, что если по определению считать, что при $a > 0$ справедливо равенство

$$a \cdot +\infty = +\infty,$$

то при $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$ формулы (3.19) и (3.20) можно объединить в одну:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

§ 4. ФУНКЦИИ И ИХ ПРЕДЕЛЫ

4.1. Понятие функции

При изучении тех или иных процессов реального мира (физических, химических, биологических, экономических и всевозможных других) мы постоянно встречаемся с теми или иными характеризующими их величинами, меняющимися в течение рассматриваемых процессов. При этом часто бывает, что изменению одной величины сопутствует и изменение другой, или даже, более того, изменение одной величины является причиной изменения другой.

Например, при прямолинейном равномерном движении материальной точки, как хорошо известно, связь между пройденным путем s, скоростью v и временем движения t выражается формулой $s = vt$. При заданной скорости v величина пройденного пути зависит от времени t: чем больше затраченное время, тем более длинный путь пройдет движущаяся точка.

Закон всемирного тяготения масс выражается известной формулой Ньютона:

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где m_1 и m_2 — массы двух материальных точек, r — расстояние между ними, k — гравитационная постоянная, а F — сила тяготения между этими массами. Из этой формулы следует, что если две фиксированные массы удалять друг от друга, то сила взаимодействия между ними будет уменьшаться.

Площадь круга выражается формулой $S = \pi r^2$. Из нее видно, что при увеличении радиуса круга в n раз площадь круга увеличивается в n^2 раз.

Во всех этих примерах имеется несколько переменных величин, одни из которых могут меняться произвольно, а другие изменяются уже в зависимости от изменения первых. В таких случаях говорят, что между этими переменными существует *функциональная зависимость*. Уточним это понятие.

Переменная величина y называется функцией переменной величины x, если каждому значению величины x соответствует единственное значение величины y.

Хотя на первый взгляд в введенном понятии функции нет явных неясностей, тем не менее оно требует определенного разъяснения. Дело в том, что термин «*переменная*» в интуитивном смысле, как всякое изменение связано с понятием времени и пространства. На самом деле эти пространственные и временные представления в данном случае не являются существенными. Нуждается в разъяснении и само понятие *величины*.

Сформулируем понятие функции несколько иначе.

Пусть заданы два множества X и Y. Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$, обозначаемый $f(x)$, и если каждый элемент $y \in Y$ при этом оказывается поставленным в соответствие хотя бы одному элементу $x \in X$, то говорится, что на множестве X задана однозначная функция $y = f(x)$. Множество X называется ее областью определения (или областью задания), а множество Y — множеством ее значений. Элемент $x \in X$ называется аргументом, или независимой переменной, а элементы $y \in Y$ — значениями функции, или зависимой переменной.

Подчеркнем, что, для того чтобы задать функцию f, надо задать, во-первых, ее область определения X, во-вторых, ее область значений Y и, в-третьих, закон соответствия, по которому определяется элемент $y \in Y$, соответствующий элементу $x \in X$, т. е. элемент $y = f(x)$.

Понятие функции равносильно понятию соответствия, которое можно свести к более простым первичным понятиям, но мы не будем на этом останавливаться.

Элементы x и y рассматриваемых множеств X и Y могут иметь совершенно произвольную природу. В частности это могут быть, например, вещественные или комплексные числа. В случае, когда значениями функции являются не числа, а какие-либо другие элементы, часто вместо слова «функция» употребляется слово «отображение».

Таким образом, у нас термины «функция», «соответствие» и «отображение» равносильны. Говоря о тех или иных функциях, мы, конечно, каждый раз будем разъяснять, о какого рода соответствиях идет речь.

Часто саму функцию (соответствие, отображение) обозначают только одной буквой f, а через $f(x)$ — ее значение на элементе x. Впрочем, иногда через $f(x)$ обозначается и сама функция, а для ее значения на элементе x_0 употребляется запись $f(x)|_{x=x_0}$ или $f|_{x=x_0}$.

Если E — некоторое подмножество множества X, то через $f(E)$ обозначается множество всех таких элементов $y \in Y$, что $y = f(x)$, где $x \in E$, т. е. $f(E) = \{y : y = f(x), x \in E\}$. Множество $f(E)$ называется *образом* множества E.

Если теперь D — некоторое подмножество множества Y, то множество $\{x : x \in X, f(x) \in D\}$ называется полным *прообразом множества* D.

Если X и Y — некоторые подмножества вещественных чисел (быть может, одно из которых или оба совпадают с множеством всех вещественных чисел), то соответствующие функции называются *вещественными функциями одного (вещественного) переменного*. В частности, если в качестве множества X взять множество натуральных чисел, то получим вещественную функцию, определенную

на множестве натуральных чисел или, употребляя введенную ранее терминологию, попросту последовательность вещественных чисел.

Если в качестве множеств X и Y взять некоторые подмножества комплексных чисел, то мы придем к понятию *комплекснозначных функций комплексного аргумента*.

Встречаются функции, у которых множества X и Y разной природы. Примером может служить функция, определенная, например, на некотором множестве X точек плоскости и принимающая числовые значения. Поскольку при фиксированной системе координат каждой точке плоскости однозначно соответствует упорядоченная пара чисел — ее декартовые координаты, то эту функцию можно рассматривать как функцию двух вещественных аргументов x_1, x_2 и обозначать $y = f(x_1, x_2)$.

Встречаются, естественно, и функции с большим числом вещественных аргументов, например, в известной из физики формуле Кулона взаимодействия электрических зарядов

$$F = \frac{e_1 e_2}{\varepsilon r^2}$$

сила взаимодействия F зависит от четырех аргументов: двух величин зарядов e_1 и e_2, расстояния между ними r и диэлектрической постоянной среды ε.

Вообще функция, определенная на некотором множестве элементов, каждый из которых представляет собой упорядоченную совокупность n чисел (вещественных или комплексных), называется *функцией от n* (соответственно *вещественных или комплексных*) *аргументов*.

Может случиться, что значениями функции являются не числа, а какие-либо другие элементы. Например, если в качестве X взять отрезок $[0, 2\pi]$ и каждому числу $x \in [0, 2\pi]$ поставить в соответствие точку плоскости с абсциссой $\sin x$ и ординатой $\cos x$ (при некоторой фиксированной декартовой системе координат), то множеством значений построенной функции будет множество точек окружности единичного радиуса с центром в начале координат.

Отметим, что если функции f и g рассматриваются на одном и том же множестве X, то запись $f \equiv g$ означает, что $f(x) = g(x)$ для каждого $x \in X$. В этом случае говорится, что функция f тождественно равна функции g на множестве X.

Над функциями, принимающими числовые значения (такие функции называются *числовыми функциями*), можно производить различные арифметические операции. Если даны две числовые функции f и g, определенные на одном и том же множестве X, а c — некоторое число (или, как часто говорят,— постоянное), то функция cf определяется как функция, принимающая в каждой точке $x \in X$ значение $cf(x)$; функция $f + g$ — как функция, принимающая в

каждой точке $x \in X$ значение $f(x) + g(x)$; fg — как функция, в каждой точке принимающая значение $f(x)g(x)$; наконец, $\frac{f}{g}$ — как функция, в каждой точке $x \in X$ равная $\frac{f(x)}{g(x)}$ (что, конечно, имеет смысл лишь при $g(x) \neq 0$).

Числовая функция f, определенная на множестве X, называется *ограниченной сверху* (*ограниченной снизу*), если множество ее значений ограничено сверху (снизу). Иначе говоря, функция f ограничена сверху (снизу), если существует такая постоянная M, что для каждого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant M$ (соответственно $f(x) \geqslant M$).

Функция f, ограниченная на множестве X как сверху, так и снизу, называется просто *ограниченной*. Очевидно, что функция f ограничена на множестве X в том и только том случае, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для каждого $x \in X$.

Верхняя (нижняя) грань множества значений Y числовой функции $y = f(x)$, определенной на множестве X, называется верхней (нижней) гранью функции f и обозначается

$$\sup f. \quad \sup_X f, \quad \sup_{x \in X} f(x) \quad (\inf f, \quad \inf_X f, \quad \inf_{x \in X} f(x)).$$

Более подробно это означает, что, например, $\lambda = \sup f$, если, во-первых, для каждого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant \lambda$ и, во-вторых, для любого $\lambda' < \lambda$ существует такой $x_\lambda \in X$, что $f(x_\lambda) > \lambda'$. Индекс λ' у элемента множества X показывает, что он зависит от выбора числа λ'.

В приведенном определении верхняя (нижняя) грань функции может быть как конечной, так и бесконечной.

Согласно результатам п. 2.1, функция f ограничена сверху (снизу) на множестве X тогда и только тогда, когда она имеет на этом множестве конечную верхнюю (нижнюю) грань.

Упражнения. 1. Доказать, что если функция f не ограничена сверху (соответственно снизу) на отрезке $[a, b]$, то существует такая последовательность точек $x_n \in [a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty$).

2. Доказать, что если функция не ограничена на отрезке, то существует точка этого отрезка, в каждой окрестности которой функция не ограничена.

Будем говорить, что числовая функция f, определенная на множестве X, принимает в точке $x_0 \in X$ *наибольшее значение* (соответственно *наименьшее*), если $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x_0)$)

для каждой точки $x \in X$. В этом случае будем писать $f(x_0) = \max\limits_X f$ или $f(x_0) = \max f$ (соответственно $f(x_0) = \min\limits_X f$ или $f(x_0) = \min f$)*).

Очевидно, что если функция f принимает в точке x_0 наибольшее (наименьшее) значение, то $f(x_0) = \sup f$ (соответственно $f(x_0) = \inf f$).

Иногда приходится иметь дело с функциями $f(x)$, определенными на некотором множестве X, значениями которых являются некоторые подмножества множества Y, т. е. когда каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие некоторое множество $f(x) \subset Y$, и тем самым множеством значений функции является совокупность некоторых подмножеств множества Y. В этом случае говорят, что на множестве X задана *многозначная функция* $f(x)$ со значениями в множестве Y.

Если каждое $f(x)$ состоит только из одного элемента $y \in Y$, то получится *однозначная функция*.

Многозначные функции естественным образом возникают, например, при рассмотрении так называемых *обратных функций*.

Определение 1. *Пусть на множестве X определена функция f и пусть Y — множество ее значений. Обозначим через $f^{-1}(y)$ полный прообраз элемента $y \in Y$, т. е.*

$$f^{-1}(y) = \{x : x \in X,\ f(x) = y\}.$$

Тогда функция, определенная на Y и ставящая в соответствие каждому $y \in Y$ множество $f^{-1}(y) \subset X$, называется обратной к f и обозначается f^{-1}.

Обратная функция f^{-1} является, вообще говоря, многозначной функцией, но, конечно, в частном случае она может быть и однозначной.

4.2. Способы задания функций

В дальнейшем в основном будут изучаться однозначные вещественные функции одного вещественного переменного. Поэтому остановимся на способах задания только таких функций.

Прежде всего, функции могут задаваться при помощи формул: *аналитический способ*. Для этого используются некоторый запас изученных и специально обозначенных функций, алгебраические действия и предельный переход.

Например, $y = ax + b$, $y = ax^2$, $y = \sin x$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 1 + \sqrt{\lg \cos \pi x}$.

*) Наибольшее (наименьшее) значение функции называется также ее *максимальным* (*минимальным*) *значением*. Максимальные и минимальные значения называются *экстремальными*.

Иногда приходится функцию задавать с помощью нескольких формул, например,

$$y = f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{для } x > 0, \\ 0 & \text{для } x = 0, \\ x - 1 & \text{для } x < 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Функция может быть задана также просто с помощью описания соответствия. Поставим в соответствие каждому числу $x > 0$ число 1, числу 0 — число 0, а каждому $x < 0$ — число -1. В результате получим функцию, определенную на всей вещественной оси и принимающую три значения: 1, 0 и -1. Эта функция имеет специальное обозначение $\operatorname{sign} x$ *):

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{для } x > 0, \\ 0 & \text{для } x = 0, \\ -1 & \text{для } x < 0. \end{cases}$$

Другой пример: каждому рациональному числу поставим в соответствие число 1, а каждому иррациональному — число ноль. Полученная функция называется *функцией Дирихле.*

Следует отметить, что всякая формула является символической записью некоторого где-то описанного ранее соответствия, так что, в конце концов, нет различия между заданием функции с помощью формулы или с помощью описания соответствия; это различие чисто внешнее.

Следует также иметь в виду, что всякая вновь определенная функция, если для нее ввести специальное обозначение, может служить для определения других функций с помощью формул, включающих этот новый символ.

Если речь идет о вещественных функциях одного аргумента, то для наглядного представления о характере функциональной зависимости часто строятся графики функций.

Графиком функции $y = f(x)$ (x *и* y — *числа*) *называется геометрическое место точек на плоскости с координатами* $(x, f(x))$, $x \in X$ (X — *как всегда, область определения функции*).

Так, например, график функции (4.1) имеет вид, изображенный на рис. 10, а график функции $y = 1 + \sqrt{\lg \cos \pi x}$ состоит из отдельных точек (рис. 11).

С другой стороны, графическое изображение функции также может служить для задания функциональной зависимости. Правда, это задание будет приближенно, потому что измерение отрезков практически можно производить лишь с определенной степенью точ-

*) Signum — по-латыни означает «знак».

ности. Примерами графического задания функций, встречающимися на практике, могут служить, например, показания осциллографа.

Наконец, функцию можно задать с помощью таблиц, т. е. для некоторых значений переменной x указать соответствующие значения переменной y. Данные таблиц могут быть получены как непосредственно из опыта, так и с

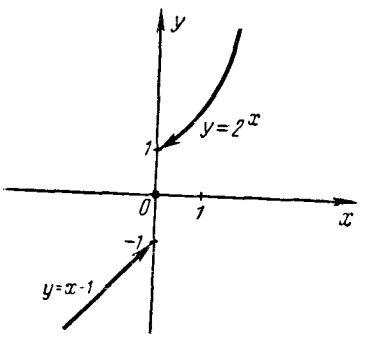


Рис. 10

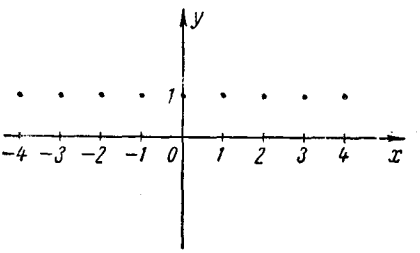


Рис. 11

помощью тех или иных математических расчетов. Примерами такого задания функций являются логарифмические таблицы и таблицы тригонометрических функций.

Упражнение 3. Построить графики функций:

$$y = 2x + 1, \quad y = ax + b, \quad y = \frac{a}{x}, \quad y = 2x^2,$$

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y = 2^x, \quad y = \frac{1}{2^x}, \quad y = \lg x,$$

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad y = \sin 2x, \quad y = 2\cos(3x + 2) + 1,$$

$$y = \operatorname{tg} 3x, \quad y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x, \quad y = \arcsin x,$$

$$y = 3\arccos x + 1, \quad y = \operatorname{arctg} x,$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 2}, \quad y = \frac{x^2 (x - 1)^2}{x + 1}.$$

Рассмотрим более подробно некоторые специальные аналитические способы задания функции.

Неявные функции. Пусть дано уравнение вида

$$F(x, y) = 0, \tag{4.2}$$

т. е. задана функция $F(x, y)$ двух вещественных переменных x и y, и рассматриваются только такие пары x, y (если они существуют), для которых выполняется условие (4.2).

Пусть существует такое множество X, что для каждого $x_0 \in X$ существует по крайней мере одно число y, удовлетворяющее уравнению $F(x_0, y) = 0$. Обозначим одно из таких y-ков через y_0 и поставим его в соответствие числу $x_0 \in X$. В результате получим функцию f, определенную на множестве X и такую, что

$$F(x_0, f(x_0)) = 0 \text{ для всех } x_0 \in X.$$

В этом случае говорят, что функция f задается неявно уравнением (4.2). Одно и то же уравнение (4.2) задает, вообще говоря, не одну, а некоторое множество функций.

Функции, задаваемые уравнениями вида (4.2), называются функциями, заданными неявно, или просто *неявными функциями*, в отличие от функций, задаваемых формулой, разрешенной относительно переменной y, т. е. формулой вида $y = f(x)$.

Термин «неявная функция» отражает не характер функциональной зависимости, а лишь способ ее задания. Одна и та же функция может быть задана как явно, так и неявно. Например, функции

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{и} \quad f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

могут быть заданы также и неявным образом с помощью уравнения $x^2 + y^2 - 1 = 0$ в том смысле, что они входят в совокупность функций, задаваемых этим уравнением.

Сложные функции. Пусть заданы две функции $y = f(x)$ и $z = F(y)$, причем область задания функции F содержит область значений функции f, тогда каждому x из области определения функции f естественным образом соответствует z, такое, что $z = F(y)$, где $y = f(x)$. Эта функция, определяемая соответствием $z = F[f(x)]$, называется *сложной функцией*, или *суперпозицией функций* f и F.

Сложная функция отражает не характер функциональной зависимости, а лишь способ ее задания: может случиться, что одна и та же функция может быть задана как с помощью суперпозиций каких-либо функций, так и без их помощи. Например, сложная функция $z = 2^y$, $y = \log_2(1 + \sin^2 x)$, заданная с помощью суперпозиций показательной и логарифмической функций, может быть задана и без этой суперпозиции $z = 1 + \sin^2 x$.

Подобным образом можно рассматривать сложные функции, являющиеся суперпозицией более чем двух функций, например, функцию $w = \sin \lg\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ можно рассматривать как суперпозицию следующих функций:

$$w = \sin v, \quad v = \lg u, \quad u = 1 + z, \quad z = \frac{1}{y}, \quad y = \sqrt{x}.$$

4.3. Элементарные функции и их классификация

Функции: степенная $y = x^{\alpha}$, показательная $y = a^x$ $(a > 0)$, логарифмическая $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$, постоянные $y = c$ называются *основными элементарными функциями.*

Всякая функция, которая может быть явным образом задана с помощью формулы, содержащей лишь конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, называется просто элементарной функцией.

Под областью существования элементарной функции, заданной некоторой формулой, обычно понимают множество всех вещественных чисел x, для которых, во-первых, указанная формула имеет смысл, и, во-вторых, в процессе проведения всех необходимых вычислений по этой формуле получаются только вещественные числа.

Например, областью существования функции

$$f(x) = \frac{x + |x|}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(эта функция элементарная, ибо $|x| = \sqrt{x^2}$ — элементарная функция) является интервал $(-1; 1)$, хотя эта функция и принимает вещественные значения на полупрямой $x < 1$ с «выколотой точкой» $x = -1$.

Элементарные функции обычно делят на следующие классы.

1. Многочлены (полиномы). К многочленам относятся функции, которые могут быть заданы формулами вида

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ \ldots \ + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Если $a_n \neq 0$, то число n называется степенью данного многочлена. Многочлены первой степени называются также линейными функциями.

2. Рациональные функции (рациональные дроби). К этому классу функций относятся функции, которые могут быть заданы в виде

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

3. Алгебраические функции. Алгебраической функцией называется функция, которая может быть задана с по-

мощью суперпозиций рациональных функций, степенных функций с рациональными показателями и четырех арифметических действий. Например, функция

$$y = \sqrt[5]{\frac{x-1}{x^2+\sqrt{x}}}$$

является алгебраической функцией.

Заметим, что класс многочленов содержится в классе рациональных функций, а класс рациональных функций содержится в классе алгебраических функций.

4. Трансцендентные функции. Элементарные функции, не являющиеся алгебраическими, называются трансцендентными элементарными функциями. Можно показать, что все прямые и обратные тригонометрические функции, а также показательная и логарифмическая функции являются трансцендентными функциями.

Еще раз напомним, что в анализе в основном изучаются вещественные функции от одного или нескольких вещественных аргументов, поэтому вместо «вещественная функция» будем говорить и писать просто «функция». В тех случаях, когда будут рассматриваться функции другой природы, это или будет оговариваться особо, или будет ясно из контекста.

4.4. Первое определение предела функции

Определение 2. *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b), кроме, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$. Число A называется пределом функции f при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ для любой последовательности $\{x_n\}$, такой, что*

$$x_n \in (a, b), \quad x_n \neq x_0, \quad n = 1, 2, \ldots, \text{ и } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Если такое число A существует, то говорят, что функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0. В этом случае пишут

$$A = \lim_{x\to x_0} f(x), \quad \text{или} \quad f(x) \to A \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Из этого определения следует, что функция не может иметь двух разных пределов в одной точке. Далее, из определения следует, что значения функции f в точках x, лежащих вне любой фиксированной окрестности точки x_0, и значение функции f в точке x_0 не влияют ни на существование, ни на величину предела функции f в точке x_0.

Отметим также, что выражение «функция f определена на некотором промежутке» не означает, что указанный промежуток яв-

ляется областью определения функции f, а лишь что рассматриваемый промежуток принадлежит области определения данной функции.

Примеры. 1. Пусть $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x-1}$. Выясним, существует или нет $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Возьмем какую-либо последовательность x_n, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ и $x_n\neq 0$, $n=1, 2, \ldots$, тогда на основании теорем п. 3.5 имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2x_n^2+x_n+1}{x_n-1}=\frac{2\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right)^2+\lim\limits_{n\to\infty}x_n-1}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n-1}=1$$

(при этом мы считали $x_n\neq 1$, так как при $x=1$ рассматриваемая функция не определена). Таким образом, существует $\lim\limits_{x_n\to 0} f(x_n)=1$, и так как он не зависит от выбора последовательности $x_n\to 0$, $n=1, 2, \ldots$, то существует и $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

2. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ (рис. 12). Снова рассмотрим вопрос о существовании $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

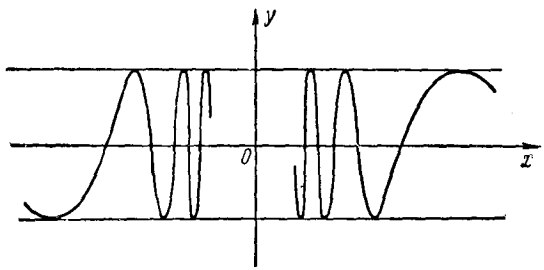


Рис. 12

Возьмем две последовательности: $x_n=\dfrac{1}{\pi n}$ и $x_n'=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, $n=1, 2, \ldots$. Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=0$, $x_n\neq 0$, $x_n'\neq 0$, $f(x_n)=\sin \pi n=0$, $f(x_n')=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$, $n=1, 2, \ldots$.

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} f\left(x_n'\right)=1,$$

и, значит, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует.

Замечание. Пусть функции f и g определены на интервале (a, b) кроме, быть может, точки x_0, и пусть $f(x)=g(x)$ при $x\neq x_0$, $x\in(a, b)$, тогда из того, что в определении предела функции в точке x_0 участвуют только значения функции в точках $x\neq x_0$, следует, что пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ одновременно существуют или нет, причем в первом случае $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. На этом простом замечании основано так называемое правило раскрытия неопределенностей с помощью сокращения дробей. Поясним его на примере.

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x^2+x-1)x}{x^2-x}$. Повторение рассуждений, аналогичных проведенным выше при разборе примера 1, приводит к выражению $\dfrac{0}{0}$ (к неопределенности), т. е. не дает ответа на вопрос о существовании и значении искомого предела. Однако, беря функцию $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$, получающуюся сокращением на x выражения $g(x)=\dfrac{(2x^2+x-1)x}{x^2-x}$ и, следовательно, такую, что $f(x)=g(x)$ при $x\neq 0$, вспоминая, что мы уже доказали существование $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, имеем, согласно сделанному замечанию,

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(2x^2+x-1)x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x-1}{x-1}=\lim_{x\to 0} f(x)=1.$$

Определение 3. *Пусть функция f определена на полуинтервале $(a, b]$, кроме, быть может, точки $x_0\in(a, b]$ (теперь не исключается и случай $x_0=b$), и пусть существует такое число B, что, какова бы ни была последовательность $x_n\in(a, b]$, $x_n<x_0$, $n=1, 2, \ldots$, сходящаяся к точке x_0, последовательность $f(x_n)$, $n=1, 2, \ldots$, сходится к числу B.*

В этом случае число B называется пределом слева функции f и обозначается $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

Аналогично определяется *предел справа* $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ *функции* $f(x)$ в точке $x_0\in[a, b)$. Именно $B=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, если из $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, $x_n>x_0$, $x_n\in[a, b)$, $n=1, 2, \ldots$, следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=B.$$

В случае $x_0 = 0$ вместо $x \to 0 + 0$ (соответственно вместо $x \to 0 - 0$ пишут просто $x \to +0$ (соответственно $x \to -0$). Пределы слева и справа функции называются односторонними в отличие от предела функции, определенного в начале этого пункта, который называется двусторонним пределом.

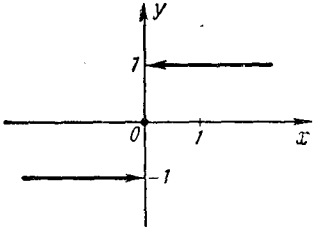


Рис. 13

В качестве примера рассмотрим функцию $y = \operatorname{sign} x$ (см. п. 4.1 и рис. 13). Пусть

$$x_n > 0, \quad x'_n < 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sign} x_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{sign} x'_n = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1,$$

значит,

$$\lim_{x\to+0} \operatorname{sign} x = 1, \quad \text{а} \quad \lim_{x\to-0} \operatorname{sign} x = -1.$$

4.5. Второе определение предела функции

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале (a, b), кроме, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$. Для того чтобы $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$*), *что для всех x из (a, b), удовлетворяющих условиям*

$$|x - x_0| < \delta, \quad x \neq x_0, \tag{4.4}$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{4.5}$$

выполняется неравенство

Доказательство необходимости. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Допустим, что условие теоремы не выполняется. Это означает, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $x = x(\delta) \neq x_0$ из (a, b), что $|x - x_0| < \delta$, но $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0$. Выбирая $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, рассмотрим последовательность $x_n = x\left(\frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, которая по построению удовлетворяет условиям

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n}, \quad x_n \neq x_0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.6}$$

*) Здесь запись $\delta = \delta(\varepsilon)$ подчеркивает зависимость δ от ε. Ничего не изменится, если во всех подобных случаях просто писать одно δ, не забывая, конечно, что оно зависит от ε.

и

$$|f(x_n)-A|\geqslant \varepsilon_0, \quad n=1, 2, \ldots . \tag{4.7}$$

Из (4.6) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Вместе с тем, поскольку $\varepsilon_0 > 0$, то из (4.7) заключаем, что число A не может являться пределом последовательности $f(x_n)$, $n=1, 2, \ldots$, а это противоречит тому, что $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Таким образом, необходимость рассматриваемого условия доказана.

Доказательство достаточности. Пусть число A удовлетворяет условию теоремы. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ для любой последовательности $\{x_n\}$ из (a, b), такой, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{и} \quad x_n \neq x_0, \quad n=1, 2, \ldots . \tag{4.8}$$

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано и $\delta = \delta(\varepsilon)$ выбрано согласно условию (4.4) — (4.5). Из (4.8) следует, что найдется такое n_ε, что $|x_n - x_0| < \delta$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$, поэтому в силу условия теоремы $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Теорема доказана.

Эта теорема позволяет дать другое определение предела функции в точке, которое будет эквивалентно исходному.

Определение 4. *Пусть функция f определена на интервале (a, b), кроме, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$. Число A называется пределом функции f в точке x_0, т. е. $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in (a, b)$, удовлетворяющих условию*

$$|x-x_0| < \delta, \quad x \neq x_0, \tag{4.9}$$

выполняется неравенство

$$|f(x)-A| < \varepsilon; \tag{4.10}$$

или, употребляя обозначения окрестностей (см. п. 3.1) $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, *если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $x \in (a, b)$ из условий*

$$x \in O(x_0, \delta), \quad x \neq x_0 \tag{4.11}$$

следует условие (рис. 14)

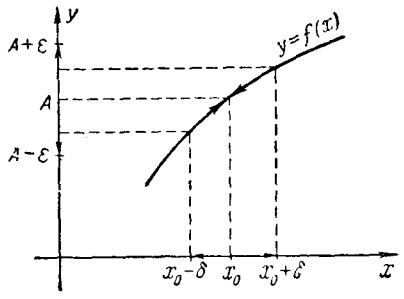


Рис. 14

$$f(x) \in O(A, \varepsilon). \qquad (4.12)$$

Для односторонних пределов функции в точке можно также дать новое определение.

Определение 5. *Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a, b]$ (соответственно на $[a, b)$). Число B называется пределом слева (справа) функции $f(x)$ в точке $x_0 \in (a, b]$ (соответственно $x_0 \in [a, b)$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что*

$$|f(x) - B| < \varepsilon \qquad (4.13)$$

для всех x, удовлетворяющих условию

$$x_0 - \delta < x < x_0 \ (\text{соответственно } x_0 < x < x_0 + \delta). \qquad (4.14)$$

В этом случае пишут

$$B = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \ (\text{соответственно } B = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)),$$

а также

$$B = f(x_0 - 0) \ (\text{соответственно } B = f(x_0 + 0)).$$

Совершенно аналогично теореме 1 доказывается, что данное определение эквивалентно исходному.

Связь между односторонними пределами и двусторонним пределом устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. *Функция f имеет предел в точке тогда и только тогда, когда в этой точке существуют пределы как справа, так и слева и они равны. В этом случае их общее значение и является двусторонним пределом функции f в точке x_0.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$; для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из $|x - x_0| < \delta$, следует $|f(x) - A| < \varepsilon$, и, значит, в частности, из условий (4.14) следует (4.13), т. е.

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad \text{и} \quad A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Обратно, если $A = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $A = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ и $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$, что если $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ и соответственно $x_0 < x < x_0 + \delta_2$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$. Следовательно, если δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2, то

$|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$. Это и означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Теорема доказана.

Лемма 1. *Если функция f имеет предел в точке x_0, то существует окрестность этой точки (быть может выброшенной точкой x_0), на которой функция f ограничена* (определение ограниченности функции см. в п. 4.1).

Чтобы в этом убедиться, зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$, например $\varepsilon = 1$, тогда, согласно определению предела, существует такое $\delta = \delta(1)$, что

$$A - 1 < f(x) < A + 1$$

для всех $x \in O(x_0, \delta)$, $x \neq x_0$, и, так как, кроме указанных значений $f(x)$, существует еще, быть может, только одно $f(x_0)$, то лемма доказана.

Лемма 2. *Если $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0$, то существует δ-окрестность $O(x, \delta)$ точки x_0, такая, что $f(x) \neq 0$ при $x \in O(x, \delta)$, $x \neq x_0$, и имеет тот же знак, что и число A.*

Доказательство. Пусть для определенности $A > 0$. Возьмем $\varepsilon = \frac{A}{2}$, тогда существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такая, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \frac{A}{2}$ и, следовательно, неравенство $f(x) - A > -\frac{A}{2}$; отсюда имеем $f(x) > \frac{A}{2} > 0$ при $0 < |x - x_0| < \delta$. Для случая $A > 0$ лемма доказана; в случае $A < 0$ следует взять $\varepsilon = -\frac{A}{2}$ и провести аналогичное рассуждение.

Леммы 1 и 2 понадобятся в дальнейшем.

Докажем теперь теорему, полезную для вычисления пределов.

Теорема 3 (правило замены переменного для пределов функций). *Пусть существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $f(x) \neq y_0$ при $x \neq x_0$, и $\lim\limits_{y \to y_0} F(y)$, тогда при $x \to x_0$ существует предел сложной функции $F[f(x)]$ и*

$$\lim_{x \to x_0} F[f(x)] = \lim_{y \to y_0} F(y). \tag{4.15}$$

Доказательство. Из определения предела функции следует, что при сделанных предположениях функции f и F определены в некоторых окрестностях соответственно точек x_0 и y_0, кроме, быть может, самих этих точек. Покажем, что существует такая δ-окрестность точки x_0, что при $x \in O(x_0, \delta)$, $x \neq x_0$, имеет смысл сложная функция $F[f(x)]$ и, следовательно, можно ставить вопрос о существо-

вании ее предела при $x \to x_0$. Пусть функция $F(y)$ определена в ε-окрестности точки y_0, кроме, быть может, самой точки y_0, тогда из существования $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ следует существование такого $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|f(x) - y_0| < \varepsilon$ при $0 < |x - x_0| < \delta$. Поскольку, кроме того, по предположению $f(x) \neq y_0$ при $x \neq x_0$, то для $x \in O(x_0, \delta)$ имеет смысл суперпозиция $F[f(x)]$.

Пусть теперь $\{x_n\}$ — какая-либо последовательность, такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$, $x_n \in O(x_0, \delta)$, $n = 1, 2, \ldots$, и пусть $y_n = f(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. По условию теоремы $y_n \neq y_0$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y_0$. В силу существования предела $\lim\limits_{y \to y_0} F(y)$, который обозначим через A, имеем

$$\lim_{n \to \infty} F[f(x_n)] = \lim_{n \to \infty} F[y_n] = A.$$

Поскольку это верно для любой указанной последовательности $\{x_n\}$, то это и означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} F[f(x)] = A$.

Теорема доказана.

Замечание. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0; пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $f(x) \neq y_0$ при $x \neq x_0$ и пусть функция f имеет однозначную обратную функцию f^{-1}, определенную в некоторой окрестности точки y_0, и такую, что $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y_0) = x_0$, $f^{-1}(y) \neq x_0$ при $y \neq y_0$. Этот факт мы будем кратко выражать словами «условия $x \to x_0$ и $y \to y_0$ эквивалентны». Это имеет то оправдание, что при сделанных предположениях из существования каждого из пределов в равенстве (4.15) следуют существование другого предела и их равенство.

Действительно, в силу доказанного выше надо лишь из существования $\lim\limits_{x \to x_0} F[f(x)]$ доказать существование $\lim\limits_{y \to y_0} F(y)$. Если $\lim\limits_{x \to x_0} F[f(x)]$ существует, то по доказанной теореме существует и предел $\lim\limits_{y \to y_0} F\{f[f^{-1}(y)]\} = \lim\limits_{x \to x_0} F[f(x)]$. Но $f[f^{-1}(y)] = y$, следовательно, существует $\lim\limits_{y \to y_0} F(y)$.

4.6. Свойства пределов функций

Все функции, рассматриваемые ниже в этом пункте, определены на некотором интервале (a, b), кроме, быть может, фиксированной точки $x_0 \in (a, b)$. Сформулируем несколько свойств пределов функций.

1. *Если* $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = A$, *то*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

2. *Если* $f(x) = c$ (*постоянная*), *то*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c.$$

3. *Если* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *существует, то для любого числа* c

$$\lim_{x \to x_0} cf(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x).$$

4. *Если существуют* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, *то*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x),$$

а если $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, *то и*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Отметим, что можно ставить вопрос о пределе $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, так как при предположении $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, в силу леммы 2 п. 4.5, функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки.

Все эти свойства доказываются одинаковым методом, основанным на соответствующих свойствах пределов последовательностей.

Докажем для примера формулу

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Пусть $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Тогда, согласно определению предела функции в точке x_0,

$$A = \lim_{n \to \infty} f(x_n), \quad B = \lim_{n \to \infty} g(x_n)$$

для любой последовательности $\{x_n\}$, такой, что $x_n \in (a, b)$, $x_n \neq x_0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Поэтому, применяя свойство предела произведения двух последовательностей, получим

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)\, g(x_n) = AB,$$

причем этот предел не зависит от выбора соответствующей последовательности $\{x_n\}$. Тогда опять, согласно определению предела функции в точке x_0,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\, g(x) = AB.$$

Утверждения, аналогичные свойствам 1—4, имеют место и для односторонних пределов. Доказательства также аналогичны.

4.7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Все функции, рассматриваемые в этом пункте, определены на интервале (a, b) (конечном или бесконечном), кроме, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$.

Определение 6. *Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией (или просто бесконечно малой) при $x \to x_0$, если* $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Бесконечно малые функции, как и бесконечно малые последовательности, играют существенную роль, связанную, в частности, с тем, что общее понятие предела может быть сведено к понятию бесконечно малой.

Лемма. *Предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует и равен A тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.*

Действительно, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то, полагая $f(x) - A = \alpha(x)$, получим $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - A = 0$.

Наоборот, если $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A + \lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = A$.

Теорема 4. *Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$, а также произведение бесконечно малой функции при $x \to x_0$ на ограниченную функцию являются бесконечно малыми при $x \to x_0$ функциями.*

Эта теорема непосредственно следует из теорем п. 3.4 и определения предела функции в п. 4.4.

Определение 7. *Функция* $f = f(x)$ *называется бесконечно большой при* $x \to x_0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что* $|f(x)| > \varepsilon$ *для всех* x, *удовлетворяющих условию* $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Если же для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что* $f(x) > \varepsilon$ (*соответственно* $f(x) < -\varepsilon$) *для всех* x, *удовлетворяющих условию* $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, *то пишут* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$).

Упражнение 4. Функция $\alpha = \alpha(x)$, $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$, является бесконечно малой (бесконечно большой) при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой (соответственно бесконечно малой).

По аналогии с конечными односторонними пределами определяются и односторонние бесконечные пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty \text{ и т. д.}$$

Например, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$, *если, каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что* $f(x) > \varepsilon$ *для всех* x, *удовлетворяющих условию* $x_0 - \delta < x < x_0$.

Точное определение других подобных пределов предоставляется самим учащимся по мере потребности.

Пусть теперь интервал (a, b) не ограничен, например, вида $(a, +\infty)$. Тогда можно говорить о пределе $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ конечном или бесконечном. Например, *говорят, что* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon > 0)$, *что* $|f(x) - A| < \varepsilon$ *для всех* $x > \delta$.

Упражнения. 5. Сформулировать определение предела $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ с помощью понятия предела последовательности и на «ε — δ-языке»; доказать их эквивалентность.

6. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \infty$.

То, что величина, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой, и наоборот (см. упражнение 4), делает естествен-

ной следующую символическую запись, часто употребляющуюся для сокращения записи: для любого числа $a > 0$ пишут

$$\frac{a}{+0} = +\infty, \quad \frac{a}{-0} = -\infty, \quad \frac{a}{0} = \infty,$$

$$\frac{a}{+\infty} = 0, \quad \frac{a}{-\infty} = -0, \quad \frac{a}{\infty} = 0.$$

В дальнейшем, говоря о пределе функции, всегда будем подразумевать конечный предел, если только не оговорено противное.

4.8. Пределы монотонных функций

Определение 8. *Пусть функция f определена на числовом множестве E. Функция f называется монотонно возрастающей (монотонно убывающей) на E, если для любых $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).*

Теорема 5. *Если функция f монотонно возрастает на интервале (a, b), то в точках a и b у функции f существуют (конечные или бесконечные) односторонние пределы и*

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \sup_{(a,\,b)} f, \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = \inf_{(a,\,b)} f.$$

Если же функция f монотонно убывает на (a, b), то

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \inf_{(a,\,b)} f, \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = \sup_{(a,\,b)} f.$$

Доказательство. Пусть функция f монотонно возрастает на интервале (a, b). Если $A = \sup\limits_{(a,\,b)} f < +\infty$, то, согласно определению верхней грани функции (см. п. 2.1 и 4.1), для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такое $x_\varepsilon \in (a, b)$, что $A - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leqslant A$. Положим $\delta = b - x_\varepsilon$. Тогда в силу монотонности $f(x) \geqslant f(x_\varepsilon)$ для любого $x > x_\varepsilon$, а в силу определения верхней грани $f(x) \leqslant A$. Таким образом, если $b - \delta < x < b$, то $A - \varepsilon < f(x) \leqslant A$. Это в силу произвольности ε и означает, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = A$.

Если $\sup\limits_{(a,\,b)} f = +\infty$, то для любого фиксированного ε существует такое $x_\varepsilon \in (a, b)$, что $f(x_\varepsilon) > \varepsilon$. Положим снова $\delta = b - x_\varepsilon$, тогда в силу монотонности $f(x) \geqslant f(x_\varepsilon) > \varepsilon$ для любого x, такого, что $x_\varepsilon = b - \delta < x < b$, а это и означает, что $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$.

Аналогично доказываются и другие утверждения теоремы.

Следствие. *Монотонная на интервале функция f имеет конечный предел как справа, так и слева в каждой точке этого интервала.*

Действительно, если функция f монотонно возрастает (убывает) на интервале (a, b), то, каково бы ни было $x_0 \in (a, b)$, $f(x_1) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_2)$ для любых $x_1 \in (a, x_0)$ и $x_2 (x_0, b)$ (соответственно $f(x_1) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_2)$). Поэтому $\sup\limits_{(a, x_0)} f \leqslant f(x_0) \leqslant \inf\limits_{(x_0, b)} f$ (соответственно $\inf\limits_{(a, x_0)} f \geqslant f(x_0) \geqslant \sup\limits_{(x_0, b)} f$), т. е. пределы $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, существующие согласно теореме 4, конечны.

Упражнение 7. Доказать, что теорема 4 остается справедливой и в случае, когда интервал (a, b) бесконечен.

4.9. Критерий Коши существования предела функции

Применяя термин «окрестность», понятие предела для различных случаев можно перефразировать единым образом.

В дополнение к введенным ранее в п. 3.1 и 3.4 понятиям окрестности числа и символов ∞, $+\infty$ и $-\infty$ введем еще понятие *односторонних окрестностей числа* x_0 (в отличие от обычных окрестностей, которые естественно назвать двусторонними), а именно δ-окрестность слева $O(x_0 - 0, \delta)$ определим по формуле

$$O(x_0 - 0, \delta) = \{x : x_0 - \delta < x \leqslant x_0\}, \quad \delta > 0,$$

и δ-окрестность справа $O(x_0 + 0, \delta)$ — по формуле

$$O(x_0 + 0, \delta) = \{x : x_0 \leqslant x < x_0 + \delta\}, \quad \delta > 0.$$

Теперь сформулируем определение предела функции с помощью понятия окрестности.

Определение 9. *Величина A (т. е. число или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$) называется пределом функции f при $x \to a$ (где a — число x_0 или один из символов $x_0 + 0$, $x_0 - 0$, ∞, $+\infty$, $-\infty$), если для любой ε-окрестности $O(A, \varepsilon)$ величины A существует такая δ-окрестность $O(a, \delta)$ величины a, что $f(x) \in O(A, \varepsilon)$ для всех $x \in O(a, \delta)$, $x \neq a$ (в случаях $a = x_0 + 0$ и $a = x_0 - 0$ последнее условие понимается по определению как $x \neq x_0$).*

Нетрудно убедиться, что это определение содержит в себе в качестве частных случаев все данные раньше определения соответствующих пределов функций.

Введение такой терминологии позволяет упрощать доказательства теорем о пределах функции, проводя их единым образом, для

двусторонних и односторонних, для конечных и бесконечных пределов функций независимо от того, стремится аргумент к конечному или бесконечному пределам.

Как и в случае предела последовательности, можно получить необходимое и достаточное условие того, что функция f имеет предел при $x \to a$, не используя самого значения предела, а в терминах лишь значений самой функции в окрестности величины a.

Сформулируем это условие, пользуясь понятием окрестности, чтобы при их доказательстве не разбирать отдельно случаи, когда a является числом x_0 и когда a является одним из символов ∞, $-\infty$, $+\infty$, $x_0 + 0$, $x_0 - 0$.

Определение 10. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности величины a, кроме, быть может, $x = a$, (если это имеет смысл, т. е. если $a = x_0$ — число). Будем говорить, что функция f при $x \to a$ удовлетворяет условию Коши, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ для любых $x \in O(a, \delta)$, $x' \in O(a, \delta)$ и $x \neq a$, $x' \neq a$.*

Теорема 6. (критерий Коши). *Для того чтобы функция f имела конечный предел при $x \to a$, где a — либо число x_0, либо один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$, $x_0 + 0$, $x_0 - 0$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши при $x \to a$.*

Доказательство необходимости. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, где A — число. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$, что для любой точки $x \in O(a, \delta)$, $x \neq a$,

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{4.16}$$

Пусть $x \in O(a, \delta)$, $x' \in O(a, \delta)$, $x \neq a$, $x' \neq a$, тогда в силу (4.16)

$$|f(x') - f(x)| = |[f(x') - A] + [A - f(x)]| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x') - A| + |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. условие Коши выполняется.

Доказательство достаточности. Пусть последовательность $\{x_n\}$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \quad x_n \neq a, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.17}$$

Покажем, что последовательность $f(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится.

Пусть фиксировано $\varepsilon > 0$. Согласно условию Коши, существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех

$$x \in O(a, \delta), \quad x' \in O(a, \delta), \quad x \neq a, \quad x' \neq a, \tag{4.18}$$

выполняется неравенство

$$|f(x')-f(x)|<\varepsilon. \tag{4.19}$$

В силу условия (4.17) для окрестности $O(a, \delta)$ существует такой номер n_δ, что $x_n \in O(a, \delta)$ при $n \geqslant n_\delta$; поэтому при любых $n \geqslant n_\delta$ и $m \geqslant n_\delta$

$$x_n \in O(a, \delta), \quad x_m \in O(a, \delta),$$

и, значит, в силу (4.18) и (4.19) условие

$$|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет условию Коши для последовательностей и потому сходится (см. п. 3.2) к некоторому числу B:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=B. \tag{4.20}$$

Покажем теперь, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n')=B,$$

какова бы ни была другая последовательность $\{x_n'\}$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n' = a, \quad x_n' \neq a, \quad n=1, 2, \ldots. \tag{4.21}$$

Действительно, образуем новую последовательность

$$x_n'' = \begin{cases} x_n, & \text{если } n=2k+1,\ k=0, 1, 2, \ldots, \\ x_n', & \text{если } n=2k, \quad k=1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n''=a$ и $x_n'' \neq a$ для всех $n=1, 2, \ldots$. Поэтому по доказанному существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$, а так как предел любой сходящейся последовательности совпадает с пределом любой ее подпоследовательности, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} f(x_n'') = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Таким образом, согласно определению предела функции (см. п. 4.4),

$$\lim_{x\to a} f(x)=B.$$

Критерий Коши для функций доказан.

В случае, если $a = x_0$ является числом, то условие Коши можно перефразировать следующим образом: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ для любых x и x', удовлетворяющих условиям $|x - x_0| < \delta$, $|x' - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, $x' \neq x_0$.

В случае же когда $a = \infty$ условию Коши можно придать следующий вид: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ для любых x и x', удовлетворяющих условию $|x| > \delta$, $|x'| > \delta$.

Следует отметить, что эти два критерия существования предела функции, относящиеся к разным случаям и имеющие разную формулировку, благодаря удачно выбранной терминологии (понятию окрестности) получили единое доказательство.

Для случая односторонних пределов*) условие Коши можно перефразировать без терминов окрестности следующим образом: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta = \eta(\varepsilon)$, что

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon$$

для любых x и x', удовлетворяющих условию $\eta \leqslant x < a$, $\eta \leqslant x' < a$ в случае предела слева и соответственно $a < x \leqslant \eta$, $a < x' \leqslant \eta$ в случае предела справа.

§ 5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

5.1. Точки непрерывности и точки разрыва функции

Определение 1. *Функция f, определенная на интервале (a, b), называется непрерывной в точке $x_0 \in (a, b)$, если*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.1}$$

Согласно определению предела функции в точке (см. п. 4.4), это утверждение равносильно тому, что для любой последовательности x_n, $n = 1, 2, \ldots, x_n \in (a, b)$, такой, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \tag{5.2}$$

последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится и

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0). \tag{5.3}$$

Согласно же определению предела функции в точке (см. п. 4.6), условие (5.1) равносильно условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta, \tag{5.4}$$

*) Мы, естественно, причисляем понятие предела функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ к понятию одностороннего предела.

выполняется неравенство (рис. 15)

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{5.5}$$

Отметим, что при этих определениях непрерывности функции в точке x_0 в условиях (5.2) и (5.4) опущено требование $x \neq x_0$, так как в данном случае оно является лишним (почему?).

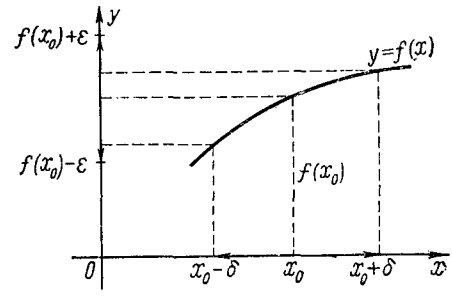


Рис. 15

Упражнение 1. Доказать, что если в определении предела функции f в точке x_0 в смысле п. 4.4 или п. 4.5 отбросить условие $x \neq x_0$, то мы получим определение непрерывности функции f в точке x_0.

Например, если функция $f(x)$ определена на интервале (a, b), $x_0 \in (a, b)$ и если существует число A, обладающее свойством, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, то функция f непрерывна в точке x_0.

Определение непрерывности функции f в точке x_0 можно еще перефразировать так: функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если, какова бы ни была заданная степень точности $\varepsilon > 0$ для значений функции, существует такая степень точности для аргумента $\delta = \delta(\varepsilon)$, что коль скоро мы возьмем значение аргумента x, равное x_0 с точностью δ, т. е. удовлетворяющее неравенству (5.4), и возьмем в нем значение функции f, то мы получим значение $f(x_0)$ с заданной степенью точности, т. е. будет выполнено неравенство (5.5).

Как и в случае определения предела, определение непрерывности функции в точке можно дать на языке окрестностей. Функция f непрерывна в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$f[O(x_0, \delta)] \subset O(f(x_0), \varepsilon). \tag{5.6}$$

Наконец, перенося $f(x_0)$ в равенстве (5.1) в левую часть равенства, внося $f(x_0)$ под знак предела и замечая, что условие $x \to x_0$ равносильно условию $x - x_0 \to 0$, получим

$$\lim_{x-x_0\to 0}[f(x)-f(x_0)]=0. \tag{5.7}$$

Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* и обозначается Δx, а разность $f(x) - f(x_0)$ — *приращением функции*,

соответствующим данному приращению аргумента Δx, и обозначается Δy; таким образом,

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{5.8}$$

В этих обозначениях равенство (5.7) перепишется в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \tag{5.9}$$

т. е. непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Примеры. 1. Покажем, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 \neq 0$.

В самом деле,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x}{(x_0 + \Delta x)\, x_0},$$

откуда при $x_0 \neq 0$ имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{(x_0 + \Delta x)\, x_0} = 0,$$

что и означает, согласно (5.9), непрерывность функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке x_0.

2. Покажем, что функция $f(x) = |\operatorname{sign} x|$ (см. рис. 13) не является непрерывной в точке $x_0 = 0$.

Действительно, $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sign} x| = 1$ и этот предел не совпадает со значением $\operatorname{sign} 0 = 0$.

Определение 2. *Пусть теперь функция f определена на интервале (a, b), кроме, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$. Если функция f не непрерывна в точке x_0, то точка x_0 называется точкой разрыва функции f.*

Упражнение 2. Сформулировать определение точки разрыва функции в позитивном смысле, т. е. не употребляя никаких отрицаний «не», «нет», «нельзя», «невозможно» и т. п. (см. п. 3.1).

Определение 3. *Если x_0 — точка разрыва функции f и существуют конечные пределы*

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad \text{и} \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода. Величина $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется скачком функции f в точке x_0.

Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, *то* x_0 *называется точкой устранимого разрыва.*

Последнее оправдано тем, что если в этом случае видоизменить или доопределить (если функция f была не определена в точке x_0) функцию f, положив

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x),$$

то получится непрерывная в точке x_0 функция.

Точка разрыва функции f, *не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется точкой разрыва второго рода.* Таким образом, в точках разрыва второго рода по крайней мере один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ не существует. (Здесь под пределом, как обычно, понимается лишь конечный предел.)

Упражнение 3. Сформулировать определение точки разрыва второго рода для функции в позитивном смысле.

Функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ (см. рис. 13) имеет в точке $x_0 = 0$ разрыв первого рода, а функции $f(x) = \frac{1}{x}$ и $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 0$ имеют разрывы второго рода. Всякая функция, монотонная на некотором интервале, может иметь только точки разрыва первого рода (см. следствие теоремы 4 п. 4.8).

Определение 4. *Пусть функция* f *определена на полуинтервале* $(a; b]$ (*соответственно на полуинтервале* $[a, b)$) *и* $x_0 \in (a, b]$ (*соответственно* $x_0 \in [a, b)$). *Функция* f *называется непрерывной слева* (*непрерывной справа*) *в точке* x_0, *если* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ (*соответственно если* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$).

Пример. Рассмотрим функцию, определенную на всей числовой оси и для каждого числа x равную наибольшему целому числу, меньшему или равному x.

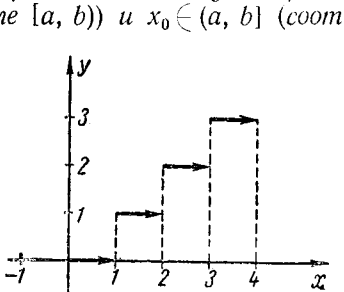


Рис. 16

Эта функция имеет специальное обозначение $y = [x]$, что читается «y равно *entier* x»*). Ее график изображен на рис. 16. Функция $[x]$ в точках $x = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, непрерывна справа и разрывна слева; во всех же других точках она непрерывна как справа, так и слева, таким образом, в частности, $[x]$ непрерывна справа во всех точках.

*) ***Entier*** — **целый** (франц.).

5.2. Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 1. *Если функции f и g непрерывны в точке x_0, то функции cf (c — постоянное) $f+g$, fg, а если, кроме того, $g(x_0)\neq 0$, то и функция $\frac{f}{g}$ — также непрерывны в точке x_0.*

Эта теорема вытекает непосредственно из определения непрерывности и свойств пределов функций (см. п. 4.6). Докажем, например, непрерывность функции fg. Согласно свойству 4 п. 4.6, имеем

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\,g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\,g(x_0), \tag{5.10}$$

ибо пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ существуют и в силу непрерывности f и g в точке x_0 соответственно равны $f(x_0)$ и $g(x_0)$. Выполнение равенства (5.10) и означает наличие непрерывности функции fg в точке x_0.

Лемма. *Пусть функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0=\varphi(x_0)$, тогда существует δ-окрестность $O(x_0,\delta)$, такая, что при $x\in O(x_0,\delta)$ имеет смысл сложная функция $f[\varphi(x)]$.*

Действительно, поскольку функция f непрерывна в точке y_0, то она определена в некоторой ε-окрестности $O(y_0,\varepsilon)$ этой точки; тогда, согласно (5.6), существует окрестность $O(x_0,\delta)$, такая, что $\varphi[O(x_0,\delta)]\subset O(y_0,\varepsilon)$, следовательно, для $x\in O(x_0,\delta)$ имеет смысл суперпозиция $f[\varphi(x)]$.

Теорема 2. *Пусть функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0=\varphi(x_0)$, тогда сложная функция $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.*

Короче, но менее точно: непрерывная функция от непрерывной функции является непрерывной функцией.

Доказательство. Прежде всего согласно только что доказанной лемме, сложная функция $f[\varphi(x)]$ определена в некоторой окрестности точки x_0, и потому можно ставить вопрос о ее непрерывности в этой точке.

Пусть фиксировано $\varepsilon>0$. Тогда в силу непрерывности функции f в точке y_0 существует такое $\eta=\eta(\varepsilon)>0$, что если

$$|y-y_0|<\eta, \tag{5.11}$$

то

$$|f(y)-f(y_0)|<\varepsilon. \tag{5.12}$$

Далее, для полученного $\eta>0$ в силу непрерывности функции φ в точке x_0 существует такое $\delta=\delta(\eta)>0$, что если $|x-x_0|<\delta$, то $|\varphi(x)-y_0|<\eta$.

Таким образом, если $|x-x_0|<\delta$, то выполняется условие (5.11), где $y=\varphi(x)$, а значит, и (5.12), которое для рассматриваемого случая имеет вид

$$|f[\varphi(x)]-f[\varphi(x_0)]|<\varepsilon.$$

Это и означает непрерывность сложной функции $f(\varphi)$ в точке x_0.

Теорема доказана.

Утверждение теоремы можно записать в виде формулы

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)], \tag{5.13}$$

из которой видно, что *операция предельного перехода перестановочна с операцией взятия непрерывной функции.*

В самом деле, левая часть равенства (5.13) равна $f[\varphi(x_0)]$, согласно утверждению теоремы, правая часть также равна $f[\varphi(x_0)]$ в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x_0.

При отыскании пределов непрерывных функций теорему 2 удобно использовать еще в одном виде, в виде следующего правила.

Правило замены переменных для пределов непрерывных функций

$$\lim_{y\to y_0} f(y)=\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]$$

Теорема 2 естественным образом переносится и на случай односторонней непрерывности (сформулируйте ее в этом случае).

Упражнения. 4. Доказать, что если для функции $x=\varphi(t)$ существует предел $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=x_0$, а функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, то в некоторой окрестности точки t_0, кроме, быть может, самой точки t_0, имеет смысл суперпозиция $f[\varphi(t)]$ и существует

$$\lim_{t\to t_0} f[\varphi(t)]=f(x_0).$$

5. Сформулировать и доказать правила замены переменных для односторонних пределов функций.

§ 6. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ПРОМЕЖУТКАХ

6.1. Ограниченность непрерывных функций. Достижимость экстремальных значений

Определение 1. *Функция, определенная на отрезке* $[a, b]$ *и непрерывная в каждой его точке, называется функцией, непрерывной на отрезке.*

При этом под непрерывностью в точке a понимается непрерывность справа, а под непрерывностью в точке b — непрерывность слева.

Аналогично определяется и непрерывность функции на промежутке любого другого вида.

Теорема 1. (Вейерштрасс*). *Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена.*

Доказательство. Допустим противное — что существует некая функция $f(x)$, непрерывная на некотором отрезке $[a, b]$, но неограниченная на $[a, b]$. Последнее означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такая точка $x_\varepsilon \in [a, b]$, что $|f(x_\varepsilon)| > \varepsilon$. Беря последовательно $\varepsilon = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, получим последовательность точек $x_n \in [a, b]$, для которых $|f(x_n)| \geqslant n$. Согласно теореме Больцано — Вейерштрасса (см. п. 3.2), из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Из условия $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, $k = 1, 2, \ldots$, следует (см. п. 3.1), что $a \leqslant x_0 \leqslant b$. Теперь, замечая, что $|f(x_{n_k})| \geqslant n_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, имеем $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$; с другой стороны, в силу непрерывности функции f в точке x_0 (см. (5.3)) $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$, в частности, рассматриваемый предел конечен.

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Заметим, что теорема, аналогичная теореме 1, не справедлива для промежутков другого вида, чем отрезок; в этом легко убедиться, построив соответствующие примеры. Например, функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке интервала $(0; 1)$ и вместе с тем не ограничена на нем; функция $y = x$ непрерывна на всей вещественной оси и неограничена на ней.

Теорема 2. (Вейерштрасс). *Всякая непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке как наибольшее, так и наименьшее значение.*

Доказательство. Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $M = \sup\limits_{[a, b]} f$; согласно теореме 1, M — конечно. Допустим, что функция f не достигает своей верхней грани M, т. е. $f(x) \neq M$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда функция $\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, как частное от деления двух непрерывных функций с делителем, не обращающимся в ноль (см. п. 5.2). Но в силу определения верхней грани разность $M - f(x)$ может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора x, говоря

*) К. Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик.

точнее: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $x_\varepsilon \in [a, b]$, что $0 \leqslant M - f(x_\varepsilon) < \varepsilon$ и, значит, $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x_\varepsilon)} > \dfrac{1}{\varepsilon}$. В силу того, что $\dfrac{1}{\varepsilon}$, так же как и ε, — произвольное положительное число, функция $\varphi(x)$ неограничена на отрезке $[a, b]$, что противоречит теореме 1. Таким образом, существует по крайней мере одна точка $\xi \in [a, b]$, такая, что $f(\xi) = M$.

Если $m = \inf\limits_{[a,b]} f$, то $-m = \sup\limits_{[a,b]} (-f)$. Так как $-f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ (см. п. 5.2), то в силу уже доказанного существует такая точка $\eta \in [a, b]$, что $-f(\eta) = -m$, т. е. $f(\eta) = m$.

Теорема доказана.

Отметим, что если функция f непрерывна не на отрезке, а на промежутке другого типа и даже, кроме того, ограничена на нем, она вообще говоря, не имеет наибольшего и наименьшего значения. Например, функция $y = x$ на интервале $(0; 1)$ и функция $y = \operatorname{arctg} x$ на всей вещественной прямой, хотя непрерывны и ограничены на указанных промежутках, не достигают своих верхней и нижней граней.

Упражнение 1. Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(x) > 0$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда существует $c > 0$, такое, что $f(x) \geqslant c$ для всех $x \in [a, b]$.

6.2. Промежуточные значения непрерывной функции

Теорема 3. (Коши). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для любого значения C, заключенного между A и B, существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = C$.*

Иначе говоря, *непрерывная на отрезке функция, принимающая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное.*

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) = A < B = f(b)$ и $A < C < B$. Разделим отрезок $[a, b]$ точкой x_0 на два равных отрезка, тогда либо $f(x_0) = C$ и, значит, искомая точка $\xi = x_0$ найдена, либо $f(x_0) \neq C$, и тогда на концах одного из полученных отрезков функция f принимает значения, лежащие по разные стороны от числа C, точнее — на левом конце значение, меньшее C, на правом — большее.

Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$ и разделим его снова на два равных отрезка и т. д. В результате либо через конечное число шагов придем к искомой точке ξ, в которой $f(\xi) = C$, либо получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, по длине стремящихся к нулю и таких, что

$$f(a_n) < C < f(b_n). \tag{6.1}$$

Пусть ξ — общая точка системы отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ (см. п. 1.1). Как мы знаем (см. п. 3.2),

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Поэтому в силу непрерывности функции

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n). \tag{6.2}$$

Из (6.1) же получим (см. п. 3.1)

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant C \leqslant \lim_{n\to\infty} f\ b_n). \tag{6.3}$$

Из (6.2) и (6.3) следует, что $f(\xi) = C$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разного знака, то на этом отрезке существует точка, в которой функция обращается в нуль.*

Это следствие есть просто частный случай теоремы.

Следствие 2. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $M = \sup\limits_{[a,b]} f$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f$. Тогда функция f принимает любое значение из отрезка $[m, M]$.*

Для доказательства следствия 2 заметим, что если $M = \sup\limits_{[a,b]} f$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f$, то, согласно теореме 2, существуют такие точки $\alpha \in [a, b]$ и $\beta \in [a, b]$, что $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$. Теперь утверждение следствия непосредственно вытекает из теоремы 3, примененной к отрезку $[\alpha, \beta]$, если $\alpha \leqslant \beta$, или соответственно к отрезку $[\beta, \alpha]$, если $\beta < \alpha$.

Отметим, что свойство непрерывных функций, подобное рассмотренному, имеет место для любого промежутка (конечного или бесконечного). Именно: если непрерывная на некотором промежутке функция принимает в двух его точках a и b, причем $a < b$, два каких-то значения, то она принимает и любое промежуточное.

В самом деле, согласно теореме 3, рассматриваемая функция принимает указанное значение заведомо в некоторой точке отрезка $[a, b]$, который является частью исходного промежутка.

6.3. Обратные функции

Определение 2. *Функция f, определенная на числовом множестве E, называется строго монотонно возрастающей (строго монотонно убывающей), если для любых двух чисел $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).*

Функция, строго монотонно возрастающая или строго монотонно убывающая, называется строго монотонной.

Теорема 4. *Пусть функция f определена, строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда обратная функция f^{-1}*) определена, однозначна, строго монотонна и непрерывна на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство. Проведем доказательство теоремы для строго монотонно возрастающих функций. Пусть $c = f(a)$, $d = f(b)$.

Покажем, что областью определения обратной функции f^{-1} является сегмент $[c, d]$, или, что то же, что сегмент $[c, d]$ является множеством значений функции f. В самом деле, из условия монотонного возрастания функции f следует, что $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, т. е. что $f(x) \in [c, d]$ для любого $x \in [a, b]$. С другой стороны, каково бы ни было $y \in [c, d]$, т. е. $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, согласно теореме 3, существует такая точка $x \in [a, b]$, что $f(x) = y$. Таким образом, все значения заданной функции f лежат на отрезке $[c, d]$, и каждая точка этого отрезка является значением функции f в некоторой точке. Это и означает, что отрезок $[c, d]$ является множеством значений функции f.

Покажем теперь, что функция f^{-1} однозначна на отрезке $[c, d]$. Допустим противное: пусть существует точка $y \in [c, d]$, такая, что множество $f^{-1}(y)$ содержит по крайней мере две различные точки x_1 и x_2. Согласно определению обратной функции, это означает, что

$$f(x_1) = f(x_2) = y. \tag{6.4}$$

Но так как $x_1 \neq x_2$, то либо $x_1 < x_2$, либо $x_1 > x_2$, но тогда в силу строго монотонного возрастания функции f в первом случае $f(x_1) < f(x_2)$, во втором $f(x_1) > f(x_2)$; и то и другое противоречит условию (6.4). Значит, обратная функция f^{-1} однозначна.

Покажем далее, что функция f^{-1} строго монотонно возрастает на отрезке $[c, d]$. Пусть $y_1 \in [c, d]$, $y_2 \in [c, d]$,

$$y_1 < y_2, \tag{6.5}$$

$x_1 = f^{-1}(y_1)$ и $x_2 = f^{-1}(y_2)$, и, значит, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$.

Для любых двух чисел x_1 и x_2 возможно одно из трех соотношений: $x_1 = x_2$, $x_1 > x_2$ или $x_1 < x_2$. Первые два случая невозможны,

*) Определение обратной функции см. в п. 4.1.

так как если бы $x_1 = x_2$, то $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, а если бы $x_1 > x_2$, то $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$, и то и другое противоречит условию (6.5). Таким образом, из условия (6.5) вытекает условие $x_1 < x_2$, что и означает строгое монотонное возрастание функции f^{-1}.

Покажем, наконец, что функция f^{-1} непрерывна на отрезке $[c, d]$. Пусть $y_0 \in [c, d]$ и $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Пусть сначала $c < y_0 < d$, т. е. y_0 — внутренняя точка отрезка $[a, b]$, тогда, в силу строго монотонного возрастания функции f^{-1} и $a < x_0 < b$. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, можно считать (почему?), что ε таково, что

$$a \leqslant x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \leqslant b. \quad (6.6)$$

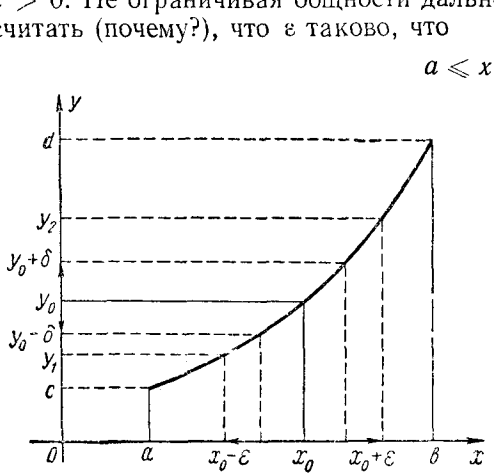


Рис. 17

Пусть $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Тогда из условия (6.6) в силу строго монотонного возрастания функции f, следует, что

$$c \leqslant y_1 < y_0 < y_2 \leqslant d.$$

Возьмем $\delta > 0$ так, чтобы $y_1 \leqslant y_0 - \delta < y_0 + \delta \leqslant y_2$ (рис. 17). Если теперь выбрать y так, что

$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta,$$

то тем более

$$y_1 < y < y_2,$$

и, следовательно, в силу строгого монотонного возрастания функции f^{-1} справедливо неравенство

$$x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon.$$

Таким образом, для $\varepsilon > 0$ указано такое $\delta > 0$, что

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

для всех $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, т. е. функция f^{-1} непрерывна в точке y_0. Если теперь $y_0 = c$ или $y_0 = d$, то аналогичными рассуждениями доказывается, что функция f^{-1} непрерывна справа в точке c и непрерывна слева в точке d.

Теорема для строго монотонно возрастающих функций доказана полностью.

Заметим, что функция f строго монотонно убывает тогда и только тогда, когда функция $-f$ строго монотонно возрастает, поэтому спра-

ведливость теоремы для строго монотонно убывающих функций следует из рассмотренного случая.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай функции, определенной на интервале.

Лемма. *Пусть функция f определена, строго монотонна и непрерывна на интервале (a, b) (конечном или бесконечном) и пусть (см. п. 4.4)*

$$c = \lim_{x \to a+0} f(x), \quad d = \lim_{x \to b-0} f(x), \tag{6.7}$$

тогда обратная функция f^{-1} определена на интервале с концами c и d, т. е. при отображении f образом интервала является также интервал (конечный или бесконечный).

В самом деле, пусть для определенности функция f строго монотонно возрастает (случай строго монотонно убывающей функции сводится к этому приемом, указанным при доказательстве теоремы 4) и пусть

$$a < a_n < b_n < b,$$

$$f(a_n) = c_n, \quad f(b_n) = d_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = b, \tag{6.8}$$

тогда в силу (6.7)

$$\lim_{n \to \infty} c_n = c, \quad \lim_{n \to \infty} d_n = d. \tag{6.9}$$

Как известно (см. п. 4.8),

$$c = \inf_{(a,\ b)} f, \quad d = \sup_{(a\ \ b)} f, \tag{6.10}$$

поэтому $c \leqslant f(x) \leqslant d$ для любой точки $x \in (a, b)$. Если бы нашлась такая точка $x_0 \in (a, b)$, что, например, $f(x_0) = d$, то в силу строго монотонного возрастания функции f $d = f(x_0) < f(x)$ для любого $x > x_0$ из (a, b), что несовместимо с (6.10). Значит, $c < f(x) < d$ для всех $x \in (a, b)$. С другой стороны, каково бы ни было $y_0 \in (c, d)$, из условия (6.9) следует, что существует такой номер n_0 (см. п. 3.1), что $c_{n_0} < y_0 < d_{n_0}$. Функция f на отрезке $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ удовлетворяет условиям теоремы 4, поэтому множеством ее значений на этом отрезке является отрезок $[c_{n_0}, d_{n_0}]$, в частности, существует такое $x_0 \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$, что $f(x_0) = y_0$. Таким образом, интервал (c, d) является множеством значений функции f, а значит, и множеством определения функции f^{-1}.

Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть функция f определена, строго монотонна и непрерывна на интервале (a, b) (конечном или бесконечном) и пусть*

$$c = \lim_{x \to a+0} f(x), \quad d = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Тогда обратная функция f^{-1} определена, однозначна, строго монотонна и непрерывна на интервале с концами c и d.

Эта теорема сразу следует из теоремы 4 и доказанной выше леммы. Действительно, функция f^{-1} однозначна и строго монотонна на интервале (c, d), так как в силу теоремы 4 она однозначна и строго монотонна на любом отрезке $[c_n, d_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ (обозначения см. в доказательстве леммы), и выполняются условия (6.8) и (6.9).

Наконец, функция f^{-1} непрерывна в каждой точке $y_0 \in (c, d)$. В самом деле, для каждой такой точки можно подобрать номер n_0 так, что $c_{n_0} < y_0 < d_{n_0}$ и непрерывность функции f^{-1} в точке y_0 вытекает из теоремы 4, примененной к функции f, рассматриваемой на отрезке $[a_{n_0}, d_{n_0}]$.

Теорема доказана.

§ 7. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

7.1. Многочлены и рациональные функции

Теорема 1. *Всякий многочлен непрерывен в каждой точке.*

В самом деле, функция $y = c$, где c — постоянная, непрерывна, ибо ее приращение Δy равно нулю, и поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Функция $y = x$ также непрерывна в любой точке x_0, ибо если $y_0 = x_0$, то $\Delta y = y - y_0 = x - x_0 = \Delta x$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$, тогда, беря $\delta = \varepsilon$, получим, что из условия $|\Delta x| < \delta$ следует $|\Delta y| = |\Delta x| < \delta = \varepsilon$. Это и означает непрерывность функции $y = x$ в точке $x = x_0$.

Всякий же многочлен получается из функций вида $y = c$ и $y = x$ с помощью сложения и умножения и поэтому является непрерывной функцией в каждой точке (см. п. 5.2).

Теорема 2. *Всякая рациональная функция $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ($P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены) является непрерывной функцией во всех точках, в которых ее знаменатель не обращается в ноль.*

Это непосредственно следует из того, что многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны в каждой точке и частное непрерывных функций также непрерывно во всех точках, где делитель не обращается в нуль (см. п. 5.2).

Эту теорему весьма удобно использовать при нахождении пределов рациональных функций. Пусть требуется найти $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$. Для этого нужно сначала произвести, если, конечно, это возможно, сокращение дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на множитель $(x-x_0)^n$ с максимально большим показателем $n\geqslant 1$. Тогда если получившуюся рациональную дробь обозначить $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, то (см. п. 4.4)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Теперь, если $Q_1(x_0)\neq 0$, то, в силу теоремы 2, этот предел равен просто $\frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}$; если же $Q_1(x_0)=0$ (и, значит, $P_1(x_0)\neq 0$, ибо в противном случае дробь $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ можно было бы сократить на множитель $x-x_0$), то этот предел равен ∞.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1}=-\frac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{x-1}=\infty$.

7.2. Показательная, логарифмическая и степенная функции

Мы будем предполагать известными свойства степени a^r, где $a>0$ и r — рациональное число, $r=\frac{p}{q}$, p и q — целые. Напомним их.

1. Пусть $r_1<r_2$. Если $a>1$, то $a^{r_1}<a^{r_2}$, а если $a<1$, то $a^{r_1}>a^{r_2}$.

2. $a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}$.

3. $(a^{r_1})^{r_2}=a^{r_1 r_2}$.

4. $a^0=1$.

5. $(ab)^r=a^r b^r$, $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$ $(b>0)$.

Здесь везде r, r_1 и r_2 — рациональные числа.

Из свойств 2 и 4 следует, что $a^{-r}\cdot a^r=a^0=1$. Отсюда

$$a^{-r}=\frac{1}{a^r}. \tag{7.1}$$

Далее, из свойств 1, 4 и из (7.1) вытекает, что $a^r > 0$ для любого рационального числа r.

Действительно, если $r > 0$ и $a \geqslant 1$, то в силу 1 и 4 $a^r \geqslant a^0 = 1 > 0$. Отсюда, согласно (7.1), имеем

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} > 0.$$

Аналогично неравенство $a^r > 0$ доказывается и при $a < 1$.

Определим прежде всего степень a^x для любого вещественного x и $a > 0$.

Для этого докажем две леммы.

Лемма 1. *Для любого* $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1, \tag{7.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1. \tag{7.3}$$

Доказательство. Пусть сначала $a > 1$. Положим

$$x_n = a^{\frac{1}{n}} - 1. \tag{7.4}$$

Из свойств 1 и 4 степени a^r с рациональным показателем r следует, что

$$x_n > 0. \tag{7.5}$$

Из (7.4), очевидно, имеем $a = (1 + x_n)^n$. Раскроем правую часть *по формуле бинома Ньютона:*

$$a = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \ldots$$

и отбросим все слагаемые в правой части, кроме второго. Тогда, используя (7.5), получим

$$a > nx_n$$

и, следовательно, $0 < x_n < \frac{a}{n}$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Откуда, согласно (7.4),

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Если теперь $0<a<1$, то $b=\frac{1}{a}>1$, и так как в силу доказанного $\lim\limits_{n\to\infty} b^{\frac{1}{n}}=1$, то

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{\frac{1}{n}}}=1.$$

Если $a=1$, то $a^{\frac{1}{n}}=1$, $n=1, 2, \ldots$, и, значит, также $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$. Таким образом, (7.2) доказано при любом $a>0$. Отсюда сразу следует (7.3):

$$\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}}=1.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $a>0$. Для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех рациональных чисел h, удовлетворяющих условию $|h|<\delta$, выполняется неравенство $|a^h-1|<\varepsilon$.*

Доказательство. Пусть сначала $a>1$. Из (7.2) и (7.3) следует, что для данного фиксированного $\varepsilon>0$ существует такое n_ε, что

$$|a^{\frac{1}{n_\varepsilon}}-1|<\varepsilon \quad \text{и} \quad |a^{-\frac{1}{n_\varepsilon}}-1|<\varepsilon$$

и, значит (см. свойство 1 степени),

$$1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n_\varepsilon}}<a^{\frac{1}{n_\varepsilon}}<1+\varepsilon.$$

Если h — рациональное число и $|h|<\frac{1}{n_\varepsilon}$, т. е. $-\frac{1}{n_\varepsilon}<h<\frac{1}{n_\varepsilon}$, то $a^{-\frac{1}{n_\varepsilon}}<a^h<a^{\frac{1}{n_\varepsilon}}$ и, значит, $1-\varepsilon<a^h<1+\varepsilon$. Таким образом, $|a^h-1|<\varepsilon$, если h рационально и $|h|<\delta$, где $\delta=\frac{1}{n_\varepsilon}$. Для $a>1$ лемма доказана.

Для $a<1$ она доказывается аналогично, только соответствующие неравенства, согласно свойству 1 степени a^r при $a<1$, надо писать в обратную сторону. При $a=1$ лемма очевидна.

Определим теперь степень a^x для любого вещественного x.

Определение 1. *Пусть $a > 0$, а x — произвольное вещественное число. Пусть, далее, $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к числу x (для любого x такая последовательность всегда существует, см. п. 3.6). Положим по определению*

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Это определение корректно в том смысле, что указанный предел всегда существует и не зависит от выбора рациональной последовательности $\{r_n\}$, сходящейся к числу x.

Докажем это. Пусть последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится к числу x. Покажем, что последовательность $\{a^{r_n}\}$ удовлетворяет условиям критерия Коши (см. п. 3.3) и, значит, является сходящейся последовательностью. Для этого нам надо оценить разность

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1|. \tag{7.6}$$

Последовательность $\{r_n\}$ сходится и, значит, ограничена (см. п. 3.2), поэтому существует такое число A, которое без ограничения общности можно считать рациональным (почему?), что $-A < r_n < A$. Отсюда в случае $a \geqslant 1$ имеем $a^{-A} \leqslant a^{r_n} \leqslant a^A$, а в случае $a < 1$ соответственно $a^{-A} > a^{r_n} > a^A$, $n = 1, 2, \ldots$, поэтому при любом $a > 0$ существует такое число B, что

$$a^{r_n} \leqslant B, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.7}$$

($B = a^A$ при $a \geqslant 1$ и $B = a^{-A}$ при $a < 1$), т. е. последовательность a^{r_n} ограничена сверху числом B.

Далее, по лемме 2 для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{B}\right)$, что для всех рациональных r, удовлетворяющих условию $|r| < \delta$, выполняется неравенство

$$|a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{B}. \tag{7.8}$$

Из сходимости же последовательности $\{r_n\}$ в силу критерия Коши (см. п. 3.3) следует, что для найденного $\delta > 0$ существует такой номер n_δ, что $|r_n - r_m| < \delta$ для всех $n \geqslant n_\delta$ и $m \geqslant n_\delta$ и, значит, в силу (7.8)

$$|a^{r_n - r_m} - 1| < \frac{\varepsilon}{B}. \tag{7.9}$$

Из (7.6), (7.7) и (7.9) следует, что $|a^{r_n} - a^{r_m}| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\delta$ и $m \geqslant n_\delta$. Откуда в силу критерия Коши получаем, что последовательность $\{a^{r_n}\}$ сходится.

Пусть теперь $\{r_n'\}$ — другая последовательность, сходящаяся к x. Покажем, что последовательности $\{a^{r_n}\}$ и $\{a^{r_n'}\}$ сходятся к одному и тому же пределу.

Составим новую последовательность

$$r_n'' = \begin{cases} r_n, & \text{если } n = 2k+1, \ k = 0, 1, \ldots, \\ r_n', & \text{если } n = 2k, \ k = 1, 2, \ldots . \end{cases} \tag{7.10}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n'' = x$, поэтому в силу доказанного существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n''}$. Предел же любой сходящейся последовательности совпадает с пределом любой ее подпоследовательности, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n'} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n''} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}. \tag{7.11}$$

Корректность определения a^x доказана.

Определение 2. *Пусть задано некоторое число $a > 0$. Функция a^x, определенная для всех $x \in (-\infty, +\infty)$, называется показательной функцией с основанием a.*

Согласно определению, $1^x = 1$ для всех вещественных x. Этот случай не представляет интереса. Поэтому в дальнейшем будем предполагать $a \neq 1$.

Теорема 3. *Показательная функция a^x $(a > 0)$ имеет следующие свойства.*

1. *При $a > 1$ она строго монотонно возрастает, а при $a < 1$ — строго монотонно убывает на всей числовой оси.*
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ *для любых вещественных чисел x и y.*
3. $(a^x)^y = a^{xy}$ *для любых вещественных чисел x и y.*
4. *Она непрерывна в каждой точке числовой оси.*

Доказательство свойства 1. Пусть для определенности $a > 1$ и $x < y$. Существуют (почему?) рациональные числа r_1 и r_2, такие, что $x < r_1 < r_2 < y$. Выберем какие-либо последовательности рациональных чисел $\{r_n'\}$ и $\{r_n''\}$ так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} r_n' = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n'' = y$ и чтобы $r_n' < r_1 < r_2 < r_n''$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$a^{r_n'} < a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r_n''},$$

и, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$a^x \leqslant a^{r_1} < a^{r_2} \leqslant a^y. \tag{7.12}$$

Таким образом, если $x < y$, то $a^x < a^y$, что и означает строгое монотонное возрастание функции a^x при $a > 1$.

Случай $a < 1$ рассматривается аналогичным образом.

Доказательство свойства 2. Пусть $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ — такие последовательности рациональных чисел, что $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r''_n = y$, и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty}(r'_n + r''_n) = x + y$ (см. п. 3.4). Тогда в силу определения показательной функции

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n + r''_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} \lim_{n\to\infty} a^{r''_n} = a^x a^y.$$

Заметим, что из свойства 2 следует, что для любого вещественного x справедливо равенство $a^x a^{-x} = a^0 = 1$. Поэтому

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Доказательство свойства 4*). В силу уже доказанной строгой монотонности функции a^x утверждение леммы 2 настоящего пункта справедливо (вместе с доказательством) не только для рациональных, но и для всех вещественных h.

А именно для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|a^h - 1| < \varepsilon$ для всех вещественных чисел h, удовлетворяющих условию $|h| < \delta$.

Пусть x фиксировано, $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$. Согласно сказанному, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{a^x}\right)$, что $|a^{\Delta x} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^x}$ при $|\Delta x| < \delta$**) и, значит, $|\Delta y| = a^x |a^{\Delta x} - 1| < \varepsilon$ при $|\Delta x| < \delta$, что и означает непрерывность функции a^x в точке x.

Доказательство свойства 3. Пусть сначала $y = p$ — целое положительное число; тогда, p раз применяя свойство 2, получим

$$(a^x)^p = \underbrace{a^x \cdot a^x \ldots a^x}_{p \text{ раз}} = a^{\overbrace{x+x+\ldots+x}^{p \text{ раз}}} = a^{xp}. \tag{7.13}$$

---

*) Свойство 3 будет доказано, после доказательства свойства 4.

**) Отметим, что $a^x > 0$ при любом вещественном x. Это легко вытекает из свойств 1 и 2 теоремы 3 и из того, что $a^0 = 1$ (ср. со свойствами a^r при рациональных показателях r).

Пусть, далее, $y=\frac{1}{q}$, где q — целое положительное число. Покажем, что $(a^x)^{\frac{1}{q}}=a^{\frac{x}{q}}$, т. е. что $a^{\frac{x}{q}}$ является корнем q-й степени из числа a^x. Для этого согласно определению корня, надо доказать, что $\left(a^{\frac{x}{q}}\right)^q=a^x$; это же сразу следует из доказанного равенства (7.13).

Пусть теперь $y=\frac{p}{q}$, p и q — положительные целые, тогда, согласно уже доказанному,

$$(a^x)^{\frac{p}{q}}=[(a^x)^p]^{\frac{1}{q}}=(a^{xp})^{\frac{1}{q}}=a^{\frac{xp}{q}}.$$

Если же $y=-\frac{p}{q}$, то

$$(a^x)^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{(a^x)^{\frac{p}{q}}}=\frac{1}{a^{\frac{xp}{q}}}=a^{-\frac{xp}{q}}.$$

Наконец, очевидно, что $(a^x)^0=1=a^0$. Таким образом, доказано, что для любого вещественного x и любого рационального r

$$(a^x)^r=a^{xr}. \tag{7.14}$$

Пусть теперь задано еще одно вещественное число y, возьмем какую-либо последовательность $\{r_n\}$ рациональных чисел, сходящуюся к y. Тогда из (7.14) для всех $n=1, 2, \ldots$ будем иметь

$$(a^x)^{r_n}=a^{xr_n}. \tag{7.15}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} xr_n=xy$, то, согласно доказанной выше непрерывности функции a^x,

$$\lim_{n\to\infty} a^{xr_n}=a^{xy}. \tag{7.16}$$

С другой стороны, в силу определения показательной функции

$$\lim_{n\to\infty}(a^x)^{r_n}=(a^x)^y. \tag{7.17}$$

Переходя к пределу в равенстве (7.15) при $n\to\infty$, в силу (7.16) и (7.17) получим свойство 3 теоремы 3.

Теорема доказана.

Упражнение 1. Доказать, что $(ab)^x=a^xb^x$ и $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$ для любых $a>0$, $b>0$ и всякого x.

Определение 3. *Функция, обратная к показательной функции* $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), *называется логарифмической и обозначается* $y = \log_a x$. *Если* $a = e$ (см. п. 3.2), *то вместо* $y = \log_e x$ *пишут просто* $y = \ln x$.

Теорема 4. *Функция* $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, *определена для всех* $x > 0$ *и является на этом множестве строго монотонной* (*возрастающей при* $a > 1$ *и убывающей при* $a < 1$) *и непрерывной функцией.*

Доказательство. Надо прежде всего доказать, что множеством значений функции $y = a^x$ является множество всех положительных чисел. При $a > 1$, в силу непрерывности и строго монотонного возрастания функции $y = a^x$, это означает (см. п. 4.8), что

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0. \tag{7.18}$$

При этом, поскольку пределы (7.18) существуют (см. п. 4.8), достаточно доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n} = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n} = 0$) хотя бы для одной последовательности $\{x_n\}$, которая стремится к $+\infty$ (соответственно к $-\infty$).

Покажем, что при $a > 1$

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty, \quad \lim_{n \to +\infty} a^{-n} = 0. \tag{7.19}$$

Так как $\alpha = a - 1 > 0$, то, раскладывая $(1+\alpha)^n$ по биному Ньютона и отбрасывая все члены (которые положительны), кроме второго, получим

$$a^n = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \ldots > \alpha n,$$

и, следовательно, $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.

Отсюда, $\lim\limits_{n \to +\infty} a^{-n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} a^n} = 0$. Таким образом, (7.18) доказано.

Если теперь $a < 1$, то $b = \dfrac{1}{a} > 1$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{b^x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to +\infty} b^x} =$

$= 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to -\infty} b^x} = +\infty$.

Из доказанного следует (см. п. 6.3 и теорему 3 этого параграфа), что как в случае $a > 1$, так и в случае $a < 1$ множеством значений функции a^x, а значит, и областью определения обратной функции $y = \log_a x$ является полупрямая $(0, +\infty)$. Этим, в частности, доказано существование логарифма для любого положительного числа. Все другие утверждения теоремы 4 непосредственно следуют из теоремы 5 п. 6.3 и теоремы 3 настоящего параграфа.

Определение 4. *Пусть задано некоторое вещественное число* α. *Функция* x^α, *определенная для всех* $x > 0$, *называется степенной функцией с показателем* α.

Теорема 5. *Степенная функция* x^α *непрерывна при всех* $x > 0$.

Действительно, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, т. е. x^α есть суперпозиция показательной функции e^u и логарифмической функции, умноженной на постоянную: $u = \alpha \ln x$. Показательная и логарифмическая функции непрерывны (см. теоремы 3 и 4), поэтому, в силу теоремы о непрерывности суперпозиции непрерывных функций (см. п. 5.2), функция x^α также непрерывна.

Теорема доказана.

При рассмотрении функции $y = x^\alpha$ предполагалось, что $x > 0$, так как выражение x^α при $x < 0$ не для всех α имеет смысл в вещественной области. Однако, если α рационально и x^α имеет смысл при $x < 0$, например, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^3}$, $y = \sqrt[5]{x}$, то функция $y = x^\alpha$ будет при $\alpha > 0$ непрерывна на всей вещественной оси, а при $\alpha < 0$ на всей вещественной оси, кроме точки $x = 0$.

При $x \neq 0$ это легко следует из теоремы 5, так как функция $y = x^\alpha$, если она имеет смысл и для всех $x < 0$, всегда является четной или нечетной функцией, а если четная или нечетная функция непрерывна при $x > 0$, то она непрерывна и при $x < 0$ (почему?). Если же в точке $x = 0$ четная или нечетная функции имеют предел справа, равный нулю, то они непрерывны в этой точке (почему?). При $\alpha > 0$ как раз $\lim\limits_{x \to +0} x^\alpha = 0$, ибо $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ и (см. теорему 4) $\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty$, поэтому в этом случае x^α непрерывна и при $x = 0$.

7.3. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции

Лемма. *При любом вещественном* x *справедливо неравенство*

$$|\sin x| \leqslant |x|.$$

Доказательство. Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O. Пусть OA — неподвижный радиус, а OB — подвижный, образующий угол x с подвижным. Пусть $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$; и радиус OB_1 симметричен радиусу OB относительно OA (рис. 18).

Опустим из точки B перпендикуляр BC на неподвижный радиус OA. Тогда $BC = R \sin x$ и, так как $BC = CB_1$, то $BB_1 = 2R \sin x$. Как известно, длина дуги BAB_1 равна $2Rx$. Длина отрезка, соединяющего две точки, не превышает длины дуги окружности, соединяю-

щей те же точки, значит, $2R\sin x \leqslant 2Rx$, т. е. $\sin x \leqslant x$. Если теперь $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < 0$, то $0 < -x \leqslant \frac{\pi}{2}$, и потому в силу доказанного $\sin(-x) \leqslant -x$, но в этом случае $\sin(-x) = |\sin x|$ и $-x = |x|$, поэтому $|\sin x| \leqslant |x|$. Таким образом, если $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $|\sin x| \leqslant |x|$. Если же $|x| > \frac{\pi}{2}$, то $|\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} < |x|$.

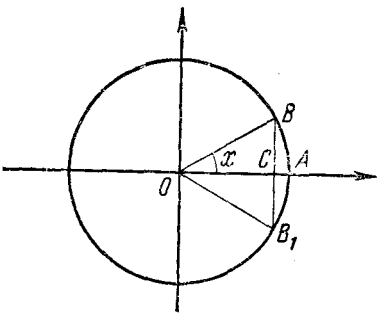


Рис. 18

Лемма доказана.

Теорема 6. *Функции* $y = \sin x$, $y = \cos x$ *непрерывны на всей вещественной оси.*

Следствие. *Функции* $y = \operatorname{tg} x$ *и* $y = \operatorname{ctg} x$ *непрерывны при всех* x, *при которых* $\cos x$, *соответственно* $\sin x$, *не обращаются в ноль.*

Доказательство. Так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$, $|\cos\alpha| \leqslant 1$ при любом α и в силу леммы $\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|\Delta x|$, то

$$|\sin(x+\Delta x) - \sin x| \leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant |\Delta x|,$$

$$|\cos(x+\Delta x) - \cos x| \leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant |\Delta x|.$$

Отсюда следует, что при $\Delta x \to 0$ левые части неравенств также стремятся к нулю. Это и означает непрерывность функций $\sin x$ и $\cos x$.

Непрерывность $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ в точках, в которых знаменатели не обращаются в ноль, следует из непрерывности $\sin x$ и $\cos x$ и теоремы о частном непрерывных функций (см. п. 5.2).

Теорема 7. *Обратные тригонометрические функции* $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ *и* $\operatorname{arcctg} x$ *непрерывны в области их определения.*

Это сразу следует из теорем 4 и 5 в § 6 и из непрерывности и строгой монотонности функций $\sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x$ на отрезке $[0, \pi]$, $\operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{ctg} x$ на интервале $(0, \pi)$.

§ 8. СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИЙ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

8.1. Некоторые замечательные пределы

Для дальнейшего весьма полезно вычислить некоторые пределы конкретных функций.

Лемма 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{8.1}$$

Доказательство. Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O. Пусть OA — неподвижный радиус, OB — подвижный, образующий угол x, $0<x<\frac{\pi}{2}$, с радиусом OA. Соединим точку A с точкой B отрезком, восставим из точки A перпендикуляр к радиусу OA до пересечения в точке C с продолжением радиуса OB (рис. 19). Тогда площадь треугольника AOB равна $\frac{1}{2}R^2\sin x$, площадь сектора AOB равна $\frac{1}{2}R^2x$, а площадь треугольника AOC равна $\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg} x$. Треугольник AOB является частью сектора AOB, который в свою очередь является частью треугольника AOC, поэтому

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg} x.$$

Откуда получим

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

или, заменяя величины их обратными,

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1. \tag{8.2}$$

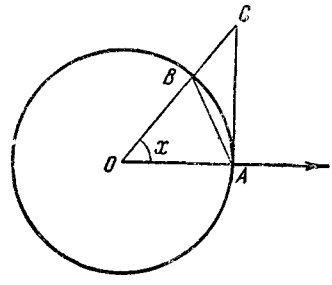


Рис. 19

Заметим, что в силу четности функций $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ неравенство (8.2) справедливо и в случае $-\frac{\pi}{2}<x<0$.

Так как функция $\cos x$ непрерывна и $\cos 0=1$, то из (8.2) при $x\to 0$ следует (см. п. 4.6) равенство (8.1).

Лемма доказана.

Следствие 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1. \tag{8.3}$$

В самом деле,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

Следствие 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1. \tag{8.4}$$

Функция $y = \sin x$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому обратная функция $x = \arcsin y$ также строго монотонна и непрерывна на отрезке $[-1; 1]$. Поскольку $\sin 0 = 0$, то условия $x \to 0$ и $y \to 0$ эквивалентны (см. замечание в конце п. 4.5). Для вычисления предела (8.4) применим правило замены переменного (см. теорему 3 п. 4.5), положив $y = \arcsin x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

Следствие 3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1. \tag{8.5}$$

Это равенство получается аналогично предыдущему из (8.3).

Лемма 2.

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{8.6}$$

Ранее (см. п. 3.6) было доказано, что

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{8.7}$$

где $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что для любой последовательности $\{n_k\}$ натуральных чисел, такой, что

$$\lim_{n \to \infty} n_k = +\infty, \tag{8.8}$$

имеет место

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e. \tag{8.9}$$

В самом деле, пусть задано $\varepsilon > 0$; из (8.7) вытекает, что существует такое n_ε, что при $n \geqslant n_\varepsilon$:

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon, \tag{8.10}$$

а из условия (8.8) следует, что существует такое k_ε, что $n_k \geqslant n_\varepsilon$ при $k \geqslant k_\varepsilon$; поэтому в силу (8.10) $\left|\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} - e\right| < \varepsilon$ при $k \geqslant k_\varepsilon$, что и означает выполнение (8.9).

Пусть теперь последовательность $\{x_k\}$ такая, что

$$\lim_{k \to \infty} x_k = 0 \quad \text{и} \quad x_k > 0. \tag{8.11}$$

Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=e$. При этом без ограничения общности можно считать, что $x_k<1$, $k=1, 2, \ldots$ (почему?). Для всякого x_k найдется такое натуральное n_k, что $\frac{1}{n_k+1}<x_k\leqslant\frac{1}{n_k}$ и, следовательно, $n_k+1>\frac{1}{x_k}\geqslant n_k$.

Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}. \tag{8.12}$$

Замечая, что в силу (8.9)

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)}=\frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)}=e$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=e,$$

и переходя к пределу в неравенстве (8.12) при $k\to\infty$, получим

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=e.$$

Поскольку $\{x_k\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям (8.11), то тем самым доказано, что

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \tag{8.13}$$

Пусть теперь последовательность $\{x_k\}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty}x_k=0,\quad x_k<0. \tag{8.14}$$

Положим $y_k=-x_k$, тогда $y_k>0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}y_k=0$, причем без ограничения общности можно считать, что $y_k<1$, $k=1, 2, \ldots$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=\lim_{k\to\infty}(1-y_k)^{-\frac{1}{y_k}}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}}=\lim_{k\to\infty}(1+z_k)^{\frac{1}{z_k}+1},$$

где

$$z_k = \frac{y_k}{1 - y_k} > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{k \to \infty} z_k = 0,$$

и в силу уже доказанного равенства (8.13)

$$\lim_{k \to \infty} (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \lim_{k \to \infty} (1 + z_k)^{\frac{1}{z_k}} \lim_{k \to \infty} (1 + z_k) = e.$$

Но $\{x_k\}$ была произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям (8.14), поэтому

$$\lim_{x \to -0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{8.15}$$

Таким образом, функция $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$, имеет в точке 0 пределы слева и справа, равные одному и тому же числу e, поэтому существует и двусторонний предел, также равный e (см. п. 4.5).

Лемма доказана.

Следствие 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \tag{8.16}$$

и, в частности, при $a = e$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 + x)}{x} = 1.$$

В самом деле, используя непрерывность логарифмической функции (см. теорему 4 из § 7), непрерывность суперпозиции функций (см. п. 5.2) и равенство (8.6), получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log_a (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e.$$

Следствие 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \tag{8.17}$$

В частности, если $a = e$, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{8.18}$$

Функция $y = a^x - 1$ строго монотонна и непрерывна на всей вещественной оси, поэтому обратная функция $x = \frac{\ln (1 + y)}{\ln a}$ также

строго монотонна и непрерывна при $y > -1$. Поскольку при $x = 0$ имеем также и $y = 0$, то условия $x \to 0$ и $y \to 0$ эквивалентны (см. замечание в конце п. 4.5). Применим для вычисления предела (8.17) правило замены переменного (см. теорему 3 п. 4.5). Положив $x = \dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}$, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y \ln a}{\ln(1+y)} = \ln a \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y}} = \ln a.$$

8.2. Сравнение функций

Все нижерассматриваемые в этом параграфе функции определены на интервале (a, b) — конечном или бесконечном, кроме, быть может, $x_0 \in (a, b)$. Если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то под пределом понимается соответственно предел справа или слева. При этом не исключается и случай $x_0 = +\infty$ или $x_0 = -\infty$.

Как мы уже знаем, сумма, разность и произведение бесконечно малых функций являются также бесконечно малыми функциями; этого нельзя, вообще говоря, сказать об их частном: деление одной бесконечно малой на другую может привести к разнообразным случаям, как это показывают нижеприведенные примеры бесконечно малых при $x \to 0$ функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Пусть, например, $\alpha(x) = x$ и $\beta(x) = x^2$, тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0} x = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Если же $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = 2x$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 2,$$

а если $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, то предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ не существует.

Определение 1. *Если для двух функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют такие постоянные $c > 0$ и $\delta > 0$, что $|f(x)| \leqslant c\,|g(x)|$ при $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, то говорят, что f является ограниченной по сравнению с g функцией в некоторой окрестности точки x_0, и пишут, что $f(x) = O(g(x))$ (читается: «$f(x)$ есть O большое от $g(x)$») при $x \to x_0$.*

Подчеркнем, что значок $x \to x_0$ здесь имеет другой, чем обычно, смысл: он лишь указывает на то, что рассматриваемое свой-

ство имеет место лишь в некоторой окрестности точки x_0; ни о каком пределе здесь речи нет.

Например, $\frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x \to 0$, ибо $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$ при $|x| \leqslant 1$; $\frac{1}{x^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to \infty$, ибо $\frac{1}{x^2} < \left|\frac{1}{x}\right|$ при $|x| \geqslant 1$. Запись $f(x) = O(1)$ при $x \to x_0$ означает, что функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0, например $\frac{\sin 2x}{x} = O(1)$ при $x \to 0$, ибо $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$, и, значит, функция $\frac{\sin 2x}{x}$ ограничена в окрестности точки $x = 0$.

Определение 2. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $f = O(g)$ и $g = O(f)$ при $x \to x_0$, то они называются функциями одного порядка при $x \to x_0$.*

Это понятие наиболее содержательно, когда функции f и g являются либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \to x_0$. Например, функции $\alpha = x$ и $\beta = x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$ являются при $x \to 0$ бесконечно малыми одного порядка, ибо

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{1}{\left|2 + \sin\frac{1}{x}\right|} \leqslant \frac{1}{2 - \left|\sin\frac{1}{x}\right|} \leqslant 1,$$

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|2 + \sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 2 + \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 3.$$

Лемма. *Если функции $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ таковы, что $\alpha(x) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$ и существует предел*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0, \tag{8.19}$$

то они одного порядка при $x \to x_0$.

В самом деле, условие (8.19) эквивалентно (см. п. 4.7) условиям

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = c + \varepsilon_1(x) \text{ и } \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{1}{c} + \varepsilon_2(x),$$

где

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \to x_0} \varepsilon_2(x) = 0,$$

и, следовательно, $|\varepsilon_1(x)|<1$ и $|\varepsilon_2(x)|<1$, $x\neq x_0$, в некоторой окрестности точки x_0. Отсюда следует, что в указанной окрестности выполняются неравенства

$$\left|\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right|\leqslant|c|+1 \quad \text{и} \quad \left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right|\leqslant\frac{1}{|c|}+1,$$

т. е. $\beta=O(\alpha)$ и $\alpha=O(\beta)$ при $x\to x_0$.

В качестве примера возьмем функции $\alpha=3x^2$ и $\beta=\sin x^2$. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}=\dfrac{1}{3}$ (см. (8.1)), поэтому, согласно доказанному, функции $3x^2$ и $\sin x^2$ одного порядка при $x\to 0$.

Определение 3. *Две функции $f(x)$ и $g(x)$, $f(x)\neq 0$ и $g(x)\neq 0$ при $x\neq x_0$, называются эквивалентными при $x\to x_0$, если*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

или, что то же, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=1.$$

Эквивалентность функций при $x\to x_0$ будем обозначать следующим образом: $f\sim g$ при $x\to x_0$.

Если $f\sim g$ при $x\to x_0$ и $g\sim h$ при $x\to x_0$, то и

$$f\sim h \text{ при } x\to x_0. \tag{8.20}$$

В самом деле,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g}{h}=1.$$

Из результатов п. 8.1 следует, что при $x\to 0$ имеет место следующая эквивалентность бесконечно малых:

$$x\sim\sin x\sim\operatorname{tg}x\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg}x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1.$$

Из этих соотношений эквивалентности следуют и более общие соотношения: если $u(x)$ — какая-либо функция, такая, что

$$\lim_{x\to 0}u(x)=0, \tag{8.21}$$

причем $u(x)\neq 0$ при $x\neq 0$, то при $x\to 0$

$$u(x)\sim\sin u(x)\sim\operatorname{tg}u(x)\sim\arcsin u(x)\sim\operatorname{arctg}u(x)\sim$$
$$\sim\ln[1+u(x)]\sim e^{u(x)}-1. \tag{8.22}$$

Это сразу следует из правила замены переменного для пределов функций (см. теорему 3 п. 4.5).

Определение 4. *Если* $\alpha(x) = \varepsilon(x) f(x)$, *где* $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, *то говорят, что* α *является бесконечно малой функцией по сравнению с функцией* f *и пишут* $\alpha = o(f)$ (*читается*: «α *есть о малое от* f») *при* $x \to x_0$.

В силу этого определения запись «$\alpha(x) = o(1)$ при $x \to x_0$» означает просто, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Если $f(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$, то условие

$$\alpha = \varepsilon f, \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon = 0, \tag{8.23}$$

можно переписать в виде

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{f} = 0. \tag{8.24}$$

Таким образом, функция $o(f)$ при $x \to x_0$, $f(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$, может быть определена как такая функция, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(f)}{f} = 0. \tag{8.25}$$

В случае, если функция f является бесконечно малой при $x \to x_0$, то говорят, что при $x \to x_0$ функция $\alpha = \varepsilon f$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon = 0$ является *бесконечно малой более высокого порядка*, чем f.

Например, $x^3 = o(\sin x^2)$ при $x \to 0$, ибо

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin x^2} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x^2} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Подобным образом $\dfrac{1}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ и $x = o(x^2)$ при $x \to \infty$.

Отметим, что если $f = o(g)$ при $x \to x_0$, то и подавно $f = O(g)$ при $x \to x_0$; в самом деле, пусть $f = \varepsilon g$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon = 0$, тогда функция $\varepsilon = \varepsilon(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0 (см. п. 4.6): $|\varepsilon(x)| \leqslant c$, $x \neq x_0$, и, значит, $|f(x)| \leqslant c\,|g(x)|$ в указанной окрестности точки x_0, что и означает $f = O(g)$.

Упражнение 1. Пусть $\beta = O(\alpha^2)$ при $x \to x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$, тогда $\beta = o(\alpha)$ при $x \to x_0$.

При использовании равенств с символами O и o следует иметь в виду, что эти равенства не являются равенствами в обычном смысле этого слова. Так, если

$$\alpha_1 = o(\beta), \quad x \to x_0,$$

$$\alpha_2 = o(\beta), \quad x \to x_0,$$

то было бы ошибкой сделать отсюда заключение, что $\alpha_1 = \alpha_2$, как это было бы справедливо для обычных равенств. Например, $x^3 = o(x)$ и $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, но $x^2 \neq x^3$.

Подобным образом, если имеется равенство вида

$$f + o(f) = g + o(f) \text{ при } x \to x_0,$$

то было бы ошибкой сделать заключение, что $f = g$.

Дело состоит в том, что один и тот же символ $O(f)$ или $o(f)$ может обозначать разные конкретные функции. Это обстоятельство связано с тем, что при определении символов $O(f)$ и $o(f)$ мы, по существу, ввели целые классы функций, обладающих определенными свойствами (класс функций, ограниченных в некоторой окрестности точки x_0 по сравнению с функцией f, и класс функций, бесконечно малых по сравнению с функцией f при $x \to x_0$), и было бы правильнее писать не $\alpha = O(f)$ и $\alpha = o(f)$, а соответственно $\alpha \in O(f)$ и $\alpha \in o(f)$. Однако это привело бы к существенному усложнению и большим неудобствам при проведении вычислений с формулами, в которых встречаются символы O и o. Поэтому мы сохраним прежнюю запись $\alpha = O(f)$ и $\alpha = o(f)$, но при этом эти равенства будем всегда читать, в согласии со сделанными определениями, только в одну сторону: слева направо (если, конечно, не оговорено что-либо другое). Например, запись

$$\alpha = o(f), \quad x \to x_0,$$

означает, что функция α является бесконечно малой по сравнению с функцией f при $x \to x_0$, но отнюдь не то, что всякая бесконечно малая по сравнению с f функция равна α.

В качестве примера на обращение с этими символами докажем равенство

$$o(cf) = o(f), \tag{8.26}$$

где c — постоянная.

Согласно сказанному, нам надо показать, что, если $g = o(cf)$, то $g = o(f)$. Действительно, если $g = o(cf)$, то $g = \varepsilon cf$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Положим $\varepsilon_1 = c\varepsilon$, тогда $g = \varepsilon_1 f$, где, очевидно, $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$ и, значит, $g = o(f)$.

Равенство (8.26) доказано.

В заключение отметим, что сказанное об использовании символов o и O, конечно, не исключает того, что отдельные формулы с этими символами могут оказаться справедливыми не только при чтении их слева направо, но и справа налево; так, формула (8.26) при предположении $c \neq 0$ справедлива и при чтении справа налево.

Упражнения. 2. Доказать, что если α — бесконечно малая при $x \to x_0$, то при $x \to x_0$

$$o(\alpha^2) = o(\alpha), \qquad \alpha\, o(\alpha) = o(\alpha^2),$$
$$o(\alpha) \cdot O(\alpha) = o(\alpha^2), \qquad o(\alpha + \alpha^2) = o(\alpha),$$
$$o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha), \qquad o^2(\alpha) = o(\alpha^2).$$

3. Пусть $\lim\limits_{t \to b} f(t) = a$, причем $f(t) \neq a$ при $t \neq b$ в некоторой окрестности точки $t = b$. Тогда, если $\varphi(x) = o[\psi(x)]$ при $x \to a$, то $\varphi[f(t)] = o\{\psi[f(t)]\}$ при $t \to b$; а если $\varphi(x) = O[\psi(x)]$ при $x \to a$, то $\varphi[f(t)] = O\{\varphi[f(t)]\}$ при $t \to b$.

8.3. Эквивалентные функции

Теорема 1. *Для того чтобы две функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$, $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$ были эквивалентными при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хоть одно из условий*

$$g - f = o(f) \tag{8.27}$$

или

$$g - f = o(g). \tag{8.28}$$

Доказательство необходимости условий (8.27) и (8.28). Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 1$, тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \left(1 - \frac{f}{g}\right) = 0$, откуда $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g - f}{g} = 0$, т. е. (см. (8.25)) $g - f = o(g)$. Аналогично из условия $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g}{f} = 1$ получается $g - f = o(f)$.

Доказательство достаточности условий (8.27) и (8.28). Пусть, например, $g - f = o(g)$, т. е. выполнено условие (8.28), тогда $1 - \frac{f}{g} = \frac{o(g)}{g}$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \lim\limits_{x \to x_0} \left(1 - \frac{o(g)}{g}\right) = 1 - \lim\limits_{x \to x_0} \frac{o(g)}{g} = 1$ (см (8.25). Аналогично доказывается достаточность условия (8.27).

Отметим, что из выполнения одного из условий (8.27) или (8.28) следует выполнение другого. Если, например, выполнено условие (8.27), то в силу теоремы 1 функции f и g эквивалентны при $x \to x_0$, и, значит, в силу той же теоремы выполняется условие (8.28). Аналогично доказывается, что из условия (8.28) следует условие (8.27).

Следствие. *Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g}{f} = c \neq 0$, где c — постоянная, тогда $g \sim cf$ и $g = cf + o(f)$ при $x \to x_0$.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g}{f}=c\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g}{cf}=1$, и, значит, $g\sim cf$ при $x\to x_0$. Отсюда по теореме 1 имеем $g=cf+o(cf)$, а значит (см. конец п. 8.2), $g=cf+o(f)$.

Теорема 2. *Пусть* $f\sim f_1$ *и* $g\sim g_1$ *при* $x\to x_0$. *Тогда если существует* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1}{g_1}$, *то существует и* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f}{g}$, *причем*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{g_1}. \tag{8.29}$$

Доказательство. На основании теоремы 1 имеем $f=f_1+o(f_1)$ и $g=g_1+o(g_1)$ при $x\to x_0$, поэтому, применяя теорему о произведении пределов, получаем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1+o(f_1)}{g_1+o(g_1)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{g_1}\,\frac{1+\dfrac{o(f_1)}{f_1}}{1+\dfrac{o(g_1)}{g_1}}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{g_1}\lim_{x\to x_0}\frac{1+\dfrac{o(f_1)}{f_1}}{1+\dfrac{o(g_1)}{g_1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{g_1}.$$

Теорема доказана.

Поскольку обе части равенства (8.29) равноправны, то из доказанной теоремы следует, что предел, стоящий в левой части, существует тогда и только тогда, когда существует предел в правой части, причем в случае их существования они совпадают. Это делает очень удобным применение теоремы 2 на практике: ее можно использовать для вычисления пределов, не зная заранее, существует или нет рассматриваемый предел.

Упражнение 4. Доказать равенство (8.29), в случае когда

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ равен ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

8.4. Метод выделения главной части функции. Применение к вычислению пределов

Пусть β — бесконечно малая при $x\to x_0$. Если β представима в виде $\beta=\alpha+o(\alpha)$, где α — также бесконечно малая при $x\to x_0$, то бесконечно малая α называется *главной частью бесконечно малой* β.

Если задана бесконечно малая β, то только по ней самой ее главная часть не определяется однозначно. Например, пусть

$\beta = x + x^2 + x^3$. Поскольку, с одной стороны, $x^2 + x^3 = o(x)$ при $x \to 0$, то $\beta = x + o(x)$ при $x \to 0$, а с другой стороны, $x^3 = o(x + x^2)$ при $x \to 0$, то $\beta = x + x^2 + o(x + x^2)$ при $x \to 0$. В первом случае главная часть $\alpha = x$, во втором $\alpha = x + x^2$. Однако, если задаваться определенным видом главной части, то при разумном выборе этого вида можно получить, что главная часть указанного вида определяется однозначно.

Например, справедлива следующая лемма.

Лемма. *Если существует главная часть вида $A(x - x_0)^k$, $A \neq 0$, где A и k постоянные, то среди главных частей такого вида она определяется единственным образом.*

Действительно, пусть

$$\beta = A(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k), \quad A \neq 0,$$

и

$$\beta = A_1(x - x_0)^{k_1} + o((x - x_0)^{k_1}), \quad A_1 \neq 0.$$

Тогда $\beta \sim A\ x - x_0)^k$, $\beta \sim A_1(x - x_0)^{k_1}$ при $x \to x_0$. Поэтому $A(x - x_0)^k \sim A_1(x - x_0)^{k_1}$, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x - x_0)^k}{A_1(x - x_0)^{k_1}} = 1,$$

что справедливо лишь в случае $A = A_1$ и $k = k_1$.

Метод выделения главной части бесконечно малой функции широко и с успехом используется при решении разнообразных задач математического анализа. С помощью этого метода обычно удается более сложную бесконечно малую функцию в окрестности данной точки заменить с точностью до бесконечно малых более высокого порядка более простой (в каком-то смысле) функцией. Например, если бесконечно малую β удается представить в виде $\beta = A(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$, то это означает, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $(x - x_0)^k$ при $x \to x_0$, бесконечно малая β ведет себя в окрестности точки x_0, как степенная функция $A(x - x_0)^k$.

Покажем на примерах, как метод выделения главной части бесконечно малых применяется к вычислению пределов функций*). При этом будем широко использовать полученные нами соотношения эквивалентности (8.22).

Пусть требуется найти предел (а значит, и доказать, что он существует)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x + x^2) + \arcsin 3x - 5x^3}{\sin 2x + \operatorname{tg}^2 x + (e^x - 1)^5}.$$

*) Заметим, что мы уже использовали этот метод при доказательстве теоремы 2.

Используя доказанную выше (см. 8.22) эквивалентность $\ln(1+u) \sim u$ при $u \to 0$, имеем $\ln(1+x+x^2) \sim x+x^2$ при $x \to 0$, поэтому (см. теорему 1) $\ln(1+x+x^2) = x+x^2+o(x+x^2)$, но $o(x+x^2) = o(x)$ (почему?) и $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, поэтому

$$\ln(1+x+x^2) = x+o(x) \text{ при } x \to 0;$$

далее, $\arcsin 3x \sim 3x$, поэтому

$$\arcsin 3x = 3x+o(3x) = 3x+o(x);\ 5x^3 = o(x);$$

из $\sin 2x \sim 2x$ получим

$$\sin 2x = 2x+o(2x) = 2x+o(x);$$

из $\operatorname{tg}^2 x \sim x^2$ получим

$$\operatorname{tg}^2 x = x^2+o(x^2) = o(x),$$

а из $(e^x-1)^5 \sim x^5$ получим

$$(e^x-1) = x^5+o(x^5) = o(x).$$

Все эти соотношения написаны при $x \to 0$. Теперь мы имеем

$$\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3 = x+o(x)+3x+o(x)-o(x) = 4x+o(x),$$

$$\sin 2x+\operatorname{tg}^2 x+(e^x-1)^5 = 2x+o(x)+o(x)+o(x) = 2x+o(x).$$

Поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3}{\sin 2x+\operatorname{tg}^2 x+(e^x-1)^5} = \lim_{x\to 0} \frac{4x+o(x)}{2x+o(x)}.$$

Но $4x+o(x) \sim 4x$, а $2x+o(x) \sim 2x$ при $x \to 0$, и, значит, по теореме 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x+o(x)}{2x+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{2x} = 2.$$

Таким образом, искомый предел существует и равен 2.

При вычислении пределов функций с помощью метода выделения главной части следует иметь в виду, что в случаях, не рассмотренных в п. 8.3, вообще говоря, нельзя бесконечно малые заменять им эквивалентными. Так, например, при отыскании предела выражения $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ было бы ошибкой заменить функцию $\sin x$ на эквивалентную ей при $x \to 0$ функцию x. Естественный метод решения этой задачи будет дан в п. 13.4.

В случае отыскания пределов выражений вида $u(x)^{v(x)}$ целесообразно находить предел их логарифмов. Рассмотрим подобный пример.

Найдем предел

$$\lim_{x\to 0} \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x.$$

Замечая, что

$$\cos^{\frac{1}{x^2}} 2x = e^{\ln \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x}, \tag{8.30}$$

видим, что следует вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \ln \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\ln (1-\sin^2 2x)}{x^2}.$$

Так как $\ln (1-\sin^2 2x) \sim -\sin^2 2x$, то отсюда, согласно теореме 2 этого параграфа, имеем

$$\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\ln (1-\sin^2 2x)}{x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2},$$

но $\sin^2 2x \sim (2x)^2$, поэтому

$$-\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{4x^2}{x^2} = -2.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} \ln \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x = -2.$$

В силу непрерывности показательной функции из (8.30) имеем

$$\lim_{x\to 0} \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x = e^{\lim\limits_{x\to 0} \ln \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x} = \frac{1}{e^2}.$$

Метод вычисления пределов с помощью выделения главной части функции является очень удобным, простым и вместе с тем весьма общим методом. Некоторое затруднение в его применении пока связано с тем, что пока нет еще достаточно общего способа выделения главной части функции. Это затруднение будет устранено в дальнейшем (см. § 13).

Упражнение 4. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - \sin^2 x}{x^2 + \ln (1+3x)}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\ln (1+\operatorname{tg}^2 x)}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^{\alpha x})}{\ln(1+e^{\beta x})}$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$. Указание: полезно сделать замену $x=\dfrac{\pi}{4}-y$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

10. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

§ 9. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

9.1. Определение производной

Определение 1. *Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и пусть x — некоторая точка этой окрестности, $x\neq x_0$. Если отношение*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

имеет предел при $x\to x_0$, то этот предел называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Таким образом,

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{9.1}$$

Если ввести обозначение $x-x_0=\Delta x$, то определение (9.1) запишется в виде

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Полагая $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y$ и опуская обозначения аргумента, получим еще одну запись определения производной:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если для некоторого значения x_0 выполняется условие

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty,\ \text{или}\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty,\ \text{или}\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty,$$

то говорят, что для этого значения x_0 существует *бесконечная производная*, равная соответственно $+\infty$, $-\infty$ или ∞.

В дальнейшем под выражением «функция имеет производную» мы будем понимать всегда наличие конечной производной, если не оговорено противное.

Определение 2. *Если функция f определена в правосторонней (левосторонней) окрестности точки x_0 и существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $\left(\lim\limits_{\Delta x\to-0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)$, *то он называется соответственно конечной или бесконечной производной справа (слева) функции f в точке x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$ (или $f'_-(x_0)$).*

Из теоремы об односторонних пределах (см. п. 4.5) следует, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ существует и $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$. В этом случае $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

Если функция f определена на некотором промежутке и в каждой точке этого промежутка существует производная (причем под производной в конце промежутка, который принадлежит промежутку, естественно, понимается соответствующая односторонняя производная), то эта производная f' есть, очевидно, также функция, определенная на исходном промежутке.

Операция вычисления производной от данной функции называется *операцией дифференцирования*.

Примеры. 1. $y=c$ (c — постоянная).

Так как $\Delta y=c-c=0$, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$, и, таким образом,

$$c'=0.$$

2. $y=\sin x$.

Имеем

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

и поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x.$$

Таким образом,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

3. $y = \cos x$.

Так как

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2},$$

то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x.$$

Таким образом,

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

4. $y = a^x$.

Имеем

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1),$$

поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

откуда в силу формулы (8.17) получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Таким образом,

$$(a^x)' = a^x \ln a,$$

в частности,

$$(e^x)' = e^x.$$

Последнее равенство показывает, что число e обладает замечательным свойством: *показательная функция с основанием e имеет производную, совпадающую с самой функцией*. Этим и объясняется то обстоятельство, что в математическом анализе в качестве основания степени и основания логарифмов используется преимущественно число e. Это очень удобно, так как упрощает выкладки.

5. $y = x^n$, n — положительное целое.

Используем разложение бинома:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n,$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-1}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}.$$

Так как при $\Delta x \to 0$ все слагаемые правой части, содержащие множитель Δx в некоторой положительной степени, стремятся к нулю, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$. Таким образом,

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

В дальнейшем мы увидим, что эта формула справедлива, когда n является произвольным вещественным числом.

9.2. Дифференциал функции

Определение 3. *Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и пусть $\Delta x = x - x_0$. Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ представимо в виде*

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x), \tag{9.2}$$

где A — постоянная *) *и $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Линейная функция $A\Delta x$ (от Δx) называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или, короче, dy.*

Таким образом,

$$\Delta y = dy + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0, \tag{9.3}$$

$$dy = A\Delta x. \tag{9.4}$$

Заметим, что дифференциал функции $dy = A\Delta x$, как и всякая линейная функция, определен для любого значения Δx: $-\infty < \Delta x < +\infty$, в то время как приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, естественно, можно рассматривать только для таких Δx, для которых $x_0 + \Delta x$ принадлежит области определения функции f.

Если $A \neq 0$, т. е. если $dy \not\equiv 0$, то дифференцируемость функции в точке x_0 означает, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем приращение аргумента Δx, приращение функции Δy является линейной функцией от Δx, т. е., используя терминологию п. 8.4, можно сказать, что главная часть приращения функции Δy в точке x_0 является линейной функцией относительно Δx; при этом приращение Δy и дифференциал dy являются эквивалентными бесконечно малыми при $\Delta x \to 0$.

*) При фиксированной точке x_0 A есть некоторое число, не зависящее от Δx; конечно, при изменении точки x_0 число A, вообще говоря, меняется.

Если же $A = 0$, т. е. $dy \equiv 0$, то $\Delta y = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, т. е. при $\Delta x \to 0$ приращение Δy является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Пусть $f(x_0) = y_0$. Подставляя в (9.3) $\Delta y = f(x) - y_0$, $\Delta x = x - x_0$, $dy = A(x - x_0)$, получим

$$f(x) = y_0 + A(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0. \tag{9.5}$$

Итак, если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $x - x_0$, она равна линейной функции; иначе говоря, в этом случае функция f в окрестности точки x_0 ведет себя «почти как линейная функция»

$$y_0 + A(x - x_0), \tag{9.6}$$

причем погрешность при замене функции f линейной функцией (9.6) будет тем меньше, чем меньше разность $x - x_0$, и, более того, отношение этой погрешности к разности $x - x_0$ стремится к нулю при $x \to x_0$.

Для большей симметрии записи дифференциала переменную Δx в этом случае обозначают dx и называют ее дифференциалом независимого переменного. Таким образом, дифференциал можно записать в виде

$$dy = A dx.$$

Если функция f дифференцируема в каждой точке некоторого интервала, то ее дифференциал является функцией двух переменных — точки x и переменной dx:

$$dy = A(x)dx.$$

Пример. Пусть $y = x^3$, тогда

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + \Delta x^3;$$

главная часть выражения, стоящего справа, при $\Delta x \to 0$ равна $3x^2\Delta x$, поэтому $dy = 3x^2 dx$.

Выясним теперь связь между дифференцируемостью в точке и существованием производной в той же точке.

Теорема 1. *Для того чтобы функция f была дифференцируема в некоторой точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную, причем в этом случае*

$$dy = f'(x_0)\,dx. \tag{9.7}$$

Доказательство необходимости. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, т. е. $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Поэтому производная $f'(x_0)$ существует и равна A. Отсюда $dy = f'(x_0)\,dx$.

Доказательство достаточности. Пусть существует производная $f'(x_0)$, т. е. существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x),$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon\ \Delta x) = 0$, и для $\Delta x \neq 0$

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\,\Delta x, \tag{9.8}$$

и так как $\varepsilon(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$, то наличие равенства (9.8) и означает дифференцируемость функции f в точке x_0.

Теорема доказана.

Из доказанного следует, что коэффициент A, участвующий в определении дифференциала (см. (9.4)), определен однозначно, именно $A = f'(x_0)$; тем самым и дифференциал функции в данной точке определен однозначно. Это, впрочем, вытекает также из леммы п. 8.4 о единственности главной части бесконечно малых определенного вида.

Из формулы (9.7) получается новое обозначение для производной функции $y = f(x)$:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Здесь правая часть представляет собой дробь, у которой числитель является дифференциалом функции, а знаменатель — дифференциалом аргумента.

Формула (9.7) позволяет находить дифференциалы функций, если известны их производные. Так, например, используя производные, найденные в п. 9.1, получим

$$dc = 0 \quad (c — \text{постоянная}),$$

$$d\sin x = \cos x\,dx,$$

$$d\cos x = -\sin x\,dx,$$

$$da^x = a^x \ln a\,dx,$$

в частности, $de^x = e^x\,dx$,

$$dx^n = nx^{n-1}\,dx \ (n — \text{положительное целое}).$$

В заключение этого пункта выясним связь между дифференцируемостью и непрерывностью в данной точке.

Теорема 2. *Если функция f дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке.*

В самом деле, пусть функция f дифференцируема в точке x_0, т. е. в этой точке $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} o(\Delta x) = 0,$$

что и означает непрерывность функции f в точке x_0.

Заметим, что утверждение, обратное утверждению теоремы 2, неверно, т. е. из непрерывности функции f в данной точке не следует ее дифференцируемость или, что то же (см. теорему 1), существование производной в этой точке. Например, функция $f(x) = |x|$, очевидно, непрерывна в точке $x = 0$ (как и во всех других), но не имеет в этой точке производной. В самом деле, так как $f(x) = x$ при $x \geqslant 0$ и $f(x) = -x$ при $x \leqslant 0$, то $f'_+(0) = 1$ и $f'_-(0) = -1$. Следовательно, функция $|x|$ не имеет производной в нуле.

Упражнение 1. Ввести понятие дифференцируемости функции справа (слева) в данной точке и доказать, что дифференцируемость справа (слева) в точке эквивалентна существованию в этой точке производной справа (слева).

Если функция f имеет производную в каждой точке некоторого промежутка (дифференцируема в каждой точке этого промежутка), то мы будем говорить, что функция f имеет производную или что она *дифференцируема* на указанном *промежутке*.

9.3. Геометрический смысл производной и дифференциала

Понятия производной и дифференциала функции в данной точке связаны с понятием касательной к графику функции в этой точке. Чтобы выяснить эту связь, определим прежде всего касательную.

Пусть функция f определена на интервале (a, b), непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$ и пусть $y_0 = f(x_0)$, $M_0 = (x_0, y_0)$, $x_0 + h \in (a, b)$, $M_h = (x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Проведем секущую M_0M_h (рис. 20). Она имеет уравнение $y = k(h)(x - x_0) + y_0$, где

$$k(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (9.9)$$

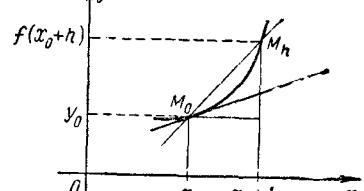


Рис. 20

Покажем, что при $h \to 0$ расстояние M_0M_h стремится к нулю (в этом случае мы будем говорить, что точка M_h стремится к точке M_0, и писать $M_h \to M_0$). Действительно, в силу непрерывности функции f

в точке x_0 имеем $\lim\limits_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)]=0$; следовательно, при $h\to 0$

$$M_0M_h=\sqrt{h^2+[f(x_0+h)-f(x_0)]^2}\to 0.$$

В силу равенства (9.9) существование конечного или бесконечного предела функции $k(h)$ при $M_h\to M_0$, т. е. при $h\to 0$, эквивалентно существованию конечной или бесконечной производной $f'(x_0)$, причем $k_0=f'(x_0)$.

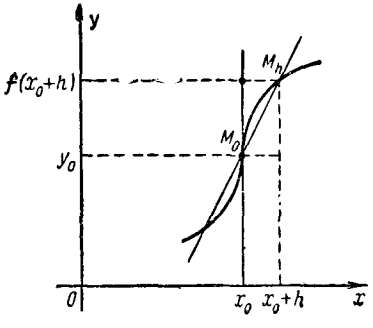


Рис. 21

Определение 4. *Если существует предел* $\lim\limits_{h\to 0}k(h)=k_0$, *то прямая*

$$y=k_0(x-x_0)+y_0, \qquad (9.10)$$

которая получается из прямой $y=k(h)(x-x_0)+y_0$ *при* $h\to 0$, *называется наклонной касательной к графику функции* f *в точке* (x_0, y_0).

Если $\lim\limits_{h\to 0}k(h)=\infty$, *то прямая (рис. 21)*

$$x=x_0, \qquad (9.11)$$

которая получается из $\frac{y}{k(h)}=x-x_0+\frac{y_0}{k(h)}$ *при* $h\to 0$, *называется вертикальной касательной к графику функции* f *в точке* (x_0, y_0).

Прямая $y=k_0(x-x_0)+y_0$ в случае конечного предела $\lim\limits_{h\to 0}k(h)$ и прямая $x=x_0$ в случае бесконечного предела $\lim\limits_{h\to 0}k(h)$ называются предельными положениями прямой (9.9). Поэтому данное выше определение касательной к графику функции можно перефразировать следующим образом.

Предельное положение секущей M_0M_h *при* $h\to 0$, *или, что то же, при* $M_h\to M_0$, *называется касательной к графику функции* f *в точке* M_0.

В результате мы пришли к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть функция* f *непрерывна при* $x=x_0$. *В точке* $(x_0, f(x_0))$ *существует наклонная касательная к графику функции* f *тогда и только тогда, когда функция* f *имеет в точке* x_0 *производную (или, что то же, когда она дифференцируема в точке* x_0*). При этом уравнение касательной имеет вид*

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0, \text{ где } y_0=f(x_0), \qquad (9.12)$$

и, значит, производная в точке x_0 *равна тангенсу угла наклона касательной к оси Ox, а дифференциал в точке* x_0 *равен приращению ординаты касательной.*

Соответственно, в точке $(x_0, f(x_0))$ существует вертикальная касательная к графику функции f тогда и только тогда, когда в точке x_0 функция имеет бесконечную производную, причем в этом случае уравнение касательной имеет вид

$$x = x_0.$$

Для полного доказательства теоремы к сказанному выше достаточно лишь добавить, во-первых, что, как хорошо известно, коэффициент k_0 в уравнении прямой $y = k_0(x - x_0) + y_0$ равен тангенсу угла наклона этой прямой к оси Ox; поэтому если через α обозначить угол наклона касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$, то в силу формулы (9.10) будем иметь

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha;$$

и, во-вторых, что выражение

$$f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\,h,$$

где h может принимать любое значение, является дифференциалом функции f в точке x_0 (см. (9.7)). Поэтому из уравнения (9.12) следует, что $df = y - y_0$, где y — текущая ордината касательной.

Пример. Найти касательную к параболе $y = x^2$ в точке (1; 1).

Согласно п. 9.1 (см. пример 5) $y' = 2x$, поэтому $y'|_{x=1} = 2$. В силу формулы (9.12) искомая касательная имеет уравнение $y = 2(x - 1) + 1$, т. е. $y = 2x - 1$.

Если функция f дифференцируема в точке x_0, то, подставляя в формулу (9.5) $A = f'(x_0)$ (см. теорему 1 настоящего параграфа), имеем

$$f(x) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0,$$

и, значит, согласно (9.12),

$$f(x) - y_{\text{кас}} = o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0.$$

Таким образом, наклонная касательная к графику функции обладает тем свойством, что разность ординат графика функции и этой касательной есть величина, бесконечно малая по сравнению с приращением аргумента при $x \to x_0$.

Обратно, если существует невертикальная прямая

$$y_{\text{пр}} = A(x - x_0) + y_0, \tag{9.13}$$

проходящая через точку (x_0, y_0), такая, что

$$f(x) - y_{\text{пр}} = o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0, \tag{9.14}$$

то эта прямая является касательной к графику функции в точке (x_0, y_0). Действительно, в этом случае

$$f(x) - [A(x - x_0) + y_0] = o(x - x_0),$$

т. е.

$$\Delta y = f(x) - y_0 = A(x - x_0) + o(x - x_0), \quad (x \to x_0),$$

следовательно, функция f дифференцируема в точке x_0 (см. (9.2)) и $A = f'(x_0)$ (см. теорему 1), т. е. указанная прямая совпадает с касательной (9.12).

Таким образом, *условие* (9.14) *является необходимым и достаточным условием того, чтобы прямая* (9.13) *являлась касательной в точке* (x_0, y_0). Отсюда, в частности, следует, что если существует прямая (9.13), обладающая свойством (9.14), то она единственна

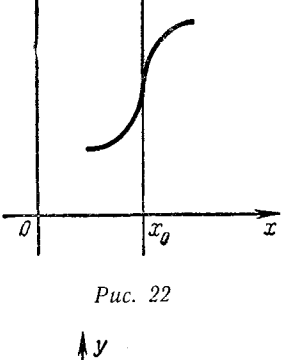


Рис. 22

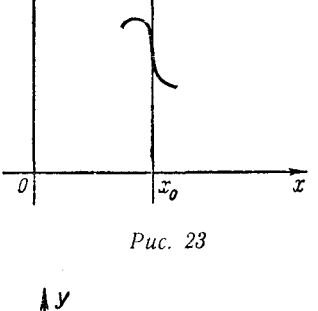


Рис. 23

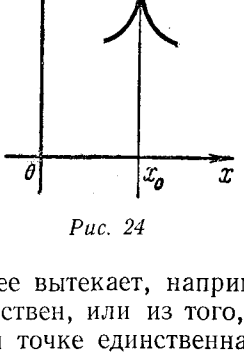


Рис. 24

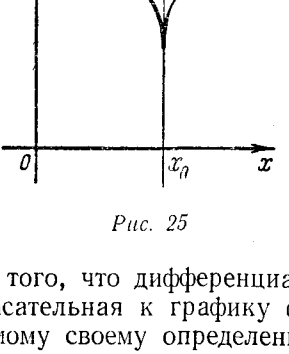


Рис. 25

(последнее вытекает, например, из того, что дифференциал функции единствен, или из того, что касательная к графику функции в данной точке единственна по самому своему определению).

Упражнение 2. Показать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и в этой точке $y' = +\infty$, то график функции f имеет вид, изображенный на рис. 22, если же $y' = -\infty$, то — на рис. 23, а если $y' = \infty$, то график функции f может иметь один из видов, изображенных на рис. 22, 23, 24 или 25.

9.4. Физический смысл производной и дифференциала

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и, как и выше, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$. Пусть для определенности $\Delta x > 0$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, равное изменению переменной y на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$, отнесенному к единице измерения переменной x, естественно назвать *величиной средней скорости* изменения переменной y на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ относительно переменной x. При стремлении к нулю Δx, т. е. при стягивании отрезка $[x_0, x_0 + \Delta x]$ к точке x_0, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ дает величину средней скорости переменной y относительно переменной x все в меньшем и меньшем отрезке, содержащем точку x_0. Все сказанное, конечно, справедливо и при $\Delta x < 0$ для отрезка $[x_0 + \Delta x, x_0]$.

Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует, т. е. производную $f'(x_0)$, естественно поэтому назвать *величиной скорости* изменения переменной y относительно переменной x в точке x_0.

Заметим, что если в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$, то, рассматривая предел средних скоростей переменной y относительно переменной x на отрезках $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ $(\Delta x > 0)$, содержащих точку x_0 внутри себя в качестве центра, при стягивании их к точке x_0 (при $\Delta x \to 0$) мы придем в пределе к тому же значению величины скорости переменной y относительно переменной x в точке x_0, т. е. к $f'(x_0)$. Действительно, величина средней скорости изменения переменной y относительно переменной x на отрезке $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ равна $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$ (частному от деления изменения функции на длину отрезка, на котором произошло это изменение), отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x}\right] = f'(x_0).$$

На интерпретации производной как величины скорости изменения одной величины относительно другой и основано применение производной для изучения физических явлений.

Применение же дифференциала основано на том, что замена приращения функции ее дифференциалом позволяет заменить функцию линейной функцией, т. е. считать, что процесс изменения зависимой переменной «в малом» происходит линейно относительно

аргумента. Иначе говоря, можно считать, что изменение функции прямо пропорционально изменению аргумента или, как говорят, что упомянутый процесс «в малом» происходит равномерно. При такой замене получающаяся погрешность оказывается бесконечно малой более высокого порядка, чем приращение аргумента.

Примеры. 1. Пусть $s = s(t)$ — закон движения материальной точки (рис. 26); s — длина пути, отсчитываемая от некоторой начальной точки M_0; t — время, за которое пройден путь s. Пусть M — положение точки в момент времени t, а M' — в момент времени $t + \Delta t$ и Δs — длина пути от точки M до M', т. е. $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$. Тогда $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ есть то, что называется в механике *величиной средней скорости* движения на участке от M до M', а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$ есть величина скорости движения в точке M или, как говорят в механике, *величина мгновенной скорости* в момент времени t. Таким образом, величина мгновенной скорости $v = \frac{ds}{dt}$.

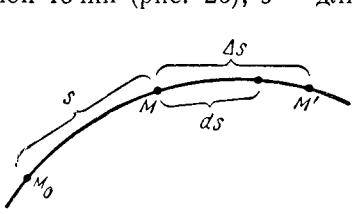


Рис. 26

По определению дифференциала $ds = vdt$; следовательно, дифференциал пути равен расстоянию, которое прошла бы точка за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$, если бы она двигалась равномерно со скоростью, равной величине мгновенной скорости точки в момент t. Величина же Δs действительного перемещения точки будет $\Delta s = ds + o(\Delta t)$.

Мы видим, что с механической точки зрения замена Δs на ds означает, что мы считаем движение на рассматриваемом участке равномерным (в смысле величины скорости*)) движением.

2. Пусть $q = q(t)$ — количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t; Δt — некоторый промежуток времени; $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ — количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. Тогда $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называется *средней силой тока* за промежуток времени Δt и обозначается $I_{ср}$, а предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} I_{ср} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$ называется силой тока в данный момент времени t и обозначается I. Таким образом, $I = \frac{dq}{dt}$.

*) Следует иметь в виду, что скорость — вектор и потому характеризуется не только величиной, но и направлением.

Дифференциал $dq = I\Delta t$ равен количеству электричества, протекшего через поперечное сечение проводника за момент времени Δt, если бы сила тока была постоянной, равной силе тока в момент t. Как всегда, $\Delta q - dq = o(\Delta t)$.

3. Пусть дан неоднородный стержень длины l и пусть $m = m(x)$ — масса части стержня длины x, $0 \leqslant x \leqslant l$, отмеряемой от одного фиксированного конца (рис. 27). Пусть $\Delta m = m(x + \Delta x) - m(x)$ — масса части стержня между точками, расположенными соответственно на расстоянии x и $x + \Delta x$ от указанного конца. Величина $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ называется *средней линейной плотностью* стержня на указанном участке и обозначается $\rho_{ср}$. Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \rho_{ср} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$ называется *линейной плотностью* стержня в данной точке и обозначается ρ. Таким образом, $\rho = \frac{dm}{dx}$.

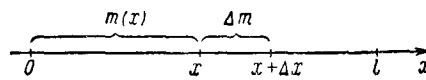


Рис. 27

Если плотность ρ не зависит от x, т. е. постоянна, то стержень называется однородным.

Если вернуться к рассмотрению произвольного, вообще говоря, неоднородного стержня, то для него дифференциал $dm = \rho\Delta x$ равен массе однородного стержня длины Δx с постоянной плотностью ρ, равной плотности рассматриваемого стержня в данной точке.

Мы видим на этом примере, что, интерпретируя производную как величину скорости, мы должны это понимать в широком смысле слова. Например, плотность стержня тоже «скорость» — скорость изменения массы относительно длины.

9.5. Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями

Все функции, рассматриваемые в этом пункте, предполагаются определенными в некоторой окрестности точки x_0.

1. *Пусть функции* $y_1 = f_1(x)$ *и* $y_2 = f_2(x)$ *имеют производные в точке* x_0, *тогда их сумма* $y_1 + y_2 = f_1(x) + f_2(x)$ *также имеет в точке* x_0 *производную и*

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2'. \tag{9.15}$$

Таким образом, производная суммы функций равна сумме производных.

Действительно, пусть $y=f_1(x)+f_2(x)$, $\Delta y_1=f_1(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)$, $\Delta y_2=f_2(x_0+\Delta x)-f_2(x_0)$, тогда

$$\Delta y=[f_1(x_0+\Delta x)+f_2(x_0+\Delta x)]-[f_1(x_0)+f_2(x_0)]=\Delta y_1+\Delta y_2.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y_1}{\Delta x}+\frac{\Delta y_2}{\Delta x},\quad \Delta x\neq 0. \tag{9.16}$$

Пределы $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_2}{\Delta x}$, согласно предположению, существуют и равны соответственно производным y_1' и y_2' в точке x_0, поэтому предел левой части равенства (9.16) при $\Delta x\to 0$ существует и равен $y_1'+y_2'$. Но $\lim\limits_{\Delta x\to\Delta}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$, поэтому y' в точке x_0 существует и $y'=y_1'+y_2'$.

Формула (9.15) доказана.

2. *Пусть функции $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ имеют производные в точке x_0, тогда и произведение $y_1y_2=f_1(x)f_2(x)$ имеет в точке x_0 производную, причем*

$$(y_1y_2)'=y_1'y_2+y_1y_2', \tag{9.17}$$

а если $y_2\neq 0$ в x_0, то и частное $\frac{y_1}{y_2}=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ также имеет в точке x_0 производную, причем

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)'=\frac{y_1'y_2-y_1y_2'}{y_2^2}. \tag{9.18}$$

Действительно, пусть $y=f_1(x)f_2(x)$, $\Delta y_1=f_1(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)$, $\Delta y_2=f_2(x_0+\Delta x)-f_2(x_0)$, тогда

$$\begin{aligned}\Delta y&=f_1(x_0+\Delta x)f_2(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)f_2(x_0)=\\&=[f_1(x_0)+\Delta y_1][f_2(x_0)+\Delta y_2]-f_1(x_0)f_2(x_0)=\\&=\Delta y_1f_2(x_0)+f_1(x_0)\Delta y_2+\Delta y_1\Delta y_2.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y_1}{\Delta x}f_2(x_0)+f_1(x_0)\frac{\Delta y_2}{\Delta x}+\frac{\Delta y_1}{\Delta x}\Delta y_2,$$

и так как в точке x_0

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_1}{\Delta x}=y_1',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=y_2',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y_2=0$$

(функция y_2 имеет производную, а потому и непрерывна в точке x_0), то при $x = x_0$ существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ и

$$y' = y'_1 y_2 + y_1 y'_2,$$

т. е. формула (9.17) доказана.

Пусть теперь $f_2(x_0) \neq 0$, тогда существует такое $h > 0$, что $f(x_0 + \Delta x) \neq 0$ для всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x| < h$. Если положить $z = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ и Δx выбрать так, что $|\Delta x| < h$, то

$$\Delta z = \frac{f_1(x_0 + \Delta x)}{f_2(x_0 + \Delta x)} - \frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)} =$$

$$= \frac{f_1(x_0) + \Delta y_1}{f_2(x_0) + \Delta y_2} - \frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)} = \frac{\Delta y_1 f_2(x_0) - f_1(x_0)\Delta y_2}{[f_2(x_0) + \Delta y_2] f_2(x_0)},$$

поэтому

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} f_2(x_0) - f_1(x_0) \frac{\Delta y_2}{\Delta x}}{[f_2(x_0) + \Delta y_2] f_2(x_0)}.$$

Отсюда, как и при доказательстве формулы (9.17), заключаем, что при $x = x_0$ существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = z'$ и

$$z' = \frac{y'_1 y_2 - y_1 y'_2}{y_2^2}.$$

Итак, формула (9.18) также доказана.

Следствие 1. *Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, тогда функция $cf(x)$ (c — постоянная) также имеет в этой точке производную, причем*

$$(cy)' = cy'. \tag{9.19}$$

Таким образом, производная произведения функции на постоянную равна произведению этой постоянной на производную функции.

Действительно, вспоминая, что $c' = 0$, из формулы (9.17) получим

$$(cy)' = c'y + cy' = cy'.$$

Следствие 2. *Пусть функции $y_1 = f_1(x), \ldots, y_n = f_n(x)$ имеют производные в точке x_0, тогда функция $c_1 f(x) + \ldots + c_n f_n(x)$ также имеет в точке x_0 производную, причем*

$$(c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n)' = c_1 y'_1 + \ldots + c_n y'_n,$$

т. е. производная линейной комбинации функций равна такой же линейной комбинации соответствующих производных.

Это утверждение непосредственно вытекает из формул (9.15) и (9.19) с помощью метода математической индукции.

Рассмотрим некоторые примеры на применение полученных формул.

1. Пусть $y = e^x \sin x - 2x^2 \cos x$; в силу формул (9.15), (9.17) и (9.19) имеем

$$y' = (e^x \sin x)' - 2(x^2 \cos x)' =$$
$$= e^x \sin x + e^x \cos x - 2(2x \cos x - x^2 \sin x).$$

2. Пусть $y = \operatorname{tg} x$; так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то по формуле (9.19) получаем

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. Аналогично для $y = \operatorname{ctg} x$

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

т. е.

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Свойства 1 и 2 переносятся и на дифференциалы функций. При тех же предположениях в точке x_0 имеем

$$d(y_1 + y_2) = dy_1 + dy_2;$$
$$d(cy) = c\,dy;$$
$$d(y_1 y_2) = y_2\, d)'_1 + y_1\, dy_2;$$
$$d\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{y_2\, dy_1 - y_1\, dy_2}{y_2^2}.$$

Вычислим, например, дифференциал произведения $y = y_1 y_2$:

$$dy = y'\,dx = (y_1 y_2)'\,dx = y'_1\, y_2\, dx + y_1 y'_2\, dx = y_2\, dy_1 + y_1\, dy_2,$$

ибо

$$y'_1\, dx = dy_1,\ y'_2\, dx = dy_2.$$

Аналогично доказываются и остальные формулы.

9.6. Производная обратной функции

Теорема 5. *Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и пусть в точке x_0 существует производная $\frac{df(x_0)}{dx} \neq 0$, тогда и обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем*

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}, \tag{9.20}$$

т. е. производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.

Доказательство. Зафиксируем какую-то окрестность точки x_0, на которой функция f определена, непрерывна и строго монотонна, и будем рассматривать f только на этой окрестности. Тогда, как мы знаем (см. п. 6.3), обратная функция определена, однозначна и непрерывна на некотором интервале, содержащем точку y_0, а именно на образе указанной выше окрестности точки x_0, и, значит, если $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $y = f(x)$, то условия $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ эквивалентны. Мы имеем

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

При $\Delta x \to 0$ (или, что то же в силу сказанного выше, при $\Delta y \to 0$) предел правой части существует, значит, существует и предел левой части, причем

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}.$$

Но $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{df^{-1}(y_0)}{dy}$, поэтому $\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}$, что и требовалось доказать.

Эта теорема допускает наглядную геометрическую интерпретацию (см. рис. 28). Как известно, $\frac{df(x_0)}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$, где α — величина угла, образованного касательной графика функции f в точке (x_0, y_0) с осью Ox, а $\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \operatorname{tg}\beta$, где β — величина угла, образованного той же касательной с осью Oy.

Очевидно, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, поэтому

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\beta} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}.$$

Рассмотрим примеры применения формулы (9.20).

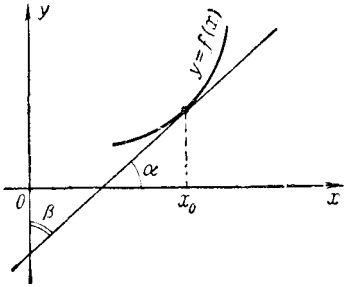


Рис. 28

1. $y = \arcsin x$, $x = \sin y$,

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Применяя формулу (9.20), получим

$$\frac{dy}{dx} = (\arcsin x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}.$$

Так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\cos y \geqslant 0$, поэтому $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$. Таким образом,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. $y = \arccos x$, $x = \cos y$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Аналогично предыдущему примеру

$$\frac{dy}{dx} = (\arccos x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

т. е.

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $y = \operatorname{arctg} x$, $x = \operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $-\infty < x < +\infty$.

Имеем

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2};$$

итак,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

4. $y = \operatorname{arcctg} x$, $x = \operatorname{ctg} y$, $0 < y < \pi$, $-\infty < x < \infty$.
В этом случае

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2},$$

т. е.

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

5. Если $y = \log_a x$, $x = a^y$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $-\infty < y < +\infty$, то

$$\frac{dy}{dx} = (\log_a x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a},$$

т. е.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

в частности, при $a = e$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Упражнение 3. Доказать, что если функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и если в x_0 существует производная $\frac{df(x_0)}{dx} = 0$, то обратная функция $f^{-1}(y)$ имеет в точке $y_0 = f(x_0)$ бесконечную производную, и, значит, в условном смысле (считая $\frac{1}{0} = \infty$) формула (9.20) справедлива и в этом случае.

9.7. Производная и дифференциал сложной функции

Теорема 6. *Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = F(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 имеет смысл сложная функция $\Phi(x) = F[f(x)]$ и эта функция также имеет производную в точке x_0, причем*

$$\Phi'(x_0) = F'(y_0) f'(x_0), \tag{9.21}$$

или, опуская значения аргументов,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Доказательство. Согласно теореме 2 настоящего параграфа, функции $y = f(x)$ и $z = F(y)$ непрерывны соответственно в точках x_0 и $y_0 = f(x_0)$ и, следовательно, в силу леммы п. 5.2 в некоторой окрестности точки x_0 имеет смысл сложная функция $\Phi(x) = F[f(x)]$. Функция F имеет в точке y_0 производную и, значит, дифференцируема в этой точке (см. п. 9.2), т. е.

$$\Delta z = F'(y_0)\,\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\,\Delta y, \tag{9.22}$$

где $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$. Функция $\varepsilon(\Delta y)$ не определена при $\Delta y = 0$. Для дальнейшего будет удобнее доопределить ее и при $\Delta y = 0$. Это можно сделать произвольным образом. Проще всего продолжить ее «по непрерывности», положив $\varepsilon(0) = 0$. Доопределенная таким образом функция $\varepsilon(\Delta y)$ непрерывна при $\Delta y = 0$.

Поделим теперь обе части равенства (9.22) на $\Delta x \neq 0$. Получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{9.23}$$

Функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, т. е. существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{9.24}$$

Из существования производной $f'(x_0)$ следует непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

При $\Delta x = 0$ имеем $\Delta y = 0$. Следовательно, Δy, рассматриваемая как функция Δx, непрерывна в точке $\Delta x = 0$. Поэтому, согласно правилу замены переменных в пределах непрерывных функций (см. п. 7.2), имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0. \tag{9.25}$$

Теперь из (9.23), переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, в силу (9.24) и (9.25) получим формулу (9.22).

Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы было сказано, что $\varepsilon(\Delta y)$ можно доопределить произвольно при $\Delta y = 0$. Однако, если, например, взять $\varepsilon(0) = 1$, то на первый взгляд формула (9.21) не получится, и не только потому, что в этом случае нельзя применить правило замены переменного для предела непрерывной функции, а потому, что если $\varepsilon(0) = 1$ и если существуют такие $\Delta x \neq 0$, для которых $\Delta y = 0$, то равенство (9.25) будет неверно.

Это, однако, не влияет на окончательный результат. Действительно, если для сколь угодно малых $\Delta x \neq 0$ существует $\Delta y = 0$, то отсюда легко следует, что

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

и, следовательно, второй член в правой части равенства (9.23) все равно стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ (более того, в этом случае, как это легко увидеть, все члены равенства (9.23) стремятся к нулю). Можно было бы воспользоваться также и тем, что из формулы (9.2) следует, что $\alpha(0) = 0$.

На примере приведенного выше доказательства теоремы 6 хорошо видно, как удачно выбранная вспомогательная конструкция (в данном случае просто доопределение в нуле функции $\varepsilon(\Delta y)$ нулем) может существенно упростить доказательство.

Следствие (инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных):

$$dz = F'(y_0)\,dy = \Phi'(x_0)\,dx. \tag{9.26}$$

В этой формуле $dy = f'(x)\,dx$ является дифференциалом функции, а dx — дифференциалом независимой переменной.

Таким образом, дифференциал функции имеет один и тот же вид: произведение производной по некоторой переменной на дифференциал этой переменной — независимо от того, является эта переменная в свою очередь функцией или независимой переменной.

Докажем это. Согласно формуле (9.7), $dz = \Phi'(x_0)\,dx$, отсюда, применяя формулу (9.21) для производной сложной функции, получаем $dz = F'(y_0)\,f'(x_0)\,dx$, но $f'(x_0)\,dx = dy$, поэтому $dz = F'(y_0)\,dy$, что и требовалось доказать.

Отметим, что теорема 6 по индукции распространяется на суперпозицию любого конечного числа функций. Например, для сложной функции вида $z(y(x(t)))$ в случае дифференцируемости функций $z(y)$, $y(x)$ и $x(t)$ в соответствующих точках имеет место формула

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}.$$

В случае, когда приходится иметь дело со сложной функцией $z = z(y)$, $y = y(x)$, для обозначения производной z' употребляется еще внизу индекс x или y для того, чтобы указать, по какой из переменных — x или y — берется производная, т. е. пишут z'_x или z'_y. В этих обозначениях формула (9.21) имеет вид

$$z'_x = z'_y\,y'_x.$$

Примеры. 1. Пусть $y=x^{\alpha}$, $x>0$, найдем $\frac{dy}{dx}$.

Имеем $x^{\alpha}=e^{u}$, где $u=\alpha \ln x$. Замечая, что $\frac{du}{dx}=\frac{\alpha}{x}$, получаем

$$\frac{dx^{\alpha}}{dx}=\frac{de^{u}}{dx}=\frac{de^{u}}{du}\frac{du}{dx}=e^{u}\cdot\frac{\alpha}{x}=e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Таким образом,

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

2. Найдем производную функции

$$y=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|.$$

Заметим, что если функция $u=u(x)$ дифференцируема и $u(x)\neq 0$, то

$$|u|'=u'\operatorname{sign} u.$$

Теперь

$$y'=\frac{1}{2a}\frac{\operatorname{sign}\dfrac{x-a}{x+a}}{\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2a}\frac{x+a}{x-a}\,\frac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2}=\frac{1}{x^2-a^2}.$$

3. Найдем производную функции

$$y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|.$$

Воспользовавшись замечанием в примере 2 о дифференцировании абсолютной величины функции, получим

$$y'=\frac{\operatorname{sign}\left(x+\sqrt{x^2+A}\right)}{\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|}\left(x+\sqrt{x^2+A}\right)'=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}.$$

4. Пусть $y=\ln^2 \arcsin\frac{1}{x}$.

Найдем производную и дифференциал этой функции:

$$y'=\left(\ln^2 \arcsin\frac{1}{x}\right)'=2\ln\arcsin\frac{1}{x}\left(\ln\arcsin\frac{1}{x}\right)'=$$

$$=2\ln\arcsin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\arcsin\dfrac{1}{x}}\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)'=$$

$$= 2\,\frac{\ln \arcsin \frac{1}{x}}{\arcsin \frac{1}{x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= -\frac{2 \ln \arcsin \frac{1}{x}}{|x|\sqrt{x^2-1}\arcsin \frac{1}{x}}.$$

Отсюда дифференциал находится непосредственно по формуле $dy = y'dx$, однако, если бы мы уже не имели готового выражения для производной, дифференциал можно было бы найти и непосредственно, используя его инвариантность относительно выбора переменных:

$$d\left(\ln^2 \arcsin \frac{1}{x}\right) = 2 \ln \arcsin \frac{1}{x}\, d\left(\ln \arcsin \frac{1}{x}\right) =$$

$$= 2 \ln \arcsin \frac{1}{x}\,\frac{1}{\arcsin \frac{1}{x}}\, d\left(\arcsin \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{2 \ln \arcsin \frac{1}{x}}{\arcsin \frac{1}{x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\, d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-2 \ln \arcsin \frac{1}{x}}{|x|\sqrt{x^2-1}\arcsin \frac{1}{x}}\, dx.$$

Выведем с помощью теоремы 6 еще одну полезную формулу.

5. Пусть $y = u^v$, где $u = u(x) > 0$, $v = v(x)$.

Вычислим $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^{v \ln u}}{dx} = e^{v \ln u}\,\frac{d}{dx}(v \ln u) = u^v\left(\frac{dv}{dx}\ln u + \frac{v}{u}\,\frac{du}{dx}\right) =$$

$$= u^v \frac{dv}{dx} \ln u + v u^{v-1} \frac{du}{dx}. \qquad (9.27)$$

С помощью правила дифференцирования сложной функции можно находить и *производные функций, заданных неявно.*

6. Пусть дифференцируемая функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$ (см. п. 4.2). (Вопрос о том, как узнать, что данное уравнение на самом деле определяет некоторую функцию, мы пока оставляем в стороне, он будет изучен в дальнейшем.) Дифференцируя тождество $F(x, y(x)) \equiv 0$ как сложную функцию, можно вычислять производную $\frac{dy}{dx}$.

В качестве конкретного примера вычислим производную неявной дифференцируемой функции $y(x)$, определенной уравнением $x^2 + y^2 = 25$. В данном конкретном случае существование подобных функций не вызывает сомнения, так как ими, например, являются функции $y = \sqrt{25-x^2}$ и $y = -\sqrt{25-x^2}$. Продифференцируем уравнение $x^2 + y^2 = 25$, считая y функцией от x. Получим $2x + 2yy' = 0$. Отсюда $y' = -\frac{x}{y}$.

С подобными задачами приходится сталкиваться в геометрии. Пусть, например, надо найти касательную к окружности $x^2 + y^2 = 25$ в точке (3; 4). Угловой коэффициент k касательной равен производной: $k = y'$, и, значит, в нашем случае $k = -\frac{x}{y}$. Для рассматриваемой точки $k = -\frac{3}{4}$; поэтому уравнение искомой касательной можно записать в виде $y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$, т. е. $3x + 4y - 25 = 0$.

Метод дифференцирования неявных функций может быть применен к выводу формул, полученных ранее другим путем.

7. Рассмотрим снова функцию $y = u^v$. Логарифмируя, имеем $\ln y = v \ln u$. Дифференцируя результат как неявную функцию, получим $\frac{y'}{y} = v' \ln u + \frac{v}{u} u'$ (выражение $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ называется *логарифмической производной* функции $y(x)$), или $y' = y\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right)$; подставляя сюда $y = u^v$, мы и получим снова формулу (9.27).

Другой пример: $y = \arcsin x$, значит, $x = \sin y$; дифференцируя как неявную функцию, получим $1 = y' \cos y$, откуда $y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, т. е. то же, что и в п. 9.6.

Замечание. Используя теорему 6, можно все полученные нами формулы для производных основных элементарных функций записать в несколько более общем виде: если $u = u(x)$ — дифференцируемая функция, то

$$(\sin u)' = u' \cos u; \qquad (e^u)' = e^u u';$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u; \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u > 0);$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; \qquad (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}};$$

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}; \qquad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}};$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u' \ (u > 0); \qquad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2};$$

$$(a^u)' = a^u u' \ln a; \qquad (\operatorname{arcctg} u) = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Из перечисленных формул видно (при $u = x$), что производные основных элементарных функций являются элементарными функциями.

Полученные же нами в совокупности формулы дают возможность конкретно вычислить производную и дифференциал любой элементарной функции в случае, если эта производная существует.

Следует иметь в виду, однако, что не всякая элементарная функция имеет производные во всех точках области своего определения. Примером элементарной не дифференцируемой во всех точках функции является функция $|x| = \sqrt{x^2}$; она, как мы знаем, не имеет производной в точке $x = 0$ (см. п. 9.2).

Упражнение 4. Ответить на вопросы.

Можно или нет доказать формулу $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ при $dy \neq 0$, просто умножив и разделив $\frac{dz}{dx}$ на dy?

Можно или нет доказать формулу $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ при $dx \neq 0$, **разделив числитель** и знаменатель дроби $\frac{dx}{dy}$ на dx?

9.8. Гиперболические функции и их производные

Определение 4. *Функции* $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ *и* $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *называются соответственно гиперболическим косинусом и гиперболическим синусом и обозначаются* $\operatorname{ch} x$ *и* $\operatorname{sh} x$:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

Справедлива формула

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \tag{9.28}$$

Действительно,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1.$$

Справедлива также формула

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

в самом деле,

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2 \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x.$$

Эти формулы напоминают соотношения между обычными (как их иногда называют, круговыми) синусами и косинусами. Для $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ имеется и ряд других соотношений, аналогичных соответствующим формулам для $\sin x$ и $\cos x$. Этим и объясняется название функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$. Эпитет же «гиперболический» связан с тем обстоятельством, что формулы

$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{ch} t, \\ y &= a \operatorname{sh} t \end{aligned} \tag{9.29}$$

параметрически задают гиперболу, подобно тому как формулы

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= a \sin t \end{aligned} \tag{9.30}$$

параметрически задают окружность. В самом деле, если возвести в квадрат равенства (9.29), вычесть одно из другого и воспользоваться формулой (9.28), то мы получим уравнение $x^2 - y^2 = a^2$, т. е. каноническое уравнение гиперболы.

Подобным же образом из уравнения (9.30) вытекает $x^2 + y^2 = a^2$, т. е. уравнение окружности.

Найдем производные гиперболических синуса и косинуса.

Замечая, что $(e^{-x})' = -e^{-x}$, имеем

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Таким образом,

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

Частные $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ по аналогии с обычными синусами и косинусами называются соответственно *гиперболическим тангенсом* и *гиперболическим котангенсом* и обозначаются

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x; \quad \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x.$$

Упражнения. 5. Вычислить производные $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$. Построить графики функций $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{th} x$ и $y = \operatorname{cth} x$. Найти производные их обратных функций. Выразить указанные обратные функции и их производные через логарифмы.

6. Вычислить производные следующих функций в тех точках, в которых они существуют:

1. $y = x^2 (x^3 - 1)^4$.
2. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$.
3. $y = \sqrt{x}$.
4. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.
5. $y = x^2 \sin 2x + 2x \cos x \ln x$.
6. $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} - \dfrac{\cos x}{2 \sin^2 x}$.
7. $y = \sqrt[5]{x} \operatorname{ctg} 2x - \dfrac{1}{2} \ln \operatorname{arctg} 3x$.
8. $y = \arcsin x$.
9. $y = \arccos \dfrac{1}{x}$.
10. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ln \dfrac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}$.
11. $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$.
12. $y = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2})$.
13. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x + 1}{x - 1}$.
14. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 - x}{1 + x}$.
15. $y = \sqrt[x]{x}$.
16. $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$.
17. $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$.
18. $y = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - \ln \operatorname{cth} \dfrac{x}{2}$.
19. $y = \arccos \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.
20. $y = \dfrac{b}{a} x + \dfrac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\dfrac{a - b}{a + b}} \operatorname{th} \dfrac{x}{2} \right)$ $(0 < b < a)$.

§ 10. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

10.1. Производные высших порядков

Определение 1. *Пусть функция $f(x)$, определенная на интервале (a, b), в каждой точке $x \in (a, b)$ имеет производную $f'(x)$ и пусть $x_0 \in (a, b)$. Производная функции $f'(x)$ в точке x_0 называется второй производной функции f и обозначается $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$.*

Таким образом, $f''(x_0) = [f'(x)]'|_{x=x_0}$ или, опуская обозначение аргумента, $y'' = (y')'$. Аналогично определяется производная $y^{(n)}$ любого порядка $n = 1, 2, \ldots$: *если существует производная $y^{(n-1)}$ порядка $n-1$* (при этом под производной нулевого порядка подразумевается сама функция $y^{(0)} = y$), *то* $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$.

Вспоминая определение производной (см. п. 9.1), определение n-й производной в точке x_0 можно записать в виде предела:

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Отметим, что когда говорится, что функция f имеет в точке x_0 производную порядка n, т. е. что существует $f^{(n)}(x_0)$, то отсюда следует в силу определения производной, что в некоторой окрестности точки x_0 у функции f существуют все производные низших порядков $k < n$, в частности, сама функция f определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение 2. *Функция f называется n раз непрерывно дифференцируемой на некотором промежутке, если на этом промежутке существует производная n-го порядка $f^{(n)}$ функции f и эта производная непрерывна.*

Примеры.

1. $y = x^3$, $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y^{(3)} = 6$, $y^{(4)} = y^{(5)} = \ldots = 0$.

2. $y = a^x$, $y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x \ln^2 a$, $y^{(3)} = a^x \ln^3 a$. Вообще по индукции легко устанавливается, что $y^{(n)} = a^x \ln^n a$. В частности, $(e^x)^{(n)} = e^x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3. $y = \sin x$. Вычисляя последовательно производные, получим $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y^{(3)} = -\cos x$, $y^{(4)} = \sin x$, далее производные повторяются в том же порядке. Чтобы получившийся результат записать одной формулой, заметим, что $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, и по-

этому $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ и т. д.

По индукции $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ для любого $n = 1, 2, \ldots$.

4. $y = \cos x$. Замечая, что $-\sin\alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, аналогично предыдущему примеру получим

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

10.2. Свойства производных высших порядков

Теорема 1. *Пусть функции $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ имеют производные n-го порядка в точке x_0, тогда функции $y_1 + y_2 = f_1(x) + f_2(x)$ и $y_1 y_2 = f_1(x) f_2(x)$ также имеют производные n-го порядка в точке x_0, причем*

$$(y_1 + y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} + y_2^{(n)}, \tag{10.1}$$

$$(y_1 y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} y_2 + C_n^1 y_1^{(n-1)} y_2^{(1)} + C_n^2 y_1^{(n-2)} y_2^2 + \ldots + y_1 y_2^{(n)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k)}, \tag{10.2}$$

где, как обычно, C_n^k обозначает число сочетаний из n элементов по k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Формула (10.2) обычно называется *формулой Лейбница**), ее символически можно записать в следующем виде, удобном для запоминания:

$$(y_1\, y_2)^{(n)} = (y_1 + y_2)\{n\}.$$

Индекс $\{n\}$ означает, что выражение $(y_1 + y_2)\{n\}$ записывается подобно биному Ньютона, т. е. в виде суммы с теми же коэффициентами, что и у бинома Ньютона, только вместо степеней y_1 и y_2 берутся их производные соответствующего порядка (см. (10.2)).

Формулы (10.1) и (10.2) доказываются по индукции. При $n = 1$, т. е. для производных первого порядка, они были доказаны в п. 9.5. Пусть теперь эти формулы справедливы для производных n-го порядка. Докажем их справедливость для производных порядка $n + 1$.

---

*) Г. Лейбниц (1646—1716) — немецкий философ и математик.

В случае суммы функций имеем

$$(y_1+y_2)^{(n+1)}=[(y_1+y_2)^{(n)}]'=\left(y_1^{(n)}+y_2^{(n)}\right)'=$$
$$=\left(y_1^{(n)}\right)'+\left(y_2^{(n)}\right)'=y_1^{(n+1)}+y_2^{(n+1)}.$$

Формула (10.1) доказана.

В случае произведения функций выкладки несколько сложнее:

$$(y_1y_2)^{(n+1)}=[(y_1y_2)^{(n)}]'=\left[\sum_{n=0}^{n}C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k)}\right]'=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[y_1^{(n+1-k)}y_2^{(k)}+y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)}\right]=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k y_1^{(n+1-k)}y_2^{(k)}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)}=$$
$$=y_1^{(n+1)}y_2^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}C_n^k y_1^{(n+1-k)}y_2^{(k)}+\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)}+y_1^{(0)}y_2^{(n+1)}.$$

Теперь объединим первые слагаемые полученных сумм, вторые и т. д. Тогда

$$(y_1y_2)^{(n+1)}=y_1^{(n+1)}y_2^{(0)}+\sum_{p=1}^{n}\left(C_n^p+C_n^{p-1}\right)y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)}+y_1^{(0)}y_2^{(n+1)}.$$

Отсюда, замечая, что $C_n^p+C_n^{p-1}=C_{n+1}^p$ *), получим

$$(y_1y_2)^{(n+1)}=y_1^{(n+1)}y_2^{(0)}+\sum_{p=1}^{n}C_{n+1}^p y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)}+$$
$$+y_1^{(0)}y_2^{(n+1)}=\sum_{p=0}^{n+1}C_{n+1}^p y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)}.$$

Формула (10.2) доказана.

Следствие. *Если c — постоянная, $ay=f(x)$ — функция, имеющая производную n-го порядка в точке x_0, то и функция $cf(x)$ также имеет производную порядка n в точке x_0, причем*

$$(cy)^{(n)}=cy^{(n)}. \tag{10.3}$$

Действительно, если в формуле (10.2) положить $y_1=c$, $y_2=y$, мы и получим формулу (10.3). Впрочем, эта формула следует также

*) В самом деле, зафиксируем один из $n+1$ элементов, из которых составляются сочетания по p элементов. Тогда число сочетаний, в которое вошел этот фиксированный элемент, равно C_n^{p-1}, а число сочетаний, в которые он не вошел, равно C_n^p, поэтому $C_{n+1}^p=C_n^{p-1}+C_n^p$.

очевидным образом и из n-кратного применения формулы (9.19) к функции cy.

Рассмотрим пример. Пусть $y = x^3 \sin x$. Найдем с помощью формулы Лейбница производную $y^{(10)}$. Имеем

$$(x^3 \sin x)^{(10)} = x^3 \sin\left(x + 10\cdot\frac{\pi}{2}\right) + 10\cdot 3x^2 \sin\left(x + 9\cdot\frac{\pi}{2}\right) +$$
$$+ 10\cdot 9\cdot 3x \sin\left(x + 8\cdot\frac{\pi}{2}\right) + 10\cdot 9\cdot 8 \sin\left(x + 7\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= -x^3 \sin x + 30x^2 \cos x + 270\, x \sin x - 720 \cos x.$$

10.3. Производные высших порядков от сложных функций, от обратных функций и от функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = y(x)$ имеет вторую производную в точке x_0, а функция $z = z(y)$ имеет вторую производную в точке $y_0 = y(x_0)$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 имеет смысл сложная функция $z[y(x)]$ и она также имеет в точке x_0 вторую производную, причем

$$z''_{xx} = z''_{yy}\, y'^2_x + z'_y\, y''_{xx}. \tag{10.4}$$

Действительно, поскольку существуют производные $y''(x_0)$ и $z''(y_0)$, то существуют производные $y'(x_0)$ и $z'(y_0)$. Следовательно, функции $y(x)$ и $z(y)$ непрерывны соответственно в точках x_0 и y_0. Поэтому в некоторой окрестности точки x_0 имеет смысл сложная функция $z = z[y(x)]$. Дифференцируя ее и опуская для простоты обозначение аргумента, имеем

$$z'_x = z'_y y'_x;$$

дифференцируя еще раз по x, получим

$$z''_{xx} = (z'_y)'_x\, y'_x + z'_y\, y''_{xx} = z''_{yy}\, y'^2_x + z'_y\, y''_{xx}.$$

Формула (10.4) доказана.

Аналогичным образом при соответствующих предположениях вычисляются и *производные высших порядков сложной функции*. Этот метод позволяет также доказывать существование и находить производные высших порядков от обратной функции.

Пусть функция $y = y(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 (ср. п. 9.6) и пусть в точке x_0 существуют производные y' и y'', причем $y'(x_0) \neq 0$, тогда и обратная функция $x = x(y)$ имеет вторую производную в точке $y_0 = y(x_0)$, причем она может быть выражена через производные y' и y'' функции $y(x)$ в точке x_0.

В самом деле, опуская, как и выше, обозначения аргумента, согласно теореме 5 § 9 (см. п. 9.6), имеем $x'_y = \frac{1}{y'_x}$. Беря производную по y от обеих частей и вычисляя ее от правой части по правилу сложной функции, получим

$$x''_{yy} = (x'_y)_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x x'_y = -\frac{y''_{xx}}{y'^2_x} \cdot \frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_{xx}}{y'^3_x}.$$

Аналогично при соответствующих предположениях вычисляются и *производные высших порядков для обратной функции*. Подобным же образом можно поступать и в случае так называемого параметрического задания функции.

Определение 3. *Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены в некоторой окрестности точки t_0 и одна из этих функций, например $x = x(t)$, непрерывна и строго монотонна в указанной окрестности, тогда в этой окрестности для функции $x(t)$ существует обратная функция $t = t(x)$, а в некоторой окрестности точки x_0 имеет смысл суперпозиция*

$$y(x) = y(t(x)).$$

Эта функция $y(x)$ и называется параметрически заданной функцией.

Выведем формулы для дифференцирования параметрически заданных функций.

Если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют в точке t_0 производные и если $x'(t_0) \neq 0$, то параметрически заданная функция $y(t(x))$ также имеет в точке $x_0 = x(t_0)$ производную, причем

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}. \tag{10.5}$$

В самом деле, по правилу дифференцирования сложной функции имеем (опуская обозначение аргумента)

$$y'_x = y'_t t'_x; \tag{10.6}$$

по правилу же дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \tag{10.7}$$

Из формул (10.6) и (10.7) и следует формула (10.5).

Если, кроме того, существуют $x''_{tt}(t_0)$ и $y''_{tt}(t_0)$, то существует и $y''_{xx}(x_0)$, причем

$$y''_{xx} = (y'_x)_x = \left(\frac{y'_x}{x'_t}\right)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t t'_x = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}.$$

Аналогично вычисляются *производные более высокого порядка параметрически заданных функций.*

Рассмотрим в качестве примера параметрически заданную функцию

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t),$$
$$-\infty < t < +\infty.$$

График этой функции называется *циклоидой* (рис. 29). Пусть для определенности $a > 0$, тогда функция $x(t) = a(t - \sin t)$ строго монотонно возрастает. Действительно, пусть $\Delta t > 0$, тогда, замечая, что $0 < \sin \frac{\Delta t}{2} < \frac{\Delta t}{2}$, имеем

$$x(t + \Delta t) - x(t) =$$
$$= a\{\Delta t - [\sin(t + \Delta t) - \sin t]\} =$$
$$= a\left[\Delta t - 2\cos\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\sin\frac{\Delta t}{2}\right] >$$
$$> a\left(\Delta t - 2 \cdot 1 \cdot \frac{\Delta t}{2}\right) = 0,$$

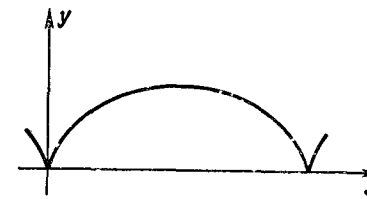


Рис. 29

что и означает строгое монотонное возрастание функции $x(t)$. В силу этого свойства существует однозначная обратная функция $t = t(x)$.

Далее

$$x'_t = a(1 - \cos t) = 2a\sin^2\frac{t}{2} \geqslant 0, \quad y'_t = a\sin t,$$

и x'_t обращается в ноль только в точках вида

$$t = 2k\pi, \quad k = 0, \quad \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Поэтому, если $t \neq 2k\pi$, то, согласно правилу дифференцирования функции, заданной параметрически, имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2};$$

$$y''_{xx} = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_x = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_t \frac{1}{x'_t} = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4\sin^4\frac{t}{2}} \cdot$$

10.4. Дифференциалы высших порядков

В настоящем пункте мы для удобства будем иногда вместо символа дифференцирования d писать букву δ, т. е. вместо dy, dx писать равнозначные выражения δy, δx.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором интервале (a, b). Как мы знаем, ее дифференциал

$$dy = f'(x)dx$$

является функцией двух переменных: точки x и переменной dx. Пусть функция $f'(x)$ в свою очередь дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда дифференциал в этой точке функции dy, рассматриваемой как функция только от x (т. е. при некотором фиксированном dx), если его обозначить символом δ, имеет вид

$$\delta(dy) = \delta[f'(x)\,dx]\big|_{x=x_0} = [f'(x)\,dx]\big|'_{x=x_0}\,\delta x = f''(x_0)\,dx\,\delta x. \quad (10.8)$$

Определение 4. *Значение дифференциала $\delta(dy)$, т. е. дифференциала от первого дифференциала, при $dx = \delta x$ называется вторым дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается d^2y, т. е.*

$$d^2y = f''(x_0)\,dx^2. \quad (10.9)$$

Заметим, что в силу этого определения $d^2x = 0$, ибо, при вычислении дифференциалов мы считаем приращение $dx = \Delta x$ постоянным.

Подобным же образом в случае, когда производная $(n-1)$-го порядка $y^{(n-1)}$ дифференцируема в точке x_0 или, что эквивалентно, когда в точке x_0 существует производная n-го порядка $y^{(n)}$, определяется *дифференциал n-го порядка* d^ny функции $y = f(x)$ в точке x_0 как дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка $d^{n-1}y$, в котором взято $\delta x = dx$:

$$d^ny = \delta(d^{n-1}y)\big|_{\delta x = dx}.$$

Покажем, что справедлива формула

$$d^ny = y^{(n)}\,dx^n, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (10.10)$$

(для простоты не пишем обозначения аргумента).

Доказательство этой формулы проведем по индукции. Для $n = 1$ и $n = 2$ она доказана. Пусть эта формула справедлива для дифференциалов порядка $n-1$:

$$d^{n-1}y = y^{(n-1)}\,dx^{n-1}.$$

Тогда, согласно данному выше определению, для вычисления дифференциала n-го порядка $d^n y$ надо взять сначала дифференциал (мы его обозначим символом δ) от дифференциала $d^{n-1}y$:

$$\delta(d^{n-1}y) = \delta(y^{(n-1)}\,dx^{n-1}) = (y^{(n-1)}\,dx^{n-1})'\,\delta x = y^{(n)}\,\delta x\,dx^{n-1},$$

затем положить $\delta x = dx$:

$$d^n y = \delta(d^{n-1}y)\big|_{\delta x = dx} = y^{(n)}\,dx^n.$$

Формула (10.10) доказана.

Из формулы (10.10) следует, что

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}. \tag{10.11}$$

Отметим некоторые свойства дифференциалов высших порядков.

1. $d^n(y_1 + y_2) = d^n y_1 + d^n y_2$.
2. $d^n(cy) = c\,d^n y$, c — постоянная.
3. $d^n(y_1 y_2) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,d^{n-k}y_1\,d^k y_2$, или, употребляя символическую запись,

$$d^n(y_1 y_2) = (dy_1 + dy_2)^{\{n\}},$$

где для какой-либо функции u мы считаем

$$(du)^{\{k\}} = d^k u \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,\ d^0 u = u^{(0)}\,dx^0 = u.$$

Эти формулы непосредственно следуют из соответствующих формул для производных n-го порядка (см. (10.1), (10.2), (10.3) и формулы (10.10)).

Важное замечание. Формулы (10.10) и (10.11) справедливы, вообще говоря, при $n > 1$ (в отличие от случая $n = 1$) только тогда, когда x является независимым переменным. В случае дифференциалов высших порядков по зависимым переменным дело обстоит сложнее.

Пусть $z = z(y)$, $y = y(x)$, имеет смысл суперпозиция $z[y(x)]$ и функции $z(y)$ и $y(x)$ дважды дифференцируемы. Тогда

$$dz = z'_y\,dy,$$

дифференцируя еще раз и не прибегая для простоты записи к символу δ, т. е. считая запись $d(dz)$ равносильной записи $\delta(dz)|_{\delta x = dx}$ (так всегда и поступают на практике), получим

$$d^2 z = d(dz) = d(z'_y\,dy) = d(z'_y)dy + z'_y\,d(dy) = z''_{yy}\,dy^2 + z'_y\,d^2 y \tag{10.12}$$

(мы написали $dz' = z''_{yy}dy$ на основании формулы (9.26), т. е. использовав инвариантность первого дифференциала).

Сравнивая формулы (10.9) и (10.12), мы видим, что они отличаются вторым членом, и так как, вообще говоря, $d^2y \neq 0$, то они существенно различны. Деля обе части равенства (10.12) на dx^2, мы получим формулу второй производной для сложной функции:

$$z''_{xx} = z''_{yy}\,y'^{\,2}_x + z'_y\,y''_{xx},$$

которая была нами получена раньше (см. (10.4)) другим путем.

Подобным же образом могут быть вычислены дифференциалы и производные высших порядков сложной функции.

Упражнение 1. Вычислить производные и дифференциалы:

$y^{(8)}$ для функции $y = \sqrt{x}$;

$y^{(50)}$ для функции $y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$;

$y^{(n)}$ для функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$;

$y^{(n)}$ для функции $y = \sin^3 x$;

$y^{(n)}$ для функции $y = x \operatorname{ch} x$;

$d^n y$ для функции $y = x^n e^x$;

$d^n y$ для функции $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

y''_{xx} для функции $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$;

y'''_{xxx} для функции $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;

y'_x и y''_{xx} для функции $x = y - a \sin y$;

y'_x и y''_{xx} для функции $x^2 + 2xy - y^2 = 1$.

§ 11. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

11.1. Теорема Ферма

Теорема 1 (Ферма*). *Пусть функция f определена на некотором интервале (a, b) и в точке $\xi \in (a, b)$ принимает наибольшее или наименьшее значение на (a, b). Если производная $f'(\xi)$ существует, то она равна нулю.*

Доказательство. Пусть для определенности функция f в точке ξ принимает наибольшее значение, т. е. $f(x) \leqslant f(\xi)$ для

*) П. Ферма (1601—1665) — французский математик.

всех $x \in (a, b)$. Тогда

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geqslant 0, \tag{11.1}$$

если $x < \xi$, и

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leqslant 0, \tag{11.2}$$

если $x > \xi$.

Если существует производная $f'(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, то в пределе при $x \to \xi - 0$ из неравенства (11.1) получим, что $f'(\xi) \geqslant 0$, а из неравенства (11.2) при $x \to \xi + 0$, что $f'(\xi) \leqslant 0$, что возможно лишь в случае $f'(\xi) = 0$.

Теорема доказана.

Геометрическая интерпретация теоремы Ферма состоит в том, что, если в точке $\xi \in (a, b)$ функция f принимает наибольшее или наименьшее значения, то касательная в точке $(\xi, f(\xi))$ к графику функции параллельна оси Ox (см. рис. 30).

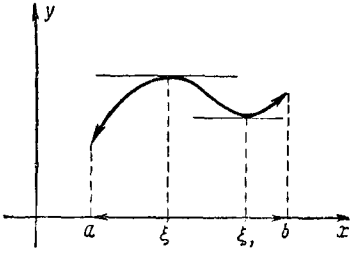


Рис. 30

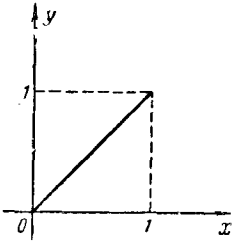


Рис. 31

Замечание. Если функция f определена на отрезке $[a, b]$, то в случае, когда она принимает наибольшее или наименьшее значения на одном из концов a или b и когда на этом конце существует производная (естественно, односторонняя производная, так как только о ней и можно говорить в этом случае), то она, вообще говоря, не равна нулю. Так, например, рассматривая функцию $y = x$ на отрезке $[0; 1]$, видим, что эта функция в точке $x = 0$ принимает наименьшее, а в точке $x = 1$ наибольшее значения, однако как в той, так и в другой точке производная равна единице (рис. 31).

11.2. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о средних значениях

Теорема 2 (Ролль*)). *Пусть функция f:*

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) имеет в каждой точке интервала (a, b) производную;

3) $f(a) = f(b)$,

тогда существует такая точка ξ, что $f'(\xi) = 0$, $a < \xi < b$.

Доказательство. Мы уже знаем, что функция, непрерывная на отрезке, принимает наибольшее и наименьшее значения в некоторых точках этого отрезка (см. п. 6.1). Пусть $M = \max f(x)$, $m = \min f(x)$, тогда для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Если $m = M$, то функция f постоянна и, значит, $f' \equiv 0$ на $[a, b]$. В качестве точки ξ можно взять любую точку интервала (a, b).

Если же $m \neq M$, то из условия $f(a) = f(b)$ следует, что хоть одно из значений m или M не принимается на концах отрезка $[a, b]$. Пусть этим значением является M, т. е. существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(\xi) = M$. В этом случае из теоремы Ферма следует, что $f'(\xi) = 0$.

Теорема доказана.

Геометрически теорема Ролля означает, что у графика непрерывной на отрезке и дифференцируемой внутри его функции, принимающей на концах этого отрезка одинаковые значения, существует точка, в которой касательная параллельна оси абсцисс (рис. 32).

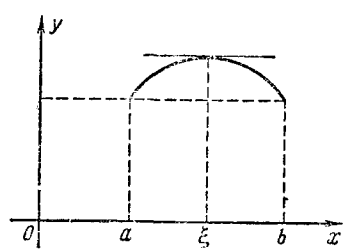


Рис. 32

Заметим, что все предпосылки теоремы Ролля существенны. Чтобы в этом убедиться, достаточно привести примеры функций, для которых выполнялись бы два из трех условий теоремы, третье же не выполнялось и у которых не существует точки ξ, такой, что $f'(\xi) = 0$. (При этом в силу условия 3, в котором говорится о значениях функции в концевых точках промежутка, следует рассматривать лишь функции, определенные на отрезках.)

Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0; 1]$ и равная x, если $0 \leqslant x < 1$, и 0, если $x = 1$, удовлетворяет условиям 2 и 3, но не удовлетворяет условию 1 (рис. 33).

Функция $f(x) = |x|$, $x \in [-1; 1]$ удовлетворяет условиям 1 и 3, но не удовлетворяет условию 2 (рис. 34).

*) М. Ролль (1652—1719) — французский математик.

Наконец, функция $y = x$, $x \in [0; 1]$ удовлетворяет условиям 1 и 2, но не удовлетворяет условию 3 (см. рис. 31).

Для всех этих функций не существует точки, в которой их производная обращалась бы в ноль.

Заметим, что построением соответствующих примеров (если, конечно, это удается сделать) и проверяют обычно в математике существенность тех или иных условий доказываемых теорем.

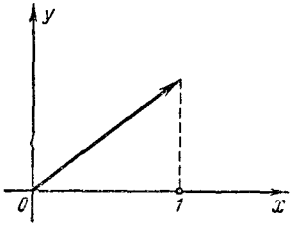


Рис. 33

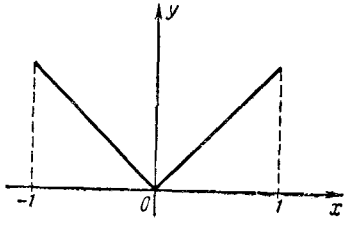


Рис. 34

В дальнейшем мы не будем проводить проверки необходимости условий теорем, предоставляя это делать учащемуся по мере внутренней потребности.

Упражнения. 1. Доказать, что, если функция f удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[a, b]$ и не является постоянной, то на этом отрезке существуют такие точки ξ_1 и ξ_2, что $f'(\xi_1) > 0$ и $f'(\xi_2) < 0$.

2. Привести пример функции непрерывной на отрезке $[a, b]$, имеющей производную в каждой точке интервала (a, b), но не имеющей производной (односторонней) в точке a.

Теорема 3 (Лагранж *)). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную в каждой точке интервала (a, b), тогда существует такая точка ξ, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad a < \xi < b. \tag{11.3}$$

Эта теорема является, очевидно, обобщением теоремы Ролля.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \lambda x, \tag{11.4}$$

где число λ выберем таким образом, чтобы $F(a) = F(b)$, т. е. чтобы $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$. Для этого достаточно взять

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{11.5}$$

*) Ж. Лагранж (1736—1813) — французский математик и механик.

Для функции $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля: $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и принимает на концах одинаковые значения, поэтому существует такая точка ξ, что $F'(\xi) = 0$, $a < \xi < b$. Из (11.4) получаем $F'(x) = f'(x) - \lambda$, поэтому $f'(\xi) - \lambda = 0$. Подставляя сюда λ из (11.5), получим

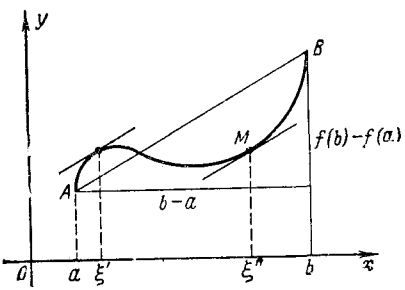


Рис. 35

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (11.6)$$

Теорема доказана.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в следующем (рис. 35). Пусть $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$ — точки графика функции f, AB — хорда, соединяющая точки A и B. Тогда отношение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ равно тангенсу угла наклона β хорды AB к оси Ox, т. е.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg}\beta,$$

а производная $f'(\xi)$, как известно (см. п. 9.3), равна тангенсу угла наклона α касательной к графику функции f в точке $(\xi, f(\xi))$, т. е.

$$f'(\xi) = \operatorname{tg}\alpha,$$

и равенство (11.6) может быть переписано в виде

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta.$$

Таким образом, теорема Лагранжа показывает, что в условиях теоремы должна найтись точка ξ (может быть, и не одна — см. рис. 35, точки ξ' и ξ''), в которой касательная к графику параллельна хорде AB.

Теорема Лагранжа найдет ряд важных приложений в дальнейшем.

Приведем другие формы записи формулы (11.3). Пусть $a < \xi < b$ и $\frac{\xi - a}{b - a} = \theta$. Тогда

$$\xi = a + \theta(b - a), \quad 0 < \theta < 1. \qquad (11.7)$$

Обратно, если ξ выражается по формуле (11.7), то, как легко видеть, $a < \xi < b$. Таким образом, в виде (11.7) могут быть пред-

ставлены все точки интервала (a, b) и только эти точки. Поэтому формула (11.3) может быть записана в виде

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)]\ (b-a),\ 0<\theta<1. \tag{11.8}$$

Положим теперь $a=x$, $b-a=\Delta x$ и, значит, $b=x+\Delta x$, тогда (11.8) перепишется в виде

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x\ \Delta x,\ 0<\theta<1. \tag{11.9}$$

Формула (11.9), а также, конечно, равнозначные ей формулы (11.3) и (11.8), называется *формулой конечных приращений Лагранжа*, или просто *формулой конечных приращений* в отличие от приближенного равенства

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x, \tag{11.10}$$

которое иногда называют формулой бесконечно малых приращений. Эта формула выражает собой тот факт, что левая и правая части равенства (11.10) равны между собой для дифференцируемой в точке x функции f «с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем приращение Δx».

Замечание. Отметим, что формула Лагранжа (11.3) может быть переписана в виде

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),$$

где $a<b$. Отсюда следует, что формула (11.3) справедлива не только в случае $a<b$, но и в случае $a>b$.

Отметим две леммы, легко доказываемые с помощью теоремы Лагранжа и полезные для дальнейшего.

Лемма 1. *Пусть функция f:*

1) определена на некотором промежутке (конечном или бесконечном);

2) имеет производную, равную нулю во всех его внутренних точках;

3) непрерывна в каждом из концов рассматриваемого промежутка, если он ему принадлежит,

тогда функция f постоянна на указанном промежутке.

Действительно, каковы бы ни были две точки x_1 и x_2, $x_1<x_2$, рассматриваемого промежутка, функция f, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[x_1, x_2]$, и, значит,

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),$$

где $x_1<\xi<x_2$. Но, согласно условию 2 леммы, $f'(\xi)=0$, и, значит, $f(x_1)=f(x_2)$ для любых двух точек x_1 и x_2 из области определения функции f, что и означает, что функция f постоянна.

Следствие. *Если две функции f и g дифференцируемы во всех внутренних точках некоторого промежутка и в этих точках*

$$f' = g',$$

а на концах промежутка (если они в него входят) функции f и g непрерывны, то эти функции отличаются на рассматриваемом промежутке лишь на постоянную

$$f - g = c.$$

Действительно, функция $F = f - g$ удовлетворяет условиям леммы, в частности, $F' = f' - g' = 0$ во внутренних точках промежутка и потому $F = c$.

Лемма 2. *Пусть функция* φ:

1) непрерывна на интервале (a, b);

2) дифференцируема во всех точках интервала (a, b), *кроме, быть может, некоторой точки* $x_0 \in (a, b)$;

3) существует $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi'(x)$,

тогда существует и производная $\varphi'(x_0)$, *причем*

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

Действительно, пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi'(x) = A$. Если $a < x < b$ и $x \neq x_0$, то по теореме Лагранжа $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0)$, где $\xi \in (x_0, x)$, если $x > x_0$, и $\xi \in (x, x_0)$, если $x < x_0$, отсюда

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(\xi).$$

Будем для определенности считать, что $x > x_0$. Точка $\xi = \xi(x)$ является функцией от x и притом, вообще говоря, многозначной. Выберем произвольно для каждого $x \in (a, b)$ одно какое-либо значение ξ, тогда получим однозначную функцию (как говорят, однозначную ветвь многозначной функции). Поскольку $x_0 < \xi(x) < x$, то

$$\lim_{x \to x_0} \xi(x) = x_0.$$

Применяя правило замены переменного для пределов функций (см. п. 4.5), получим, что существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \varphi'(\xi) = A,$$

а следовательно, существует и предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=A.$$

Это и означает, что производная $\varphi'(x_0)$ существует и равна A.

Упражнение 3. Пусть функция f непрерывна на интервале (a, b) и дифференцируема во всех точках этого интервала, кроме, быть может, некоторой точки $x_0\in(a, b)$. Пусть существуют $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)$, причем они не равны между собой. Доказать, что при этих предположениях $f'(x_0)$ не существует.

Как в теореме Ролля, так и в теореме Лагранжа (а также и в нижеследующей теореме Коши) речь идет о существовании некоторой точки ξ, $a<\xi<b$, как можно сказать, «средней точки», для которой выполняется то или иное равенство. Этим и объясняется название «теоремы о среднем» для этой группы теорем. Докажем последнюю нужную нам теорему этого типа.

Теорема 4. (Коши). *Пусть функции f и g:*

1) непрерывны на отрезке $[a, b]$;

2) имеют производные в каждой точке интервала (a, b);

3) производная $g'\neq 0$ во всех точках интервала (a, b), тогда существует такая точка ξ, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\quad a<\xi<b. \tag{11.11}$$

Заметим, что из условий теоремы следует, что написанная формула (11.11) имеет смысл, т. е. $g(a)\neq g(b)$. В самом деле, если бы $g(a)=g(b)$, то функция g удовлетворяла бы условиям теоремы Ролля и, значит, нашлась бы такая точка ξ, что $g'(\xi)=0$, $a<\xi<b$, что противоречило бы условию 3.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\lambda g(x), \tag{11.12}$$

где число λ выберем таким образом, чтобы $F(a)=F(b)$, т. е. чтобы $f(a)-\lambda g(a)=f(b)-\lambda g(b)$. Для этого нужно взять

$$\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{11.13}$$

Функция F удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, поэтому существует такая точка ξ, что $F'(\xi)=0$, $a<\xi<b$. Но из (11.12) $F'(x)=f'(x)-\lambda g'(x)$, поэтому

$$f'(\xi)-\lambda g'(\xi)=0,$$

откуда следует, что

$$\lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Сравнивая (11.13) и (11.14), получим формулу (11.11), обычно называемую *формулой конечных приращений Коши*.

Отметим, что формула конечных приращений Лагранжа является частным случаем формулы конечных приращений Коши, соответствующим $g(x) = x$. Эти формулы доказаны независимо, во-первых, из-за той важной роли, которую играет формула Лагранжа, а во-вторых, чтобы иметь возможность, используя одну и ту же идею, применить ее дважды в доказательствах, причем сначала для большей наглядности в более простом случае.

Формула Коши (11.11), так же как и формула Лагранжа (11.3), справедлива не только в случае $a < b$, но и в случае $a > b$.

Упражнение 4. Пусть $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Применим к этой функции на отрезке $[0, x]$ формулу Лагранжа.

$$x^2 \sin \frac{1}{x} = \left(2\xi \sin \frac{1}{\xi} - \cos \frac{1}{\xi}\right) x,$$

где $0 < \xi < x$. Сократим обе части равенства на $x \neq 0$:

$$x \sin \frac{1}{x} = 2\xi \sin \frac{1}{\xi} - \cos \frac{1}{\xi}.$$

Переходя здесь к пределу при $x \to 0$ (при этом, очевидно, $\xi \to 0$), получим

$$\lim_{\xi \to 0} \cos \frac{1}{\xi} = 0,$$

так как два других слагаемых очевидным образом стремятся к нулю. Вместе с тем предел $\cos \frac{1}{\xi}$ при стремлении аргумента к нулю не существует! Где ошибка?

§ 12. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ПО ПРАВИЛУ ЛОПИТАЛЯ

Если при нахождении предела некоторой функции, заданной формулой, при стремлении аргумента к некоторой величине (числу или одному из символов ∞, $+\infty$ или $-\infty$) при формальной подстановке этой величины в качестве аргумента в формулу, задающую рассматриваемую функцию, получаются выражения вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 0^∞ или 1^∞, то они и называются *не-*

определенностями, так как в этом случае по получающимся выражениям нельзя судить о том, существует или нет указанный предел, не говоря уже о его значении в случае его существования.

Наряду с основным методом нахождения пределов функций методом выделения главной части существуют и другие способы отыскания пределов; ряд из них, носящих общее название *правил Лопиталя**), мы и изложим в этом параграфе.

12.1. Неопределенности вида $\frac{0}{0}$

Теорема 1. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$, *определенные на полуинтервале* $[a, b)$, *такие, что:*

1) $f(a) = g(a) = 0$;

2) *существуют производные (односторонние)* $f'(a)$ *и* $g'(a)$, *причем* $g'(a) \neq 0$, *тогда*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Для доказательства этой теоремы применим метод выделения главной части.

Доказательство. В силу условия 2 имеем (см. п. 9.2)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a),$$
$$g(x) = g(a) + g'(a)(x - a) + o(x - a).$$

Откуда в силу условия 1 следует, что

$$f(x) = f'(a)(x - a) + o(x - a),$$
$$g(x) = g'(a)(x - a) + o(x - a),$$

т. е. (см. теорему 1 в п. 8.3)

$$f(x) \sim f'(a)(x - a), \quad g(x) \sim g'(a)(x - a)$$

при $x \to a + 0$. Поэтому (см. теорему 2 в п. 8.3)

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(a)(x-a)}{g'(a)(x-a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Теорема доказана.

В теореме 1 предполагалось существование производных в точке a. Докажем теперь теорему, в известном смысле близкую по содержанию к предыдущей, в которой, однако, не будет предполагаться существование производных $f'(a)$ и $g'(a)$.

Теорема 2. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$:

1) *дифференцируемы на интервале* (a, b);

2) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$;

---

*) Г. Лопиталь (1661—1704) — французский математик.

3) $g'(x) \neq 0$ *для всех* $x \in (a, b)$;

4) *существует (конечный или бесконечный) предел* $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

тогда существует и

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. В силу условий теоремы функции f и g не определены в точке a; доопределим их, положив $f(a)=g(a)=0$. Теперь функции f и g будут непрерывны в точке a и будут удовлетворять условиям теоремы Коши о среднем значении (см. п. 11.2) на любом отрезке $[a, x]$, где $a < x < b$. Поэтому для каждого x, $a < x < b$, существует такое $\xi = \xi(x) \in (a, x)$, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{12.1}$$

Фиксируя для простоты для каждого x одно из указанных значений ξ, получим, что $\lim\limits_{x \to a+0} \xi(x) = a$ (ср. с доказательством леммы 2 в п. 11.2). Поэтому, если существует $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$, то из правила замены переменного для пределов функций следует, что существует и $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k$. Теперь из (12.1) получаем

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k.$$

Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 остаются справедливыми с естественными видоизменениями и для случая $x \to a - 0$.

Теорема 3. *Пусть функции* f и g:

1) *дифференцируемы при* $x > c$;

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$;

3) $g'(x) \neq 0$ *для всех* $x > c$;

4) *существует (конечный или бесконечный) предел*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

тогда существует и

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $c > 0$ (если $c < 0$, в качестве нового c возьмем, например,

$c = 1$). Сделаем замену переменного $x = \frac{1}{t}$. Функции $f\left(\frac{1}{t}\right)$ и $g\left(\frac{1}{t}\right)$ определены на интервале $\left(0, \frac{1}{c}\right)$; условию $x \to +\infty$ соответствует условие $t \to +0$; на интервале $\left(0, \frac{1}{c}\right)$ существуют производные

$$\frac{df\left(\frac{1}{t}\right)}{dt} = -f'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}, \quad \frac{dg\left(\frac{1}{t}\right)}{dt} = -g'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2},$$

где штрихом обозначены производные функций f и g по первоначальному аргументу.

Из сказанного и условий теоремы следует, что функции $f\left(\frac{1}{t}\right)$ и $g\left(\frac{1}{t}\right)$ на интервале $\left(0, \frac{1}{c}\right)$ удовлетворяют условиям 1, 2 и 3 теоремы 2.

Покажем еще, что из существования предела $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, который мы обозначим через k, следуют существование предела $\lim\limits_{t \to +0} \frac{\frac{df\left(\frac{1}{t}\right)}{dt}}{\frac{dg\left(\frac{1}{t}\right)}{dt}}$ и равенство его k, т. е. что выполняется и последнее условие 4 теоремы 2. Действительно,

$$\lim_{t \to +0} \frac{\frac{df\left(\frac{1}{t}\right)}{dt}}{\frac{dg\left(\frac{1}{t}\right)}{dt}} = \lim_{t \to +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Теперь из теоремы 2, примененной к функциям $f\left(\frac{1}{t}\right)$ и $g\left(\frac{1}{t}\right)$, следует, что

$$\lim_{t \to +0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = k.$$

Но $\dfrac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $x = \dfrac{1}{t}$, поэтому

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to +0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = k.$$

Теорема доказана.

Эта теорема остается верной при соответствующем видоизменении и при $x \to -\infty$.

12.2. Неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$

Теорема 4. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:*

1) *дифференцируемы на интервале (a, b);*
2) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a+0} g(x) = \infty$;
3) $g'(x) \neq 0$ *на* (a, b);
4) *существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{12.2}$$

тогда существует и

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $g(x) \neq 0$ и $f(x) \neq 0$. Действительно, из условия 2 следует существование такого $\eta > 0$, что для всех $x \in (a, a+\eta)$ указанные неравенства выполняются.

Пусть сначала предел (12.2) конечен и $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$. Пусть фиксировано какое-либо $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы для всех x, удовлетворяющих условию $a < x < a + \delta$, выполнялось неравенство

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - k \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12.3}$$

Зафиксируем какое-либо x_0 так, что $a < x_0 < a + \delta$, тогда для любого x, удовлетворяющего условию $a < x < x_0$, по теореме Коши существует такое ξ, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad x < \xi < x_0, \quad \xi = \xi(x).$$

Отсюда

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

и, значит,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{12.4}$$

Нам надо доказать, что левая часть, а следовательно, и правая часть этого равенства стремятся к k.

Для первого сомножителя правой части равенства (12.4) при x_0, стремящемся к $a+0$, имеем

$$\lim_{x_0 \to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k,$$

а для второго при фиксированном x_0

$$\lim_{x \to a+0} \frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1.$$

Таким образом, первый сомножитель может быть сделан сколь угодно близким к k за счет выбора x_0, достаточно близкого к a, а второй сомножитель может быть сделан близким к единице за счет выбора x, достаточно близкого к a при фиксированном x_0. Тем самым здесь нельзя просто использовать теорему о произведении пределов, а придется сделать последовательный переход к пределу, т. е. сначала выбрать x_0 достаточно близко к a, а затем, зафиксировав его, образно говоря, устремить x к a.

Положим

$$\alpha_1 = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - k, \quad x < \xi < x_0. \tag{12.5}$$

Точка ξ, а потому и функция α_1 зависят от точек x и x_0 однако при любом их выборе, таком, что $a < x < x_0 < a + \delta$, в силу неравенства (12.3) имеем

$$|\alpha_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12.6}$$

Положим, далее,

$$\alpha_2(x)=\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}-1, \tag{12.7}$$

очевидно,

$$\lim_{x\to a+0}\alpha_2(x)=0. \tag{12.8}$$

Из (12.4), (12.5) и (12.7) следует, что

$$\frac{f(x)}{g(x)}=(k+\alpha_1)(1+\alpha_2(x))=k+\alpha_1+(k+\alpha_1)\alpha_2(x). \tag{12.9}$$

Выберем теперь δ_ε так, чтобы при $a<x<a+\delta_\varepsilon$ выполнялось неравенство

$$|\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2(|k|+\varepsilon)}. \tag{12.10}$$

Это возможно в силу (12.8).

Из неравенств (12.6) и (12.10) следует, что для всех x, удовлетворяющих условию $a<x<a+\delta_\varepsilon$, выполняются неравенства

$$|\alpha_1+(k+\alpha_1)\alpha_2(x)|\leqslant|\alpha_1|+(|k|+|\alpha_1|)|\alpha_2 x|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\left(|k|+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2(|k|+\varepsilon)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

и потому из (12.9) следует, что $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-k\right|<\varepsilon$ при $a<x<a+\delta_\varepsilon$, что и означает существование предела

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

Пусть теперь $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, тогда в некоторой окрестности точки a имеем $f'(x)\neq 0$ (почему?) и $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$. Поэтому, согласно доказанному выше, $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$, откуда и следует, что $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Теорема доказана. Она остается справедливой и для случая, когда $x\to a-0$, а также для случая $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$.

Из сказанного, очевидно, следует, что правило Лопиталя справедливо не только для односторонних, но и для двусторонних пределов.

Примеры на применение правила Лопиталя к нахождению пределов

1. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$, $\alpha>0$.

Замечая, что

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},\quad (x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$$

и что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}=0,$$

получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0.$$

Это означает, что при $x\to+\infty$ функция $\ln x$ растет медленнее, чем любая положительная степень x.

Иногда правило Лопиталя приходится применять несколько раз.

2. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}$, где n — натуральное число и $a>1$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)'}{(a^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^x\ln a}=\dots$$

$$\dots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{a^x\ln^n a}=0. \tag{12.11}$$

Таким образом, при $x\to+\infty$ любая степень x^n растет медленнее, чем показательная функция a^x, $a>1$.

3. Следует иметь в виду, что проведение вычислений по типу (12.11) оправдано только в том случае, когда в результате получается конечный или бесконечный предел. Так, например, было бы ошибкой написать

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'},$$

так как предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

не существует (почему?). Вместе с тем данная неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ может быть элементарно раскрыта:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1.$$

Упражнение 1. Пусть $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=\sin x$. Найти в этом случае $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ и доказать, что для этого примера правило Лопиталя неприменимо.

4. Неопределенности 0^0, ∞^0, 0^∞ или 1^∞ можно раскрыть, предварительно прологарифмировав соответствующие функции. Например, чтобы найти $\lim\limits_{x\to+0}x^x$, следует найти предел

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+0}x=0.$$

Поэтому в силу непрерывности показательной функции

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{x\ln x}=1.$$

Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ следует привести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. При этом, как и всегда при применении правила Лопиталя, по ходу вычислений рекомендуется упрощать получающиеся выражения. Поясним это на примере.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$.

Заметим, что

$$\frac{\sin^2 x-x^2\cos x}{x^2\sin^2 x}=\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}.$$

Предел первого сомножителя правой части находится непосредственно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{\sin x}\cos x\right)=2,$$

а предел второго — с применением правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x - x\cos x}{x^2\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x + x^2\cos x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\frac{x}{\sin x}\cos x} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right) = \frac{2}{3}.$$

Упражнение 2. Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x - x^a}{x-a}$, $a>0$.
2. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\varepsilon}\ln x$, $\varepsilon>0$.
3. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$.

§ 13. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

13.1. Вывод формулы Тейлора

Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то ее приращение можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - y_0$, $y_0 = f(x_0)$ и $A = f'(x_0)$, т. е. $f(x) = y_0 + A(x-x_0) + o(x-x_0)$. Иначе говоря, существует линейная функция

$$P_1(x) = y_0 + A(x-x_0), \tag{13.1}$$

такая, что

$$f(x) = P_1(x) + o(x-x_0),$$

причем

$$P_1(x_0) = y_0 = f(x_0), \quad P_1'(x_0) = A = f'(x_0).$$

Поставим более общую задачу. Пусть функция f имеет в точке x_0 n производных. Требуется выяснить, существует или нет многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, такой, что

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n) \tag{13.2}$$

и

$$f(x_0)=P(x_0),\quad f'(x_0)=P_n'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)=P_n^{(n)}(x_0). \quad (13.3)$$

Попробуем найти этот многочлен по аналогии с (13.1) в виде

$$P_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ \ldots\ +A_n(x-x_0)^n.$$

Замечая, что $P_n(x_0)=A_0$, из первого условия (13.3), т. е. условия $f(x_0)=P_n(x_0)$, имеем $A_0=f(x_0)$. Далее,

$$P_n'(x)=A_1+2A_2(x-x_1)+\ \ldots\ +n\,A_n(x-x_0)^{n-1},$$

отсюда $P_n'(x_0)=A_1$, и так как $P_n'(x_0)=f'(x_0)$, то $A_1=f'(x_0)$. Затем находим вторую производную многочлена $P_n(x)$:

$$P_n''(x)=2\cdot 1\cdot A_2+\ \ldots\ +n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2}.$$

Отсюда и из условия $f''(x_0)=P_n''(x_0)$ получим $A_2=\frac{f''(x_0)}{2!}$ и вообще

$$A_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

В силу самого построения многочлен

$$P_n(x)=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

удовлетворяет условию (13.3). Проверим, удовлетворяет ли он условию (13.2).

Пусть

$$r_n(x)=f(x)-P_n(x).$$

Из условия (13.3) следует, что

$$r_n(x_0)=r_n'(x_0)=\ \ldots\ =r_n^{(n)}(x_0)=0. \quad (13.4)$$

Поэтому, применяя n раз правило Лопиталя для раскрытия неопределенности $\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}$ при $x\to x_0$, а именно сначала $n-1$ раз теорему 2 из § 12, а затем теорему 1 того же параграфа, получим

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}=$$

$$=\frac{r^{(n)}(x_0)}{n!}=0,$$

т. е. действительно

$$r_n(x) = o((x-x_0)^n).$$

Итак, доказана следующая очень важная теорема.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b), $x_0 \in (a, b)$, и пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до порядка n включительно, тогда*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \tag{13.5}$$

или

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

Эта теорема вместе с доказательством остается справедливой и для функции f, определенной на отрезке $[a, b]$ при $x_0 \in [a, b]$, только в случае $x_0 = a$ и $x_0 = b$ под производными следует понимать соответствующие односторонние производные.

Формула (13.5) называется *формулой Тейлора n-го порядка с остаточным членом в форме Пеано**)*.

Многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{13.6}$$

называется *многочленом Тейлора*, а функция

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) \tag{13.7}$$

— остаточным членом n-го порядка формулы Тейлора. Как показано, остаточный член $r_n(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем все члены многочлена Тейлора (13.6).

Укажем другой вид записи формулы (13.5). Полагая

$$x - x_0 = \Delta x, \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

получим

$$\Delta y = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\Delta x^k + r_n(x).$$

Если в формуле (13.5) $x_0 = 0$, то получается частный вид формулы Тейлора, называемый обычно *формулой Маклорена***)*.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + r_n(x^n). \tag{13.8}$$

---

*) Д. Пеано (1858—1932) — итальянский математик.

**) К. Маклорен (1698—1746) — шотландский математик.

Доказанная теорема позволяет любую функцию, удовлетворяющую условиям этой теоремы в окрестности некоторой точки, заменить многочленом с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем члены многочлена. Таким многочленом является многочлен Тейлора. Величина погрешности при этом дается величиной остаточного члена.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано дает регулярный метод выделения главной части функции в окрестности данной точки. На этом обстоятельстве и основаны богатые и разнообразные приложения формулы (13.5) в различных вопросах анализа.

Упражнение 1. Доказать, что если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производную порядка n, то, какова бы ни была точка x этой окрестности и какова бы ни была функция $\psi(t)$, непрерывная на отрезке с концами в точках x_0 и x, имеющая не равную нулю производную внутри этого отрезка, найдется такая точка ξ между точками x_0 и x, что для остаточного члена $r_n(x)$ формулы Тейлора функции $f(x)$ будет справедлива формула

$$r_n(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} (x-\xi)^{n-1}.$$

Получить отсюда следующие виды записи остаточного члена:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!\,p} (x-x_0)^p (x-\xi)^{n-p}, \quad p > 0 \quad \text{(форма Шлемильха — Роша)},$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^n \quad \text{(форма Лагранжа)},$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n)}[x_0 + \theta(x-x_0)]}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} (x-x_0)^n, \quad 0 < \theta < 1 \quad \text{(форма Коши)}.$$

Указание. Рассмотреть вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k$$

и применить к функциям φ и ψ теорему Коши о среднем значении. Для вывода остаточного члена в форме Шлемильха—Роша положить $\psi(t) = (x-t)^p$.

13.2. Многочлен Тейлора как многочлен наилучшего приближения функции в окрестности данной точки

Заметим предварительно, что, очевидно, всякий многочлен степени n

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k \tag{13.9}$$

для любой точки x_0 может быть представлен в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k. \tag{13.10}$$

В самом деле, достаточно в (13.9) положить $x = x_0 + h$ и разложить правую часть по степеням h, тогда

$$P_n(x) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n, \quad \text{где} \quad h = x - x_0,$$

т. е. мы и получили (13.10).

Многочлен Тейлора степени n является многочленом, наилучшим образом среди всех многочленов степени n приближающим функцию f «в бесконечно малой окрестности» точки x_0, т. е. при условии $x \to x_0$. При этом такой многочлен оказывается единственным. Более точно, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция f определена и дифференцируема до порядка n включительно в точке x_0 и пусть*

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \tag{13.11}$$

где $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ — некоторый многочлен степени, меньшей или равной n, тогда

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{13.12}$$

т. е. многочлен $P_n(x)$ является многочленом Тейлора.

Иначе говоря, никакой многочлен степени, меньшей или равной n, отличный от многочлена Тейлора, не может приближать рассматриваемую функцию с точностью $o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$ (а значит, и с более высокой точностью $o((x - x_0)^k)$, $k > n$).

Доказательство. Из формул (13.5) и (13.11) следует, что

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

откуда в пределе при $x \to x_0$ получим $a_0 = f(x_0)$. Отбрасывая в обеих частях равенства этот член, сокращая оставшиеся в обеих частях выражения на $(x - x_0)$ $(x \neq x_0)$ и замечая, что

$$o((x - x_0)^n) = \varepsilon(x)(x - x_0)^n, \quad \text{где} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0,$$

и, значит, при $x \to x_0$

$$\frac{o((x - x_0)^n)}{x - x_0} = \varepsilon\ x)(x - x_0)^{n-1} = o((x - x_0)^{n-1}),$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-1}+o((x-x_0)^{n-1})=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_k (x-x_0)^{k-1}+o((x-x_0)^{n-1}).$$

Теперь в пределе при $x \to x_0$ имеем $a_1 = f'(x_0)$. Продолжая этот процесс дальше, по индукции легко получим

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k=0, 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема доказана.

Единственность представления функции в виде (13.11) может быть иногда использована для разложения функции по формуле Тейлора. Именно если удается каким-либо косвенным путем получить представление (13.11), то в силу теоремы 2 можно утверждать, что это и есть разложение по формуле Тейлора (13.5), т. е. коэффициенты многочлена выражаются по формулам (13.12).

Так, например, формула (13.10) есть разложение многочлена (13.9) по формуле Тейлора, причем в этом случае $r_n(x) \equiv 0$, поэтому согласно теореме 2 коэффициенты многочлена (13.10) имеют вид

$$a_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Таким образом,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0).$$

В частности, при разложении многочлена степени n по формуле Тейлора остаток n-го порядка тождественно равен нулю.

Пусть требуется разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = \frac{1}{1-x}$ в окрестности точки $x_0 = 0$ Замечая, что $\frac{1}{1-x}$ есть сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots, \quad |x|<1,$$

и полагая

$$r_n(x) = x^{n+1}+x^{n+2}+\ldots = \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad |x|<1,$$

получим

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+\ldots+x^n+r_n(x),$$

где $r_n(x)=O(x^{n+1})$ и, значит, $r_n(x)=o(x^n)$ при $x\to 0$. Таким образом, представление

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\ldots+x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)$$

и есть разложение функции $\frac{1}{1-x}$ по формуле Тейлора в окрестности нуля.

13.3. Примеры разложения по формуле Тейлора

1. $f(x)=\sin x$.

У функции $\sin x$ существуют производные всех порядков. Найдем для нее формулу Тейлора при $x_0=0$, т. е. формулу Маклорена (13.8). Было доказано (см. п. 10.1), что $(\sin x)^{(p)}=\sin\left(x+p\frac{\pi}{2}\right)$, поэтому

$$f^{(p)}(0)=\sin\frac{p\pi}{2}=\begin{cases}0 & \text{для } p=2k,\\ (-1)^k & \text{для } p=2k+1,\end{cases}\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{13.13}$$

и, согласно формуле (13.5),

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),$$
$$-\infty<x<+\infty,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{13.14}$$

или, короче,

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2k+2}).$$

Мы написали здесь остаточный член в виде $o(x^{2k+2})$, а не в виде $o(x^{2k+1})$, так как следующий за написанным членом многочлена Тейлора в силу (13.13) равен нулю.

2. $f(x)=\cos x$.

Как мы знаем (см. п. 10.1), $f^{(p)}(x)=\cos\left(x+\frac{p\pi}{2}\right)$, поэтому

$$f^{(p)}(0)=\cos\frac{p\pi}{2}=\begin{cases}0 & \text{для } p=2k+1,\\ (-1)^k & \text{для } p=2k,\end{cases}\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

и

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}),$$
$$-\infty<x<+\infty,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{13.15}$$

или, короче,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

3. $f(x) = e^x$.

Поскольку $(e^x)^{(n)} = e^x$, то $f^{(n)}(0) = 1$, $n = 0, 1, \ldots$; поэтому

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{13.16}$$

или, короче,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Отсюда, заменяя x на $-x$, получим

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^n). \tag{13.17}$$

4. $\operatorname{sh} x \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ и $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, складывая и вычитая (13.16) и (13.17), получим

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, -\infty < x < +\infty.$$

В силу единственности представления функции в указанном виде (см. теорему 2) полученные формулы являются формулами Тейлора для функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$.

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$, α — некоторое фиксированное число.

Так как $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1), \ldots, (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, то

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$$

и, следовательно,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n),$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, -\infty < x < +\infty,$$

или, короче,

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).$$

6. $f(x) = \ln(1+x)$.
Легко видеть, что

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \quad f''(x) = -(1+x)^{-2}$$

и вообще,

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Поэтому $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$, $k = 1, 2, \ldots$, и так как $f(0) = 0$, то

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$n = 1, 2, \ldots, \quad -1 < x < +\infty,$$

или, короче,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

13.4. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора (метод выделения главной части)

Формула Тейлора дает простое и весьма общее правило для выделения главной части функции. В результате этого метод вычисления пределов функций с помощью выделения главной части функции приобретает законченный алгоритмический характер.

Рассмотрим сначала случай неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Пусть требуется найти предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. В этом случае рекомендуется разложить по формуле Тейлора функции f и g в окрестности точки x_0 (если, конечно, это возможно), ограничившись в этом разложении лишь первыми не равными нулю членами, т. е. взять разложения в виде

$$f(x) = a(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \quad a \neq 0,$$

$$g(x) = b(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m), \quad b \neq 0,$$

тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{a(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)}{b(x-x_0)^m+o((x-x_0)^m)}=$$

$$=\frac{a}{b}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{n-m}=\begin{cases}0, & \text{если } n>m,\\ \frac{a}{b}, & \text{если } n=m,\\ \infty, & \text{если } n<m.\end{cases}$$

Часто бывает удобно для разложения функций f и g по формуле Тейлора использовать готовый набор разложений элементарных функций, полученный в п. 13.3; для этого следует в случае $x_0\neq 0$ предварительно сделать замену переменного $t=x-x_0$, тогда условию $x\to x_0$ будет соответствовать условие $t\to 0$. Случай $x\to\infty$ заменой переменного $x=\frac{1}{t}$ сводится к случаю $t\to 0$.

Если имеется неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, т. е. требуется найти $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, то ее можно легко привести к рассмотренному случаю $\frac{0}{0}$ преобразованием $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$.

Подобно вычислению пределов с помощью правила Лопиталя при применении метода выделения главной части к раскрытию неопределенностей вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ их следует преобразовать к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Наконец, для раскрытия неопределенностей вида 0^0, ∞^∞ и 1^∞ указанным методом надо их предварительно прологарифмировать.

Посмотрим на примерах, как применяется формула Тейлора для вычисления пределов функций. Пусть требуется найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}.$$

Замечая, что (см. п. 13.3)

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{6}}=2.$$

Рассмотрим неопределенность вида $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]^2-x^2}{x^2[x+o(x)]^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^2[x^2+o(x^2)]}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}}{x^4}=-\frac{1}{3}.$$

В качестве последнего примера вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, т. е. раскроем неопределенность вида 1^∞. Согласно общему правилу, исследуем предел логарифма выражения, стоящего под знаком предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{x+o(x^2)}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+o(x))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}}=1.$$

Упражнение 2. Найти пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x-x^2)}{x\sin x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sqrt[4]{1-x^2}-4e^{x^3}+\ln(1+x^2)}{\operatorname{arctg} x-\sin x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x})+2x^{3}}{x^{5}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^{\sin x}}{\operatorname{arctg} x+1+\dfrac{x^{2}}{2}}\right]^{\operatorname{ctg} x^{3}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt{1-\ln(1-x)}-\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^{2}}{8}\right)\right]^{\frac{1+x}{x^{2}}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^{2}-\dfrac{1}{3}x^{4}}-\operatorname{ctg}^{2}x\right)^{\frac{1}{\arcsin x^{2}}}$.

§ 14. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИИ

В этом параграфе с помощью развитого в предыдущих параграфах аппарата мы займемся изучением различных свойств поведения функций.

14.1. Критерий монотонности функции

Теорема 1. *Пусть функция f определена и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда если $f'(x) > 0$ на (a, b), то $f(x)$ строго монотонно возрастает на (a, b), если же $f'(x) < 0$, то $f(x)$ строго монотонно убывает на (a, b).*

Доказательство. Пусть $a < x_1 < x_2 < b$, тогда по формуле Лагранжа (см. п. 11.2) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $x_1 < \xi < x_2$. Так как $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$, если $f'(\xi) > 0$ и $f(x_2) < f(x_1)$, если $f'(\xi) < 0$.

Теорема доказана.

Отметим, что условие $f'(x) > 0$, являясь достаточным условием для строго монотонного возрастания функции f, не является в то же время необходимым. Это видно, например, из рассмотрения функции $y = x^3$, для которой производная в нуле равна нулю и которая вместе с тем строго монотонно возрастает на всей числовой оси.

Упражнение 1. Доказать, что для того чтобы функция f, определенная и дифференцируемая на интервале (a, b), монотонно возрастала (соответственно убывала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geqslant 0$ (соответственно $f'(x) \leqslant 0$) для всех $a < x < b$.

14.2. Экстремумы функций. Определение наибольших и наименьших значений функций

Определение 1. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда x_0 называется точкой максимума (соответственно точкой минимума) функции f, если существует такое*

$\delta > 0$, *что* $f(x_0 + \Delta x) \leqslant f(x_0)$, *если* $|\Delta x| < \delta$ (*соответственно* $f(x_0 + \Delta x) \geqslant f(x_0)$).

Если существует такое $\delta > 0$, *что* $f(x + \Delta x) < f(x_0)$ (*соответственно* $f(x_0) + \Delta x) > f(x_0)$) *для всех* $\Delta x \neq 0$, *таких, что* $|\Delta x| < \delta$, *то точка* x_0 *называется точкой строгого максимума соответственно строгого минимума*).

Точки (*строгого*) *максимума и минимума называются точками* (*строгого*) *экстремума.*

Для точек строгого экстремума функции f и только для них приращение функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ не меняет знака при переходе аргумента через точку экстремума x_0, т. е. при изменении знака Δx. Именно $\Delta f < 0$ для точек строгого максимума и $\Delta f > 0$ для точек строгого минимума независимо от знака Δx.

Теорема 2 (необходимые условия экстремума). *Пусть точка* x_0 *является точкой экстремума функции* f, *определенной в некоторой окрестности точки* x_0. *Тогда либо производная* $f'(x_0)$ *не существует, либо* $f'(x_0) = 0$.

Это непосредственно следует из теоремы Ферма (см. п. 11.1), примененной к интервалу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где δ есть то δ, которое указано в определении точек экстремума.

Отметим, что условие $f'(x_0) = 0$ не является для дифференцируемой в точке x_0 функции достаточным условием наличия в точке экстремума, как это показывает пример функции $f(x) = x^3$, которая в точке $x = 0$ имеет производную, равную нулю, но для которой эта точка не является точкой экстремума.

Упражнение 2 (достаточные условия экстремума). Пусть функция f определена на интервале (a, b) и непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$. Если функция $f(x)$ (строго) монотонно возрастает на интервале (a, x_0) и (строго) монотонно убывает на (x_0, b), то точка x_0 является точкой (строгого) максимума; а если функция $f(x)$ (строго) монотонно убывает на (a, x_0) и (строго) монотонно возрастает на (x_0, b), то точка x_0 является точкой (строгого) минимума.

Теорема 3 ***(достаточные условия строгого экстремума).*** *Пусть функция* f *дифференцируема на интервале* (a, b), *кроме, быть может, точки* $x_0 \in (a, b)$, *в которой она является, однако, непрерывной. Если производная* $f'(x)$ *меняет знак при переходе через точку* x_0 (*это означает, что существует такое* $\delta > 0$, *что значения производной* f' *на каждом интервале* $(x_0 - \delta, x_0)$ *и* $(x_0, x_0 + \delta)$ *имеют один и тот же знак, а на разных — противоположный*), *то точка* x_0 *является точкой строгого экстремума.*

При этом, если $f'(x) > 0$ *для* $x_0 - \delta < x < x_0$ *и* $f'(x) < 0$ *для* $x_0 + \delta > x > x_0$, *то* x_0 *является точкой строгого максимума, а если* $f'(x) < 0$ *для* $x_0 - \delta < x < x_0$ *и* $f'(x) > 0$, *для* $x_0 + \delta > x > x_0$, *то точка* x_0 *является точкой строгого минимума* (рис. 36).

Доказательство. Рассмотрим первый случай $f'(x) > 0$ для $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ для $x > x_0$, $x \in (a, b)$. По теореме Лагранжа (см. п. 11.2)

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(\xi)\,(x - x_0),$$

где ξ лежит на интервале с концами x_0 и x.

Если $x < x_0$, то $x - x_0 < 0$ и $f'(\xi) > 0$, так как $x < \xi < x_0$. Если $x > x_0$, то $x - x_0 > 0$ и $f'(\xi) < 0$, так как в этом случае

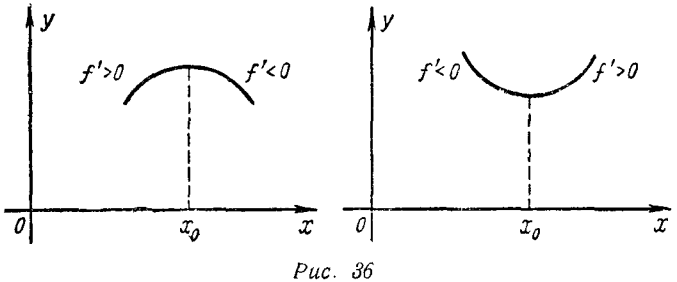


Рис. 36

$x_0 < \xi < x$. Таким образом, всегда $\Delta f < 0$, т. е. в рассмотренном случае точка x_0 является точкой строгого максимума. Аналогично рассматривается второй случай.

Теорема доказана.

Задача 4. Построить пример функции, которая дифференцируема на интервале, достигает в некоторой его точке x_0 строгого экстремума, а ее производная в любой окрестности точки x_0, как слева, так и справа от этой точки, принимает и положительные и отрицательные значения (таким образом, условие изменения знака производной в данной точке, являясь достаточным условием строгого экстремума, не является вместе с тем необходимым).

Введем еще одно понятие, полезное для дальнейшего.

Определение 2. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Точка x_0 называется точкой возрастания (убывания) функции f, если существует такое $\delta > 0$, что $f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$) при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f(x) > f(x_0)$ (соответственно $f(x) < f(x_0)$) при $x_0 < x < x_0 + \delta$.*

Таким образом, точки возрастания и убывания функции f характеризуются тем, что при переходе через них приращение функции Δf меняет знак, а именно с «—» на «+» в точке возрастания и с «+» на «—» в точке убывания (рис. 37).

Не следует думать, что если функция определена на интервале, то всякая точка этого интервала является либо точкой экстремума функции, либо точкой возрастания, либо точкой убывания: могут

существовать точки, не принадлежащие ни к одному из указанных типов. Например, точка $x = 0$ для функции

$$y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

не является ни точкой экстремума, ни точкой возрастания, ни точкой убывания.

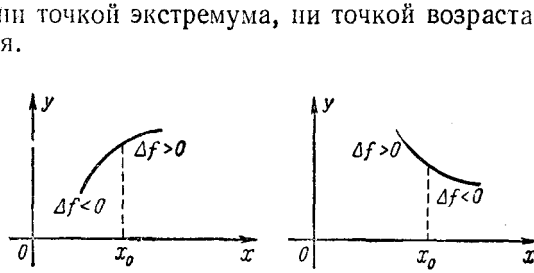


Рис. 37

Упражнение 3. Доказать, что функция

$$y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

имеет производную при $x = 0$.

Дадим теперь достаточные условия строгого экстремума, а также точек возрастания и убывания в терминах значений высших производных в точке x_0.

Теорема 4. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и пусть в точке x_0 у функции f существуют производные до порядка n включительно, причем*

$$f^{(i)}(x_0) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$f^{(n)}(x_0) \neq 0. \tag{14.1}$$

Тогда, если $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, т. е. n — четное число, то функция f имеет в точке x_0 строгий экстремум, именно максимум при $f^{(2k)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(2k)}(x_0) > 0$. Если же $n = 2k+1$, $k = 0, 1, \ldots$, т. е. n — нечетное число, то функция f не имеет в точке x_0 экстремума, эта точка является точкой возрастания при $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ и убывания при $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$.

Предпошлем доказательству теоремы одно простое замечание.

Если $\beta(x) = o(\alpha(x))$ при $x \to x_0$, то существует такое $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, справедливо неравенство

$$|\beta(x)| \leqslant \frac{1}{2} |\alpha(x)|. \tag{14.2}$$

В самом деле,

$$\beta(x)=\varepsilon(x)\alpha(x), \tag{14.3}$$

где $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$ и, следовательно, существует $\delta=\delta\left(\frac{1}{2}\right)$, такое, что при $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0$, выполняется неравенство

$$|\varepsilon(x)|<\frac{1}{2}. \tag{14.4}$$

Из (14.3) и (14.4) и следует (14.2).

Доказательство. Из условий (14.1) формула Тейлора n-го порядка для функции f в окрестности точки x_0 имеет вид

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+\alpha(x), \tag{14.5}$$

где

$$\alpha(x)=o(\Delta x^n),$$

и, значит (см. п. 8.2),

$$\alpha(x)=o\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right).$$

Поэтому, согласно сделанному замечанию, существует такое $\delta>0$, что при $|\Delta x|<\delta$, $\Delta x\neq 0$,

$$|\alpha(x)|<\frac{1}{2}\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right|.$$

Отсюда следует, что при $|\Delta x|<\delta$, $\Delta x\neq 0$, знак правой части равенства (14.5), а значит, знак Δf совпадает со знаком первого слагаемого правой части.

Если $n=2k$, $k=1, 2, \ldots$, то Δx возводится в четную степень, поэтому знак Δf не зависит от знака Δx, и, значит, точка x_0 является точкой строгого экстремума, причем точкой строгого максимума при $f^{(2k)}(x_0)<0$ (в этом случае $\Delta f<0$) и точкой строгого минимума при $f^{(2k)}(x_0)>0$ (в этом случае $\Delta f>0$).

Если же $n=2k+1$, $k=0, 1, 2, \ldots$, то Δx возводится в нечетную степень, поэтому знак Δf меняется вместе с изменением знака Δx, и, значит, точка x_0 не является точкой экстремума. Когда Δx меняет знак с «—» на «+», то при $f^{(2k+1)}(x_0)>0$ приращение Δf меняет знак с «—» на «+», и, значит, точка x_0 является точкой возрастания функции f, а при $f^{(2k+1)}(x_0)<0$ приращение Δf меняет знак с «+» на «—», и, значит, точка x_0 является точкой убывания функции f.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы, в частности, при $n = 1$ и $n = 2$ вытекают два следствия.

1. *Если* $f'(x_0) > 0$, *то* x_0 *является точкой возрастания функции; если* $f'(x_0) < 0$, *то* x_0 *является точкой убывания функции.*

2. *Если* $f'(x_0) = 0$, *а* $f''(x_0) \neq 0$, *то при* $f''(x_0) > 0$ *точка* x_0 *является точкой строгого минимума, а при* $f''(x_0) < 0$ *— точкой строгого максимума функции* f.

Все полученные правила справедливы лишь в том случае, когда функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Об экстремуме функции можно говорить не только в этом случае: пусть функция f определена на некотором числовом множестве E; точку $x_0 \in E$ будем называть *точкой максимума* (*минимума*), если существует такое $\delta > 0$, что если $x \in E$ и $|x - x_0| < \delta$, то $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x_0)$). Подобным же образом в этом случае определяются и понятия строгого максимума и строгого минимума, следует лишь знаки нестрогих неравенств заменить знаками строгих неравенств и дополнительно потребовать, чтобы $x \neq x_0$.

Например, если функция f определена на полуинтервале $[a, b)$, то точка a в указанном смысле может являться экстремальной. Заметим, однако, что производная (правосторонняя) в этой точке, вообще говоря, не обязана обращаться в ноль. Так, функция $y = x$, рассматриваемая на отрезке $[0, 1]$, имеет строгий минимум при $x = 0$ и строгий максимум при $x = 1$, однако в этих точках, как и всюду на отрезке $[0, 1]$, $y' = 1$.

Выяснение обстоятельства, имеет или нет функция экстремум на концах промежутка, принадлежащего ее области определения (такой экстремум будем называть концевым), требует специального исследования.

Упражнение 4. Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$ и имеет производные в точках a и b; тогда если $f'_+(a) > 0$ $(f'_-(b) < 0)$, то точка $x = a$ (соответственно $x = b$) является точкой строгого минимума; если $f'_+(a) < 0$ $(f'_-(b) > 0)$, то точка $x = a$ (соответственно $x = b$) является точкой строгого максимума.

Развитые нами методы позволяют общим приемом решать новый круг математических и физических задач, в которых требуется найти экстремальные значения какой-либо величины.

Пусть, например, требуется определить наибольшее значение функции f на некотором отрезке $[a, b]$. Для этого следует найти все точки, в которых производная функции либо равна нулю, либо не существует. Затем из этих точек надо с помощью тех или иных методов отобрать точки, в которых возможен максимум (можно заведомо отбросить точки, удовлетворяющие достаточным условиям для точек минимума). После этого достаточно лишь сравнить

между собой по величине значения функции в полученных точках и значения $f(a)$ и $f(b)$; наибольшее из этих значений и будет наибольшим значением функции на отрезке $[a, b]$. Эта задача заведомо может быть решена, если множество критических точек состоит из конечного числа точек.

В случае, если функция определена на полуинтервале (конечном или бесконечном), например на полуинтервале вида $[a, b)$, задача об определении наибольшего значения функции на этом полуинтервале требует дополнительных исследований; найдя множество указанных выше точек, надо изучить еще поведение функции при $x \to b - 0$. Аналогичным образом решаются и задачи на определение наименьших значений функций.

Пример. Два тела двигаются с постоянными скоростями v_1 *м/сек* и v_2 *м/сек* по двум прямым, образующим прямой угол в направлении вершины этого угла, от которой в начале движения первое тело находилось на расстоянии a *м*, а второе — на расстоянии b *м*. Через сколько секунд после начала движения расстояние между телами будет наименьшим?

Пусть $\rho = \rho(t)$ — расстояние между точками через t *сек*, после начала движения, которое будем считать начавшимся при $t = 0$. Тогда

$$\rho^2(t) = (a - v_1 t)^2 + (b - v_2 t)^2.$$

Функция $\rho(t)$, очевидно, достигает минимума в той же точке, в которой достигает минимума функция $y = \rho^2(t)$.

Физически ясно, что расстояние $\rho(t)$ должно достигать минимума (тела начинают сближаться), а максимума заведомо нет, ибо $\rho(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. В силу необходимого условия экстремума это может быть только в точке, в которой $y' = 0$, и так как $y' = -2v_1(a - v_1 t) - 2v_2(b - v_2 t)$, то из условия $y' = 0$ получаем единственное значение

$$t_0 = \frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2},$$

которое и дает ответ на поставленный вопрос.

14.3. Выпуклость и точки перегиба

Пусть функция f определена на интервале (a, b) и пусть $a < x_1 < x_2 < b$. Проведем прямую через точки $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$ графика функции f. Ее уравнение имеет вид

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Обозначим правую часть этого уравнения через $l(x)$, тогда оно кратко запишется в виде

$$y = l(x).$$

Очевидно, $l(x_1) = f(x_1)$, $l(x_2) = f(x_2)$.

Определение 3. *Функция f называется выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале (a, b), если, каковы бы ни были точки x_1 и x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, для любой точки x_0 интервала (x_1, x_2) выполняется неравенство*

$$l(x_0) \leqslant f(x_0), \tag{14.6}$$

(соответственно

$$l(x_0) \geqslant f(x_0). \tag{14.7}$$

Геометрически это означает, что любая точка хорды AB (т. е. отрезка прямой $y = l(x)$ с концами в точках A и B) лежит не выше (не ниже) точки графика функции f, соответствующей тому же значению аргумента (рис. 38).

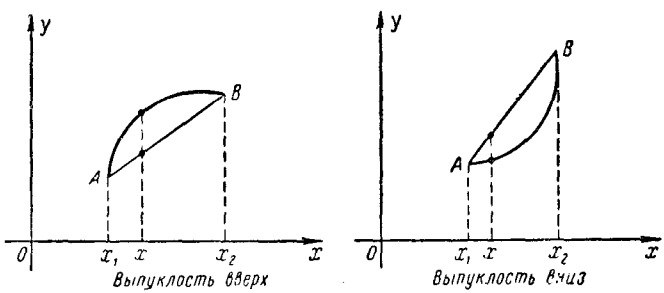


Рис. 38

Определение 4. *Если вместо* (14.6) *и* (14.7) *выполняются строгие неравенства $l(x_0) < f(x_0)$ и соответственно $l(x_0) > f(x_0)$ при любых x_0, x_1 и x_2, таких, что $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$, то функция f называется строго выпуклой вверх (строго выпуклой вниз).*

В этом случае любая точка хорды AB, исключая ее концы, лежит ниже (выше) соответствующей точки графика функции.

Определение 5. *Всякий интервал, на котором функция (строго) выпукла вверх, соответственно вниз, называется интервалом (строгой) выпуклости вверх, соответственно вниз, для этой функции.*

Если функция f (строго) выпукла вверх на интервале (a, b), то функция $-f$ (строго) выпукла вниз на этом интервале; поэтому в дальнейшем при доказательствах мы большей частью будем ограничиваться лишь рассмотрением функций, (строго) выпуклых вверх.

Определение 6. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в этой точке. Точка x_0 называется точ-*

кой перегиба функции f, если она является одновременно концом интервала строгой выпуклости вверх и концом интервала строгой выпуклости вниз. В этом случае точка $(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции.

Очевидно, что точка перегиба функции не принадлежит никакому интервалу строгой выпуклости вверх или вниз.

Теорема 5 (достаточное условие строгой выпуклости). *Пусть функция f определена и дважды дифференцируема на интервале (a, b). Тогда, если $f'' < 0$ на (a, b), то функция f строго выпукла вверх, и если $f'' > 0$ на (a, b), то функция f строго выпукла вниз на этом интервале.*

Доказательство. Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$$l(x) - f(x) = \frac{[f(x_2) - f(x)](x - x_1) - [f(x) - f(x_1)](x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Применяя теорему Лагранжа (см. п. 11.2), получим

$$l(x) - f(x) = \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f'(\eta) - f'(\xi)](x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1},$$

где $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$.

Снова применим теорему Лагранжа:

$$l(x) - f(x) = \frac{f''(\zeta)(x_2 - x)(x - x_1)(\eta - \xi)}{x_2 - x_1}, \quad \xi < \zeta < \eta.$$

Отсюда видно, что если $f'' < 0$ на (a, b), то, в частности, $f''(\zeta) < 0$, и потому $l(x) < f(x)$, т. е. функция f строго выпукла вверх; если же $f'' > 0$ на (a, b), то $l(x) > f(x)$, т. е. функция f выпукла вниз.

Теорема доказана.

Условие знакопостоянства второй производной, являясь достаточным условием строгой выпуклости (вверх или вниз), не является вместе с тем необходимым. Так, функция $y = x^4$ строго выпукла вниз на всей числовой прямой, однако ее вторая производная $y'' = 12x^2$ обращается в ноль при $x = 0$.

Примеры. 1. $y = x^3$; $y'' = 6x$. Очевидно, что $y'' < 0$ для $x > 0$ и $y'' > 0$ для $x > 0$. Поэтому на бесконечном интервале $(-\infty, 0)$ функция $y = x^3$ строго выпукла вверх, на бесконечном интервале $(0, +\infty)$ функция $y = x^3$ строго выпукла вниз, а точка x_0, являясь одновременным концом интервала выпуклости вверх и выпуклости вниз, является точкой перегиба.

2. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$; $f''(x)=-\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$. Здесь $f''(x)<0$ для всех $x\neq 0$. Значит, бесконечные интервалы $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ являются интервалами строгой выпуклости вверх. Вместе с тем при любом $x\neq 0$

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}=f(x)>0=f(0),$$

поэтому точка $x=0$ не принадлежит никакому интервалу выпуклости вверх (интервалов выпуклости вниз просто нет), но и не является точкой перегиба (рис. 39).

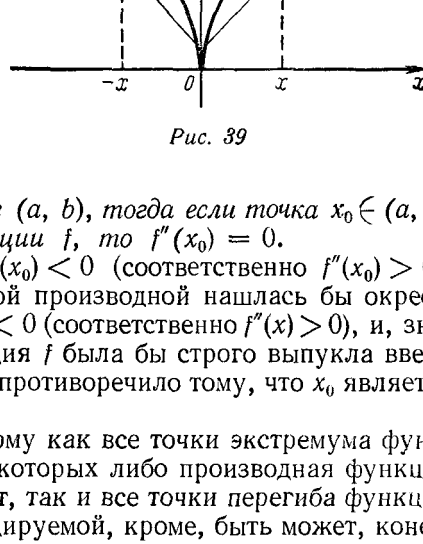


Рис. 39

Упражнения. 5. Доказать, что точка $x=0$ для функции $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ не принадлежит никаким интервалам выпуклости вверх или вниз и не является их концами.

6. Доказать, что $y=x^4$ строго выпукла вниз на всей числовой оси.

Теорема 6 (необходимое условие точки перегиба). *Пусть функция f определена и дважды непрерывно дифференцируема на интервале (a, b), тогда если точка $x_0\in(a, b)$ является точкой перегиба функции f, то $f''(x_0)=0$.*

Действительно, если бы $f''(x_0)<0$ (соответственно $f''(x_0)>0$), то в силу непрерывности второй производной нашлась бы окрестность точки x_0, в которой $f''(x)<0$ (соответственно $f''(x)>0$), и, значит, согласно теореме 5, функция f была бы строго выпукла вверх (вниз) на этой окрестности, что противоречило тому, что x_0 является точкой перегиба.

Замечание. Подобно тому как все точки экстремума функции находятся среди точек, в которых либо производная функции равна нулю, либо не существует, так и все точки перегиба функции (дважды непрерывно дифференцируемой, кроме, быть может, конечного числа точек) находятся среди точек, в которых вторая производная либо равна нулю, либо не существует.

Теорема 7 (достаточные условия точки перегиба). *Если функция f определена и дважды дифференцируема на интервале (a, b), кроме, быть может, точки $x_0\in(a, b)$, в которой она, однако, непрерывна, и ее вторая производная меняет знак при переходе аргумента через точку x_0 (т. е. существует $\delta>0$, такое, что либо*

$f'' < 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, либо $f'(x) > 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$), то точка x_0 является точкой перегиба функции.

Действительно, в силу теоремы 5 в этом случае точка x_0 является одновременно концом интервала строгой выпуклости вверх и концом интервала строгой выпуклости вниз, а значит, по определению — точкой перегиба.

Мы видели, что выпуклость вверх или вниз функции f зависит от знака ее второй производной. Оказывается, что расположение графика дважды дифференцируемой функции относительно касательной также в определенном смысле связано со знаком второй производной.

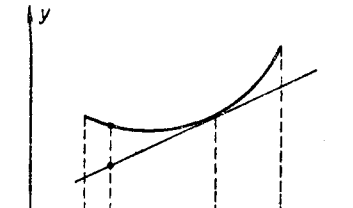


Рис. 40

Теорема 8. *Если функция f имеет на интервале (a, b) вторую производную, все значения которой имеют один и тот же знак (следовательно, интервал (a, b) является интервалом строгой выпуклости вверх или вниз), то, какова бы ни была точка $x_0 \in (a, b)$, все точки графика функции f на этом интервале лежат одновременно либо над, либо под касательной, проведенной к графику в точке $(x_0, f(x_0))$, исключая, естественно, саму эту точку, которая лежит на графике функции**) (рис. 40).

Действительно, уравнение касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Обозначим правую часть этого уравнения через $L(x)$. Тогда

$$f(x) - L(x) = [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0) =$$
$$= f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0),$$

где

$$a < x_0 < b, \quad a < x < b,$$

а точка ξ лежит между точками x и x_0.

Применяя еще раз теорему Лагранжа, но уже к приращению производной, получим

$$f(x) - L(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0),$$

---

*) Если функция f определена и имеет одностороннюю производную в конце интервала a или b, то указанное свойство, как это видно из нижеприводимого доказательства, выполняется и для касательной в точке $(a, f(a))$ (соответственно в точке $(b, f(b))$).

где точка η лежит между точками ξ и x_0. Поскольку при $x \neq x_0$ всегда $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$, то для $x \neq x_0$ $f(x) - L(x) > 0$ при $f'' > 0$ на (a, b) и $f(x) - L(x) < 0$ при $f'' < 0$ на (a, b).

Теорема 9. *Пусть $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, тогда x_0 является точкой перегиба. Если при этом $y = L(x)$ является уравнением касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$, то при переходе аргумента через точку x_0 разность $f(x) - L(x)$ меняет знак.*

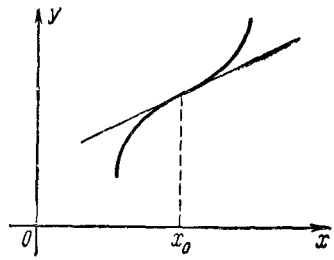


Рис. 41

Доказательство. Покажем, что x_0 — действительно точка перегиба. Из условия $f'''(x_0) \neq 0$ следует, что функция f'' возрастает или убывает в точке x_0, и так как $f''(x_0) = 0$, то в некоторой δ-окрестности точки x_0 функция f'' имеет разные знаки по разные стороны от точки x_0. Если, например, $f'' > 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'' < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то точка x_0 является одновременно левым концом интервала вверх и правым концом интервала строгой выпуклости вниз, а следовательно, и точкой перегиба.

Далее, по формуле Тейлора имеем

$$f(x) - L(x) = \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3).$$

Отсюда следует (см. замечание о бесконечно малых перед доказательством теоремы 4 этого параграфа), что знак разности $f(x) - L(x)$ меняется при изменении знака $x - x_0$.

Таким образом, график функции f в некоторой окрестности этой точки переходит с одной стороны касательной на другую (рис. 41), и «перегибается» через касательную. Отсюда и произошло название точка перегиба.

Задача 5. Пусть функция f непрерывна на интервале (a, b) и пусть для любых точек x_1 и x_2, $a < x_1 < x_2 < b$

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leqslant f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

тогда интервал (a, b) является интервалом выпуклости вверх для функции f.

Задача 6. Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ была выпукла вверх или соответственно вниз на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы ее производная монотонно возрастала, соответственно монотонно убывала на (a, b). Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ была строго выпукла вверх (вниз) достаточно, чтобы ее производная строго возрастала (убывала) на (a, b).

14.4. Асимптоты

Определение 7. *Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x > a$ (соответственно $x < a$). Если существуют такие числа k и l, что $f(x) - kx - l = o(1)$ при $x \to +\infty$ (соответственно при $x \to -\infty$), то прямая*

$$y = kx + l \tag{14.8}$$

называется асимптотой функции при $x \to +\infty$ (соответственно при $x \to -\infty$).

Существование асимптоты у функции означает, что при стремлении аргумента функции $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$) функция ведет себя, «почти как линейная функция», т. е. отличается от линейной функции на бесконечно малую.

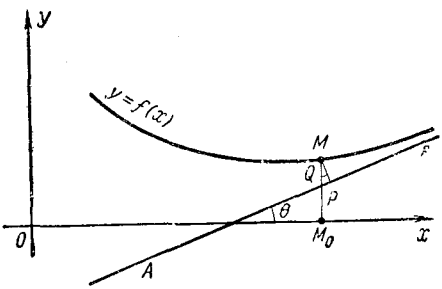


Рис. 42

Найдем, например, асимптоту для функции

$$y = \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}.$$

Разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, получим

$$y = x - 4 + \frac{2}{x+1},$$

и так как $\frac{2}{x+1} = o(1)$ при $x \to \pm\infty$, то прямая $y = x - 4$ является асимптотой данной функции как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

Рассмотрим геометрический смысл асимптоты. Пусть $M = (x, f(x))$ — точка графика функции f, M_0 — ее проекция на ось Ox, AB — асимптота (14.8), θ — угол, образованный асимптотой с осью Ox, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, MP — перпендикуляр, опущенный из точки M на асимптоту AB, Q — точка пересечения прямой MM_0 с асимптотой AB (рис. 42). Тогда $MM_0 = f(x)$, $QM_0 = kx + l$, $MQ = MM_0 - QM_0 = f(x) - (kx + l)$; $MP = MQ\cos\theta$. Таким образом, MP отличается от MQ лишь на неравный нулю множитель $\cos\theta$, поэтому условия $MQ \to 0$ и $MP \to 0$ при $x \to +\infty$ (соответственно при $x \to -\infty$) эквивалентны, т. е. если $\lim\limits_{x \to +\infty} MQ = 0$, то и $\lim\limits_{x \to +\infty} MP = 0$, и наоборот.

Отсюда следует, что асимптота может быть определена как такая прямая, расстояние до которой от графика функции, т. е. отрезок MP, стремится к нулю, когда точка $M = (x, f(x))$ «стремится по гра-

фику в бесконечность» (когда $x \to +\infty$ или соответственно когда $x \to -\infty$).

Укажем теперь регулярный способ отыскания асимптоты (14.8), т. е. регулярный способ определения коэффициентов k и l в уравнении (14.8). Будем рассматривать для определенности лишь случай $x \to +\infty$ (случай $x \to -\infty$ рассматривается аналогично). Пусть функция f имеет асимптоту (14.8) при $x \to +\infty$, тогда по определению

$$f(x) = kx + l + o(1). \tag{14.9}$$

Разделим равенство (14.9) на x и перейдем к пределу при $x \to +\infty$. Тогда

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k. \tag{14.10}$$

Найдя k по этой формуле, для определения l из (14.9) получим формулу

$$l = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx). \tag{14.11}$$

Таким образом, формулы (14.10) и (14.11) сводят задачу отыскания асимптот (14.8) к вычислению пределов определенного вида. Более того, мы показали, что если существует представление функции f в виде (14.9), то k и l находятся по формулам (14.10) и (14.11). Следовательно, если существует представление (14.9), то оно единственно.

Найдем по этому правилу асимптоту функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$, найденную нами выше другим способом:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 + 1} = 1,$$

$$l = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x - 2}{x + 1} = -4,$$

т. е. мы, как и следовало ожидать, получаем то же уравнение асимптоты $y = x - 4$.

В виде (14.8) может быть записано уравнение всех прямых, кроме параллельных оси Oy. Естественно распространить определение асимптоты и на прямые, параллельные оси Oy.

Определение 8. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 (быть может, односторонней) и пусть*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty, \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty, \tag{14.12}$$

или и то и другое. Тогда прямая $x = x_0$ (рис. 43) *называется вертикальной асимптотой (в отличие от асимптоты вида (14.8), которая называется наклонной).*

В случае вертикальной асимптоты, как и в случае наклонной асимптоты, расстояние $MP = x - x_0$ между точкой M и прямой $x = x_0$ стремится к нулю, когда точка графика $M = (x, f(x))$ стремится по графику в бесконечность, т. е. когда $x \to x_0 - 0$ или соответственно $x \to x_0 + 0$.

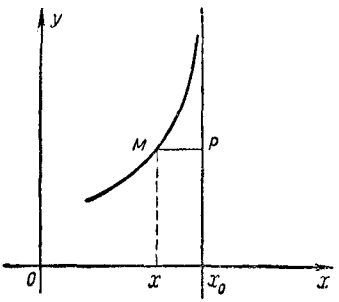


Рис. 43

Для того чтобы найти вертикальные асимптоты для функции f, надо найти такие значения x, для которых выполняется одно или оба условия (14.12).

Например, функция

$$y = \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$$

имеет вертикальную асимптоту $x = -1$. Вообще если $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ — рациональная функция ($P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены), $Q(x_0) = 0$, $P(x_0) \neq 0$, то прямая $x = x_0$ является асимптотой функции $f(x)$.

14.5. Построение графиков функций

Изучение заданной функции и построение ее графика с помощью развитого нами аппарата целесообразно проводить в следующем порядке.

1. Определить область существования функции, область непрерывности и точки разрыва.
2. Найти асимптоты.
3. Приблизительно, вчерне, нарисовать график функции.
4. Вычислить первую, а если нужно, и вторую производную (без производных более высокого порядка часто удается обойтись).
5. Найти точки, в которых первая и вторая производные либо не существуют, либо равны нулю (так называемые *критические точки*).
6. Составить таблицу изменений знака первых и вторых производных. Определить участки возрастания, убывания, выпуклости вверх или вниз функции, найти точки экстремума (в том числе и концевые, если такие имеются) и точки перегиба.
7. Окончательно вычертить график.

При этом чем большую точность графика мы хотим получить, тем больше, вообще говоря, надо найти точек, лежащих на графике функции. Обычно бывает целесообразно найти (быть может, с определенной точностью) точки пересечения графика с осями координат, точки, соответствующие максимуму и минимуму функции; другие точки находятся по мере потребности.

В случае очень громоздких выражений для второй производной иногда приходится ограничиваться рассмотрением тех свойств графика, которые можно изучать лишь с помощью первой производной.

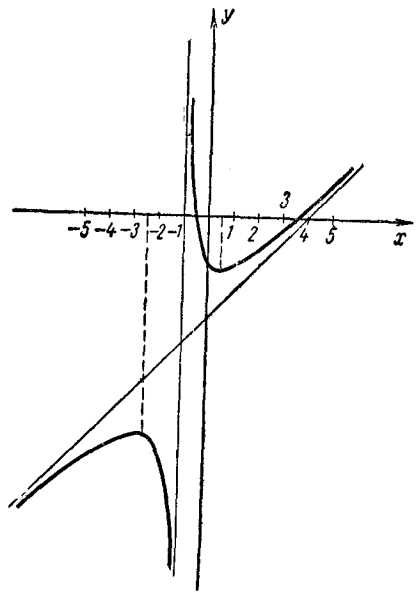


Рис. 44

Пример 1. Построить график функции

$$f(x)=\frac{x^2-3x-2}{x+1}.$$

Эта функция определена и непрерывна для всех $x \neq -1$. Она, как мы уже знаем (см. п. 14.4), имеет асимптоты $y = x - 4$ и $x = -1$, причем $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=-\infty$. Мы видели также, что $f(x) = x - 4 + \frac{2}{x+1}$, поэтому $f(x) > x - 4$ при $x > -1$ (график функции находится над асимптотой) и $f(x) < x - 4$ при $x < -1$ (график функции лежит под асимптотой).

График функции $f(x)$ пересекает ось Ox в точках, в которых $x^2 - 3x - 2 = 0$, т. е. при $x_1,\ x_2 = \frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ или приблизительно в точках $x_1 = 3{,}5$, $x_2 = -0{,}5$. Ось Oy график пересекает в точке $y = -2$. Это позволяет нарисовать график функции $f(x)$ в виде, указанном на рис. 44.

Дальнейшее исследование имеет своей целью нахождение точек экстремума, точек перегиба и интервалов выпуклости вверх или вниз графика функции. Для этого найдем y' и y'':

$$y'=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2},$$

$$y''=\frac{4}{(x+1)^3}.$$

Отсюда видно, что $y' = 0$ в точках $x = -1 - \sqrt{2} \approx -2{,}4$ и $x = -1 + \sqrt{2} \approx 0{,}4$. В точке $x = -1$ производные y' и y'' не существуют.

Составим таблицу изменения знака первой и второй производных в зависимости от изменения аргумента, включив в нее критические точки.

Таблица 1

x		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$	
y'	+	0	—	Не существует	—	0	+
y''	—	—	—	Не существует	+	+	+

Из этой таблицы видно, что функция $f(x)$ в точке $x = -1 + \sqrt{2}$ имеет строгий минимум, а в точке $x = -1 - \sqrt{2}$ — строгий максимум; при $x < -1$ функция строго выпукла вверх, а при $x > -1$ — строго выпукла вниз. Точек перегиба нет, так как при $x = -1$ функция разрывна.

Мы нашли общий характер поведения функции. Чтобы построить график более точно, надо найти ряд точек графика, как это отмечалось выше.

В дальнейшем для краткости таблицы, подобные табл. 1, будем называть *таблицами поведения функций* и иногда сразу отмечать в них точки экстремума, точки перегиба и интервалы выпуклости.

Пример 2. Построить график функции

$$f(x) = (x+1)^3 \sqrt[3]{x^2}.$$

Область определения этой функции — вся вещественная прямая, причем она непрерывна в каждой точке и потому не имеет вертикальных асимптот. Из того, что

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty,$$

следует, что нет и наклонных асимптот.

Для построения вчерне графика функции $f(x)$ заметим, что

1) $f(x)$ обращается в ноль в точках $x = -1$ и $x = 0$;
2) $f > 0$ при $x > -1$, $x \neq 0$;
3) $f < 0$ при $x < -1$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Приблизительный вид графика функции, который можно нарисовать на основании этих замечаний, изображен на рис. 45.

Проведем теперь более подробное исследование функции с помощью производных. Находим y' и y'':

$$y' = \frac{(x+1)^2(11x+2)}{\sqrt[3]{x}},$$

$$y'' = \frac{2(x+1)(44x^2+16x-1)}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

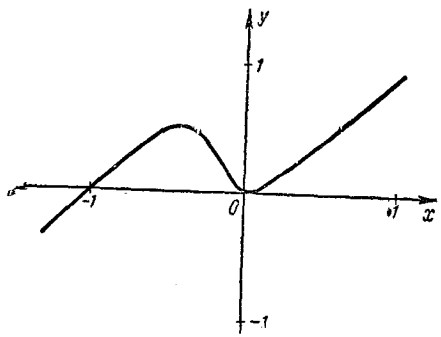


Рис. 45

Отсюда видно, что $y' = 0$ при $x = -1$ и $x = -\frac{2}{11}$; $y'' = 0$ при $x = -1$, а также когда $44x^2 + 16x - 1 = 0$, т. е. приблизительно при $x_1 = -\frac{9}{22}$ и $x_2 = \frac{1}{22}$. При $x = 0$ производные y' и y'' не существуют.

Составляем таблицу поведения функции — таблицу 2.

Теперь график функции $y = (x+1)^3\sqrt[3]{x^2}$ можно нарисовать более точно. Его вид изображен на рис. 46. Как видно, с помощью исследования производных мы существенно уточнили вид графика (ср. с рис. 45).

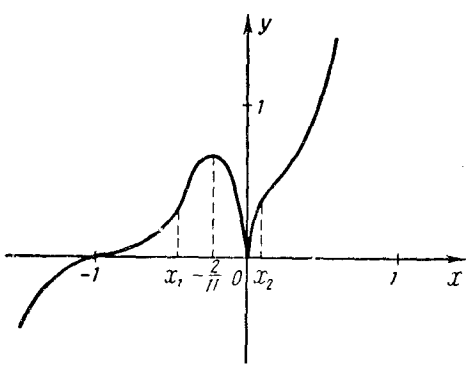


Рис. 46

Развитый аппарат позволяет строить и графики функций, заданных параметрически:

$$x = x(t), \qquad y = y(t)^*).$$

Сделаем лишь несколько замечаний. Для нахождения асимптот, параллельных оси Oy, надо найти такие значения t_0**), для которых

*) При этом здесь не предполагается, что пара функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ определяет однозначную функцию $y = y(x)$ или $x = x(y)$.

**) Здесь и в дальнейшем t_0 — число или один из символов $+\infty$, $-\infty$.

Таблица 2

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, x_1)$	x_1	$\left(x_1, -\frac{2}{11}\right)$	$-\frac{2}{11}$	$\left(-\frac{2}{11}, 0\right)$	0	$(0, x_2)$	x_2	$(x_2, +\infty)$
y'	+	0	+	+	+	0	−	Не существует	+	+	+
y''	−	0	+	0	−	−	−	Не существует	−	0	+
Интервалы монотонности и точки экстремума	Возрастание					Максимум	Убывание	Минимум	Возрастание		
Интервалы выпуклости и точки перегиба	Выпуклость вверх	Точка перегиба	Выпуклость вниз	Точка перегиба	Выпуклость вверх				Выпуклость вверх	Точка перегиба	Выпуклость вниз

существует конечный предел $\lim\limits_{t\to t_0+0} x(t)=a$ или $\lim\limits_{t\to t_0-0} x(t)=a$, а $\lim\limits_{t\to t_0+0} y(t)$, соответственно $\lim\limits_{t\to t_0-0} y(t)$, равен $+\infty$ или $-\infty$.

Если такие значения t_0 существуют, то

$$x=a \tag{14.13}$$

есть уравнение искомой асимптоты.

Аналогично для нахождения асимптот, параллельных оси Ox, надо найти такие значения t_0, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{t\to t_0+0} y(t)=b$ или $\lim\limits_{t\to t_0-0} y(t)=b$, а $\lim\limits_{t\to t_0+0} x(t)$, соответственно $\lim\limits_{t\to t_0-0} x(t)$, равен $+\infty$ или $-\infty$. Если окажется, что такие значения t_0 существуют, то

$$y=b \tag{14.14}$$

есть уравнение искомой асимптоты.

Наконец, для нахождения асимптот, не параллельных ни оси Ox, ни оси Oy, надо найти такие значения t_0, для которых пределы $\lim\limits_{t\to t_0+0} x(t)$ и $\lim\limits_{t\to t_0+0} y(t)$ (или пределы $\lim\limits_{t\to t_0-0} x(t)$ и $\lim\limits_{t\to t_0-0} y(t)$) равны $+\infty$ или $-\infty$ и существует конечный предел $\lim\limits_{t\to t_0+0}\frac{y(t)}{x(t)}=k\neq 0$ (соответственно $\lim\limits_{t\to t_0-0}\frac{y(t)}{x(t)}=k$). Если для этого значения t_0, кроме того, существует конечный предел $\lim\limits_{t\to t_0+0}[y(t)-kx(t)]=l$ (соответственно $\lim\limits_{t\to t_0-0}[y(t)-kx(t)]$), то прямая

$$y=kx+l \tag{14.15}$$

является асимптотой рассматриваемой функции.

Здесь везде t_0 может быть как конечным, так и бесконечным.

Упражнение 7. Вывести уравнения асимптот (14.13), (14.14) и (14.15), исходя из того, что асимптотой называется прямая, расстояние до которой от точки $(x(t)\ y(t))$ графика функции, заданной параметрически, $x=x(t)$, $y=y(t)$, стремится к нулю, когда точка стремится по графику функции в бесконечность, т. е. когда $\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\to\infty$ при $t\to t_0+0$ или $t\to t_0-0$.

При предварительном вычерчивании графика функции, заданной параметрически, часто бывает полезно предварительно построить в отдельности графики функций $x=x(t)$ и $y=y(t)$.

Для определения возрастания и убывания функции, заданной параметрически, определения ее точек экстремума, точек перегиба, выпуклости вверх и вниз надо использовать выражения для производных y'_x и y''_{xx} через производные x'_t, y'_t, x''_{tt} и y'_{tt}. При этом следует иметь в виду, что функция, заданная параметрически

в целом, вообще говоря, задает не однозначную функцию $y = y(x)$, так что при исследовании графика функции надо все время внимательно следить за тем, какая «ветвь» графика рассматривается. Иногда бывает полезнее рассматривать, наоборот, x как функцию от y.

Пример 3. Построить график функции

$$x = \frac{t^2 + 1}{4(1 - t)}, \qquad y = \frac{t}{1 + t}. \tag{14.16}$$

Параметрическое представление имеет смысл для всех t, кроме $t = \pm 1$. Асимптоты, параллельные оси Ox, получаются при $t = 1$ и $t = \pm\infty$; их уравнения соответственно

$$y = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad y = 1.$$

Асимптота, параллельная оси Oy, получается при $t = -1$; ее уравнение

$$x = \frac{1}{4}.$$

Наклонных асимптот в данном случае нет.

Для построения графика функции вчерне полезно написать таблицу изменения знаков переменных x и y в зависимости от изменения t и некоторых характерных значений x и y. Так, в данном случае полезна следующая таблица.

Таблица 3

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x	$+\infty$	$+$	$\frac{1}{4}$	$+$	$\frac{1}{4}$	$+$	∞	$-$	$-\infty$
y	1	$+$	∞	$-$	0	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	1

Теперь строим график (рис. 47). Для наглядности на графике указано, как ветви графика соответствуют изменению параметра.

Далее,

$$x'_t = \frac{1 + 2t - t^2}{4(1 - t)^3}, \qquad y'_t = \frac{1}{(1 + t)^2},$$

поэтому

$$x'_y = \frac{(1 + t)^2 (1 + 2t - t^2)}{4(1 - t)^2}. \tag{14.17}$$

В данном случае лучше рассматривать x как функцию от y, а не наоборот, так как из нарисованного графика видно, что естественно ожидать, что x является однозначной функцией от y, $y \neq \frac{1}{2}$ и $y \neq 1$.

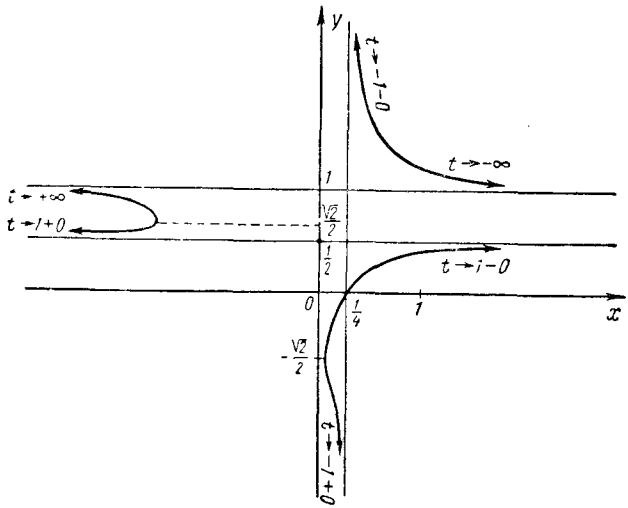


Рис. 47

Из (14.17) видно, что $x'_y = 0$ при $t = -1$ и когда $1 + 2t - t^2 = 0$, т. е. при $t = 1 + \sqrt{2}$ и $t = 1 - \sqrt{2}$. Значению $t = -1$ не соответствует никакая точка графика, а при $t = 1 + \sqrt{2}$ и $t = 1 - \sqrt{2}$ соответственно

$$y = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Составим теперь таблицу изменения производной x'_y и точек экстремума.

Таблица 4

t	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y	1		∞		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
x'_y	∞	$-$	0	$-$	0	$+$	∞	$+$	0	$-$	$+\infty$
Экстремумы					Минимум				Максимум		

Из таблицы видно, что в точке $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ функция $x=x(y)$ имеет максимум, в точке $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ — минимум и строго монотонна на интервалах

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), (1, +\infty).$$

Следует обратить внимание на то, что, взяв переменную y за независимую, а переменную x — за зависимую, т. е. взяв ось Oy за первую координатную ось, а ось Ox — за вторую, мы получили систему координат, ориентированную противоположно рассматриваемой нами все время системе координат, у которой первой осью является ось Ox, а второй — ось Oy. Читателю полезно убедиться, что доказанные нами выше критерии, например, для экстремумов и точек перегиба геометрически не связаны с той или иной ориентацией осей координат.

Для исследования выпуклости и точек перегиба функции $x(y)$ найдем x''_{yy}:

$$x''_{yy}=(x'_y)'_t t'_y=\frac{(1+t)^3(3+3t-3t^2+t^3)}{2(1-t)^3}.$$

Производная x''_{yy} равна нулю при $t=-1$ и когда

$$P(t)\equiv 3+3t-3t^2+t^3=0.$$

Замечая, что $P'(t)=3(t-1)^2\geqslant 0$, причем $P'=0$ только в одной точке $t=1$, видим, что $P(t)$ строго монотонно возрастает на всей вещественной оси (почему?). Следовательно, существует единственное t_0, такое, что $P(t_0)=0$. При этом $P(0)=3>0$, а $P(-1)=-4<0$, отсюда $-1<t_0<0$. Если $y_0=\frac{t_0}{1+t_0}$, то, очевидно, $-\infty<y_0<0$ (можно, конечно, получить и более точную оценку y_0, выбирая более близкие t_1 и t_2, такие, что $P(t_1)<0$, $P(t_2)>0$). Составим теперь таблицу изменения производной x''_{yy} и определим с ее помощью интервалы выпуклости вверх и вниз, а также точки перегиба — см. таблицу 5.

График функции (14.16) исследован.

Пример 4. Построить график функции

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{t}{1+t^3},\\ y&=\frac{t^2}{1+t^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (14.18)$$

Таблица 5

t	$-\infty$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, t_0)$	t_0	$(t_0, 1)$	1	$(1, +\infty)$	$+\infty$
y	1	$(1, +\infty)$		$(-\infty, y_0)$	y_0	$\left(y_0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	1
x''_{yy}		$+$	Функция $x(y)$ не определена	$-$	0	$+$	Не существует	$-$	
Интервал выпуклости Точки перегиба и точки разрыва	Точка разрыва	Выпуклость вниз		Выпуклость вверх	Точка перегиба	Выпуклость вниз	Точка разрыва	Выпуклость вверх	Точка разрыва

Асимптот, параллельных осям координат, в данном случае нет, так как $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $t \to -1$, то, возможно, существует наклонная асимптота. Для ее нахождения вычислим соответствующие пределы:

$$\lim_{t\to -1} \frac{y}{x} = \lim_{t\to -1} t = -1, \quad \text{т. е. } k = -1,$$

$$\lim_{t\to -1} (y - kx) = \lim_{t\to -1} \left(\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{t}{1+t^3} \right) = \lim_{t\to -1} \frac{t}{t^2 - t + 1} = -\frac{1}{3}.$$

Отсюда следует, что наклонная асимптота существует и что ее уравнение имеет вид

$$y = -x - \frac{1}{3}.$$

Построим приблизительный вид графиков $x(t)$ и $y(t)$; для этого предварительно найдем производные:

$$x'_t = \frac{1 - 2t^3}{(1+t^3)^2}, \quad y'_t = \frac{t(2 - t^3)}{(1+t^3)^2}. \tag{14.19}$$

Производная x'_t обращается в ноль при $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и меняет знак с «+» на «—», значит, это точка максимума; производная y'_t об-

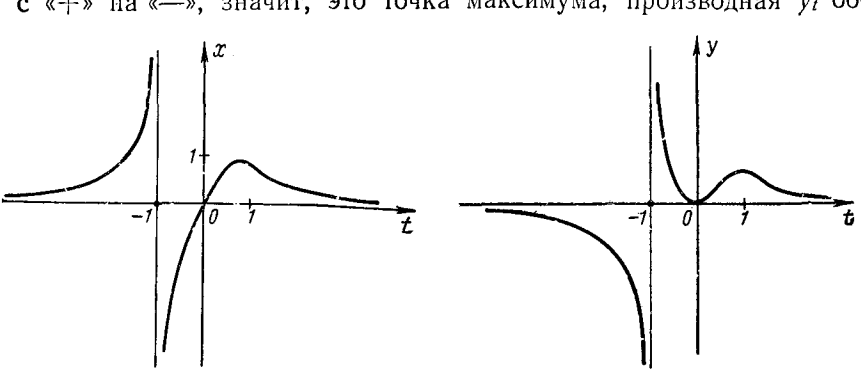


Рис. 48

ращается в ноль при $t = 0$, меняя знак с «—» на «+», значит, это точка минимума и при $t = \sqrt[3]{2}$, меняя знак с «+» на «—», значит, это также точка максимума. Из этих замечаний следует, что графики функций $x(t)$ и $y(t)$ имеют вид, изображенный на рис. 48.

По этим графикам, зная уравнение асимптоты, можно найти приблизительный вид графика искомой функции (14.18). Он имеет вид, изображенный на рис. 49.

Исследование производной y_x позволит уточнить размеры «петли», образуемой графиком. Из (14.19) имеем

$$y'_x = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

Теперь видим, что: 1) $y'_x = 0$ при $t = 0$ и $t = \sqrt[3]{2}$, т. е. касательная к графику параллельна оси Ox в точках $(0; 0)$ и $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{3}; \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$; 2) $y'_x = \infty$ при $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и $t = \infty$, т. е. касательная к графику параллельна оси Oy в точках $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}; \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)$ и $(0; 0)$. Таким образом, точке $(0; 0)$ (являющейся, как говорят, точкой самопересечения графика) соответствуют два значения параметра $t = 0$ и $t = \infty$, если только доопределить формулу (14.18), положив $x(\infty) = 0$, $y(\infty) = 0$. В этой точке две части графика имеют соответственно своими касательными координатные оси.

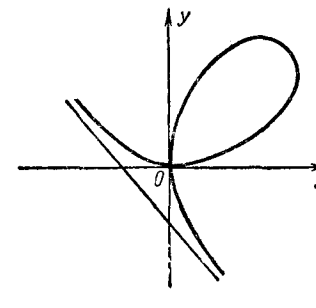


Рис. 49

График функции (14.18) называется *листом Декарта*. Из формул (14.18) нетрудно получить его неявное задание

$$x^3 + y^3 - xy = 0.$$

Упражнение 8. Построить графики следующих функций.

1. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$.
2. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.
3. $y = x^2 \ln x$.
4. $y = \dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.
5. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.
6. $x = t - e^{-t}$, $y = 2t - e^{-2t}$.
7. $x = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t}{t^4+1}$.

§ 15. ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ

15.1. Понятие предела и непрерывности для вектор-функции

Определение 1. *Если каждому значению $t \in T$, где T — некоторое множество чисел, соответствует определенный вектор $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ трехмерного пространства, то будем говорить, что на T*

определена вектор-функция, или, что то же, векторная функция, $\boldsymbol{r}(t)$.

Если в пространстве фиксирована прямоугольная система координат, то, как хорошо известно, каждому вектору соответствует упорядоченная тройка действительных чисел — его координат, и наоборот, каждой упорядоченной тройке чисел соответствует вектор, для которого эта тройка является его координатами. Поэтому задание вектор-функции эквивалентно заданию трех скалярных (числовых) функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, являющихся его координатами:

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t)).$$

Длина всякого вектора $\boldsymbol{\rho}$ обозначается через $|\boldsymbol{\rho}|$. Будем предполагать известными основные алгебраические свойства векторов, понятие скалярного и векторного произведений, а также свойства этих произведений. Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ будем обозначать $\boldsymbol{ab}$, а векторное $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

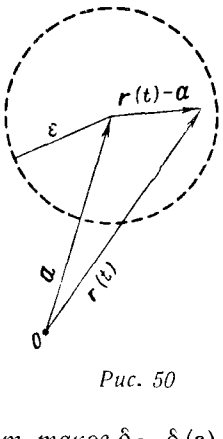


Рис. 50

Введем понятия предела, непрерывности, производной и дифференциала для векторных функций.

Определение 2. *Пусть вектор-функция* $\boldsymbol{r}(t)$ *определена в некоторой окрестности точки* t_0, *кроме, быть может, самой точки* t_0, *и пусть* $\boldsymbol{a}$ — *некоторый вектор. Вектор* $\boldsymbol{a}$ *будем называть пределом функции* $\boldsymbol{r}(t)$ *при* $t\to t_0$ *и писать* $\boldsymbol{a}=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)$ (*или* $\boldsymbol{r}(t)\to\boldsymbol{a}$ *при* $t\to t_0$), *если для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, *что* $|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|<\varepsilon$ *для всех* t, *удовлетворяющих условию* $|t-t_0|<\delta$, $t\neq t_0$ (рис. 50).

Очевидно (ср. с леммой п. 4.7), что

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a} \tag{15.1}$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|=0. \tag{15.2}$$

Если $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y\ t),\ z(t))$ и $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, то для того чтобы $\boldsymbol{a}=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=a_1,\quad \lim_{t\to t_0}y(t)=a_2,\quad \lim_{t\to t_0}z(t)=a_3. \tag{15.3}$$

В самом деле,

$$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|=\sqrt{[x(t)-a_1]^2+[y(t)-a_2]^2+[z(t)-a_3]^2}. \tag{15.4}$$

Поэтому

$$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}| \geqslant |x(t)-a_1|.$$

Отсюда следует, что условие $|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}| \to 0$ при $t \to t_0$ влечет за собой условие $|x(t)-a_1| \to 0$ при $t \to t_0$, т. е. условие $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a_1$. Аналогично доказываются другие равенства (15.3). Наоборот, если выполнено (15.3), то из (15.4) сразу получаем, что $|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}| \to 0$ при $t \to t_0$, т. е. $\boldsymbol{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t)$.

Отметим некоторые свойства пределов векторных функций.

1. Если $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}$, то $\lim\limits_{t \to t_0} |\boldsymbol{r}(t)| = |\boldsymbol{a}|$. Это сразу следует из неравенства $||\boldsymbol{r}|-|\boldsymbol{a}|| \leqslant |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|$.
2. $\lim\limits_{t \to t_0} [\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)] = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) + \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t)$.
3. $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)\,\boldsymbol{r}(t) = \lim\limits_{t \to t_0} f(t) \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t)$ ($f(t)$ — скалярная функция).
4. $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t)\,\boldsymbol{r}_2(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t)$.
5. $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) \times \boldsymbol{r}_2(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) \times \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t)$.

В свойствах 2—5 все рассматриваемые функции определены в некоторой окрестности точки t_0, кроме, быть может, самой точки t_0, и предполагается, что все пределы, написанные в правых частях равенств, существуют; тогда утверждается, что существуют и пределы, стоящие в левых частях равенств, причем справедливы написанные равенства.

Все эти свойства доказываются аналогично тому, как мы доказывали подобные утверждения, встречавшиеся нам раньше (см. п. 3.5, 4.6). Докажем, например, свойство 5. Предварительно заметим, что для любых векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$

$$|\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{p}|\,|\boldsymbol{q}| \sin \widehat{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}} \leqslant |\boldsymbol{p}|\,|\boldsymbol{q}|. \tag{15.5}$$

Поэтому, если $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t)$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t)$, причем $\lim\limits_{t \to t_0} |\boldsymbol{p}(t)| = 0$, а $|\boldsymbol{q}(t)|$ — ограниченная функция, то из (15.5) имеем (см. п. 4.8)

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}| = 0. \tag{15.6}$$

Пусть теперь $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{a}$, $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{b}$. Положим $\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{r}_1(t) - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{b}$, тогда, согласно (15.2),

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{\alpha}(t)| = \lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{\beta}(t)| = 0. \tag{15.7}$$

Теперь

$$\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)=[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\alpha}(t)]\times[\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\beta}(t)]=$$
$$=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t),$$

где в силу (15.7) и (15.6)

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)|=\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}|=\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|=0,$$

и так как

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|\leqslant|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)|+|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|,$$

то и

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|=0.$$

А это, согласно (15.2), и означает, что

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

Свойство 5 доказано.

Отметим, что свойства 1—5 пределов вектор-функций могут, конечно, быть получены с помощью формул (15.3) из соответствующих свойств скалярных функций, если перейти к координатной записи векторов и их скалярных и векторных произведений.

Перейдем к определению непрерывности вектор-функции.

Определение 3. *Вектор-функция* $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, *определенная в некоторой окрестности точки* t_0, *называется непрерывной в точке* t_0, *если*

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0).$$

Из эквивалентности условий (15.1) и (15.3) следует, что для того чтобы вектор функция $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$, определенная в некоторой окрестности точки t_0, была непрерывна в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы в точке t_0 были непрерывны функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

15.2. Производная и дифференциал вектор-функции

Определение 4. *Пусть вектор-функция* $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ *определена в некоторой окрестности точки* t_0. *Если существует предел*

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t},$$

то он называется производной данной вектор-функции в точке t_0 *и обозначается* $\boldsymbol{r}'(t_0)$.

Таким образом, производная вектор-функции в точке есть вектор.

Для того чтобы функция $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, определенная в некоторой окрестности точки t_0, имела производную в точке t_0, необходимо и достаточно, чтобы функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ имели производные при $t = t_0$, причем в этом случае

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = (x'(t_0),\quad y'(t_0),\quad z'(t_0)),$$

$$|\boldsymbol{r}'(t_0)| = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0)}.$$

Это сразу следует из эквивалентности двух подходов (15.1) и 15.3) к определению предела для вектор-функции:

$$\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t} =$$

$$= \left(\frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t},\ \frac{y(t_0+\Delta t) - y(t_0)}{\Delta t},\ \frac{z(t_0+\Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}\right)$$

при $\Delta t \to 0$.

Определение 5. *Вектор-функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, определенная в некоторой окрестности точки t_0, называется дифференцируемой в этой точке, если ее приращение $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)$ в точке t_0 представимо в виде*

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\,\Delta t + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\,\Delta t, \tag{15.8}$$

*где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t) = \boldsymbol{0}$. При этом линейная вектор-функция**) $\boldsymbol{a}\,\Delta t$ *называется дифференциалом функции $\boldsymbol{r}(t)$ в точке t_0 и обозначается $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\,\Delta t$.*

Таким образом,

$$\Delta\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\,\Delta t. \tag{15.9}$$

Очевидно, что если вектор-функция дифференцируема в точке t_0, то она и непрерывна в этой точке.

Как и в случае скалярных функций, из дифференцируемости функции следует существование производной $\boldsymbol{r}'(t)$ и равенство ее вектору $\boldsymbol{a}$. В самом деле, из (15.8) имеем

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} [\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)] = \boldsymbol{a}.$$

---

*) Вектор-функция аргумента t называется *линейной*, если она имеет вид $\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — какие-либо два фиксированных вектора.

Обратно, если существует производная $\boldsymbol{r}'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$, то, полагая $\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t) = \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} - \boldsymbol{r}'(t_0)$, получим

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t_0)\,\Delta t + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\,\Delta t,$$

где $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t) = 0$. Значит, $\boldsymbol{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 и

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t_0)\,\Delta t.$$

Положим для независимой переменной t по определению $dt = \Delta t$, тогда (опуская обозначение аргумента t_0)

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'\,dt, \quad \boldsymbol{r}' = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

Подставляя полученное выражение для $d\boldsymbol{r}$ в (15.9), получим

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'\,\Delta t + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\,\Delta t,$$

или

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'\,\Delta t + \boldsymbol{\alpha}(\Delta t), \tag{15.10}$$

где $\boldsymbol{\alpha}(\Delta t) = \boldsymbol{o}(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$*) и $\boldsymbol{\alpha}(0) = 0$.

Пусть теперь $t = t(\tau)$. Если эта функция дифференцируема в точке τ_0, $t_0 = t(\tau_0)$ и $\Delta\tau = \tau - \tau_0$, то из (15.10) (обозначая для ясности $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'_t$) следует, что

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta \tau} = \boldsymbol{r}'_t \frac{\Delta t}{\Delta \tau} + \frac{\boldsymbol{\alpha}(\Delta t)}{\Delta \tau}.$$

Так как $\Delta t \to 0$ при $\Delta\tau \to 0$, то, как и в случае числовой функции (см. п. 97), полагая $\boldsymbol{\varepsilon}(0) = 0$, получаем

$$\lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\boldsymbol{\alpha}(\Delta t)}{\Delta \tau} = 0,$$

поэтому производная $\boldsymbol{r}'_t = \lim\limits_{\Delta\tau \to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta \tau}$ существует и $\boldsymbol{r}'_\tau = \boldsymbol{r}'_t\, t'_\tau$.

Отсюда, как и в случае скалярных функций, получается инвариантность записи дифференциала вектор-функции: как для зависимой переменной t, так и для независимой переменной τ имеем

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'_t\,dt, \quad d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'_\tau\,d\tau.$$

*) По аналогии со случаем скалярных функций пишется $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{o}(\beta)$ при $t \to t_0$, если $\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t)\,\beta(t)$, где $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{\varepsilon}(t) = 0$.

Приведем формулы дифференцирования вектор-функций (аргумент для простоты обозначений опустим):

1. $(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1'+\boldsymbol{r}_2'$.
2. $(f\boldsymbol{r})' = f'\boldsymbol{r}+f\boldsymbol{r}'$.
3. $(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1'\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2'$.
4. $(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1'\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2'$.

Здесь все рассматриваемые функции определены в некоторой окрестности точки t_0 и предполагается, что все производные в точке t_0, стоящие в правой части равенства, существуют; тогда утверждается, что в точке t_0 существуют и производные, стоящие в левых частях равенства, причем имеют место написанные равенства.

Все эти формулы доказываются аналогично формулам дифференцирования скалярных функций (см. п. 9.5). Докажем, например, формулу 4.

Используя свойства 1—5 пределов вектор-функций, получим

$$[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]'_{t=t_0} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}_1(t_0+\Delta t)\times\boldsymbol{r}_2(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}_1(t_0)\times\boldsymbol{r}_2(t_0)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\boldsymbol{r}_1(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}_1(t_0)}{\Delta t}\times\boldsymbol{r}_2(t_0+\Delta t)+\boldsymbol{r}_1(t)\times\frac{\boldsymbol{r}_2(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}_2(t_0)}{\Delta t}\right] =$$

$$= \boldsymbol{r}_1'(t_0)\times\boldsymbol{r}_2(t_0)+\boldsymbol{r}_1(t_0)\times\boldsymbol{r}_2'(t_0).$$

Если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ определена в некоторой окрестности точки t_0 и имеет n производных в этой точке, то для нее имеет место формула Тейлора

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k\boldsymbol{r}(t_0)}{dt^k}\Delta t^k+\boldsymbol{o}(\Delta t^n).$$

Эта формула непосредственно следует из разложения по формуле Тейлора координатных функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

Мы видим, что многие факты теории скалярных функций буквально переносятся на вектор-функции. Однако было бы ошибкой думать, что это всегда так: например, в определенном смысле аналог формулы конечных приращений не имеет места для вектор-функций.

Упражнение. Доказать, что если $\boldsymbol{r}(t)$ — дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция, то, вообще говоря, не существует точки $\xi\in[a, b]$, такой, что

$$\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}'(\xi)(b-a).$$

§ 16. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

16.1. Понятие кривой

Определение 1. *Пусть в пространстве фиксирована прямоугольная система координат. Множество точек* (x, y, z), *координаты которых представлены как непрерывные на некотором отрезке* $[a, b]$ *функции переменного* t

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b],$$

называется параметрически заданной кривой Γ, *или простой кривой* Γ.

Короче это выражают, говоря, что кривая — это непрерывный образ отрезка. Само указанное множество точек называется *носителем данной кривой*. Переменное t называется *параметром кривой*, а функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — *координатным представлением* кривой, при этом пишется

$$\Gamma = \{x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Задание трех функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ эквивалентно заданию одной вектор-функции $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$. Поместим начало всех векторов $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ в начало координат (векторы, начало которых находится в начале координат, называются *радиус-векторами*). Кривая Γ называется в этом случае *годографом вектор-функции* $\boldsymbol{r}(t)$, а сама вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ — *векторным представлением*, или *вектор-представлением*, кривой Γ и пишется $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, или просто $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t)\}$.

Конец радиус-вектора $\boldsymbol{r}(t)$ будем обозначать $r(t)$. Вектор функция $\boldsymbol{r}(t)$ и отображение $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, называются соответствующими друг другу.

Отображение $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, называется *представлением кривой*.

Таким образом, имеется три вида представлений кривой: координатное, векторное и просто представление.

Если $M = r(t_0)$, то точка M и соответствующее ей значение параметра t_0 называется *точкой кривой*, а сама точка M — *носителем этой точки кривой*. Одна и та же точка пространства, принадлежащая носителю кривой Γ, может являться носителем одной или больше точек кривой Γ; последнее будет иметь место в том случае, когда существует несколько значений параметра t, при которых вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ принимает одно и то же значение. Такие точки называются *точками самопересечения кривой* Γ, или *кратными ее точками*.

Определение 2. *Кривая без кратных точек называется простой дугой.*

Будем говорить, что точка $M = r(t)$ кривой Γ стремится к точке $M_0 = r(t_0)$ этой кривой, если $t \to t_0$.

Приведенное определение кривой имеет в своей основе физическое представление о траектории (пути) движущейся в пространстве материальной частицы.

Если рассматриваемая кривая Γ лежит в некоторой плоскости, то эта кривая называется *плоской*. Если указанная плоскость выбрана за координатную плоскость xOy, то представление кривой имеет вид

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = 0,$$

причем уравнение $z = 0$, если это не может привести к недоразумениям, обычно не пишется.

График непрерывной на некотором отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$ является кривой в нашем смысле с представлением

$$x = x, \quad y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$$

(в этом случае параметр $t = x$).

Порядок чисел (по величине) на отрезке $[a, b]$ с помощью представления $\boldsymbol{r}(t)$ кривой $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, естественно, порождает соответствующий порядок точек на кривой.

Определение 3. *Точка $r(t') \in \Gamma$ считается предшествующей точке $r(t'') \in \Gamma$, или, что то же, точка $r(t'')$ считается следующей за точкой $r(t')$, если $a \leqslant t' < t'' \leqslant b$; поэтому кривую Γ называют также ориентированной кривой, т. е. кривой, на которой указан порядок следования точек. Точка $r(a)$ называется началом, а точка $r(b)$ — концом кривой.*

Определение 4. *Если $r(a) = r(b)$, то кривая Γ называется замкнутой, или контуром.*

Замкнутая кривая, начало и конец которой являются ее единственными кратными точками, называется простым контуром.

Задача 8 (теорема Жордана). Доказать, что всякий простой контур на плоскости разбивает плоскость на две области (ограниченную и неограниченную); это означает, во-первых, что он является границей каждой из этих областей, во-вторых, что никакие две точки, принадлежащие различным указанным областям, нельзя соединить кривой, не пересекающей данный контур.

Рассмотрим ориентированную кривую $\Gamma = \{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$. Пусть задана некоторая функция $t = t(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, строго монотонно возрастающая и непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$; причем $t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$, тогда вектор-функция $\boldsymbol{\rho}(\tau) = \boldsymbol{r}(t(\tau))$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, считается по определению также представлением ориентированной кривой Γ. Отметим, что обратный переход от представления $\boldsymbol{\rho}(\tau)$ к представлению $\boldsymbol{r}(t)$ осуществляется также с помощью строго

монотонно возрастающей и непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $\tau = \tau(t)$, являющейся обратной к функции $t = t(\tau)$ (см. п. 6.3).

Функция $t = t(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, называется *преобразованием параметра*. В зависимости от рассматриваемых вопросов на нее накладываются различные дополнительные условия, причем всегда таким образом, чтобы они выполнялись и для обратной функции. Например, условие дифференцируемости и необращения в ноль производной, непрерывной дифференцируемости и необращения в ноль производной, дважды непрерывной дифференцируемости и необращения в ноль первой производной и т. п. Такие преобразования параметра называются *допустимыми преобразованиями*.

Например, чтобы из непрерывной дифференцируемости представления $\boldsymbol{r}(t)$ кривой Γ следовала непрерывная дифференцируемость другого ее представления $\boldsymbol{\rho}(\tau)$, и обратно, естественно потребовать, чтобы преобразование параметра $t = t(\tau)$ было непрерывно дифференцируемо и чтобы его производная не обращалась в ноль.

Пусть теперь задан некоторый класс допустимых преобразований параметра. Две вектор-функции, получающиеся одна из другой с помощью допустимого преобразования параметра, называются *эквивалентными*. Очевидно, в силу нашего соглашения эквивалентные вектор-функции являются представлениями одной и той же кривой (при заданном классе допустимых преобразований параметра).

Таким образом, окончательно приходим к следующему определению.

Определение 1′. *Кривая — это геометрическое место точек пространства плюс соответствующий класс его эквивалентных представлений**).

Любое из представлений кривой полностью определяет весь класс эквивалентных ее представлений (всегда предполагается, что условия при которых вектор-функции считаются эквивалентными, заданы), а значит, саму кривую Γ, поэтому по-прежнему будем писать $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, или $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t)\}$, где $\boldsymbol{r}(t)$ — какое-либо из векторных представлений кривой Γ. Будем также иногда писать $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, или $\Gamma = \{r(t)\}$, где $r(t)$ — некоторое представление кривой Γ, т. е. непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ в пространство

Если $\rho(\tau)$; $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$ и $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — два представления кривой Γ, $t = t(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, — допустимое преобразование параметра, переводящее второе представление в первое, то $\rho(\tau_0)$ и

*) Вдумчивый читатель заметит, что в нашем определении кривой само множество точек кривой («геометрическое место точек») играет подчиненную роль и его без ущерба можно отбросить, определив кривую просто как класс соответствующих эквивалентных вектор-функций. Мы этого не сделали для большей геометрической наглядности.

$r(t_0)$, естественно, считаются одной и той же точкой кривой Γ тогда и только тогда, когда $\tau_0 = \tau(t_0)$.

Если на представление кривой и на допустимые преобразования параметра накладывать те или иные ограничения, то будем получать различные классы кривых.

Определение 5. *Кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t)\}$ называется (непрерывно) дифференцируемой, если ее векторное представление $\boldsymbol{r}(t)$ — (непрерывно) дифференцируемая функция, а допустимыми преобразованиями параметра являются (непрерывно) дифференцируемые преобразования с не обращающейся в ноль производной.*

Аналогично определяются n раз (непрерывно) дифференцируемые кривые при $n > 1$.

Указанный подход к понятию кривой естествен с точки зрения физической интерпретации кривой как траектории материальной точки: положение движущейся материальной точки на ее траектории можно задавать, пользуясь различными параметрами, например, временем движения, длиной пройденного пути и т. п.

Пример. В силу нашего определения кривые

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

и

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi,$$

являются различными, хотя носители их совпадают: они представляют собой одну и ту же окружность $x^2 + y^2 = 1$. В первом случае эта окружность «проходится» один раз, во втором — дважды.

Представления же

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

и

$$x = \sqrt{\tau(2-\tau)}, \quad y = \tau - 1, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 2,$$

задают одну и ту же кривую, если допустимыми преобразованиями параметра считаются все непрерывные строго монотонно возрастающие преобразования. Действительно, функция $\tau = 1 + \sin t$ непрерывна, строго монотонно возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и переводит одно представление в другое. Множеством точек кривой, т. е. ее носителем, является в этом случае полуокружность

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x \geqslant 0.$$

Определение 6. *Пусть задана кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t), \ a \leqslant t \leqslant b\}$, причем в качестве класса допустимых преобразований параметра взят класс строго монотонно возрастающих непрерывных функций.*

Пусть $t = t(\tau)$ — *строго монотонно убывающая и непрерывная на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *функция, причем* $t(\alpha) = b$, $t(\beta) = a$. *Кривая, определяемая представлением* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t(\tau))$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, *называется кривой ориентированной противоположно кривой* Γ *и обозначается* — Γ.

Если $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$ и $t_0 = t(\tau_0)$, то точки $r(t_0)$ и $r(t(\tau_0))$ соответственно кривых Γ и $-\Gamma$ называются соответствующими друг другу. Одна точка кривой Γ предшествует другой точке этой кривой тогда и только тогда, когда точка кривой $-\Gamma$, соответствующая первой точке, следует за точкой, соответствующей второй. Этим оправдывается термин «противоположно ориентированная кривая».

Подобным же образом определяются противоположно ориентированные кривые и при других допустимых преобразованиях параметра.

Если $\boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — представление кривой Γ, то $\boldsymbol{r}(a + b - \tau)$, $a \leqslant \tau \leqslant b$, является представлением противоположно ориентированной кривой $-\Gamma$, ибо функция $t = a + b - \tau$, $a \leqslant \tau \leqslant b$, строго монотонно убывает.

В заключение сформулируем еще несколько полезных для дальнейшего определений.

Определение 7. *Пусть задана кривая* $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$. *Если* $[a', b'] \subset [a, b]$, *то кривая* $\Gamma' = \{\boldsymbol{r}(t);\ a' \leqslant t \leqslant b'\}$ *называется частью кривой* Γ *(или ее дугой) и пишется* $\Gamma' \subset \Gamma$.

Если $t_0 \in (a, b)$, $\Gamma_1 = \{\boldsymbol{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant t_0\}$, $\Gamma_2 = \{\boldsymbol{r}(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant b\}$; *то кривая* Γ *называется суммой кривых* Γ_1 *и* Γ_2 *и пишется* $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Аналогично определяется сумма конечного числа кривых.

Определение 8. *Пусть* $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — *плоская кривая, расположенная на плоскости* x, y. *Если существует непрерывная функция* $F(x, y)$, *такая, что геометрическое место точек* (x, y), *удовлетворяющих условию*

$$F(x, y) = 0, \tag{16.1}$$

совпадает с носителем кривой Γ, *то говорят, что уравнение* (16.1) *является неявным представлением кривой* Γ.

Следует, однако, иметь в виду, что, вообще говоря, геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению вида (16.1), где $F(x, y)$ — некоторая непрерывная функция, не является множеством точек какой-либо кривой в вышеопределенном смысле. Например, геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0,$$

представляет собой окружность $x^2 + y^2 = 1$ и точку $(0; 0)$. Можно показать, что это множество не является непрерывным образом отрезка.

Наконец, отметим, что множество точек кривой всегда ограничено, т. е. лежит в некотором шаре; это следует из того, что функции координатного представления кривой, согласно теореме Больцано — Вейерштрасса, ограничены в силу их непрерывности. Вместе с тем уже в элементарной математике встречаются неограниченные кривые, к таковым относятся, например, прямая, парабола, гипербола, синусоида, график $\operatorname{tg} x$ и т. п. Чтобы охватить и такие «кривые», можно определить класс так называемых «открытых кривых» по схеме, подобной вышеприведенной, в которой за основу взята непрерывная вектор-функция, определенная уже на интервале, а не на отрезке, как это было сделано выше. Открытые кривые, в частности, могут быть и неограниченными. Подробное и точное формулирование всех этих понятий предоставляется проделать учащемуся по мере потребности.

16.2. Касательная к кривой. Геометрический смысл производной вектор-функции

Пусть задана кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ и пусть $t_0 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t \in [a, b]$.

Прямую, проведенную через точки $r(t_0)$ и $r(t_0 + \Delta t)$, назовем секущей кривой Γ и обозначим $l_{\Delta t}$. Если $r(t_0) \neq r(t_0 + \Delta t)$, то такая прямая единственна. (Для простоты в дальнейшем будем предполагать, что условие $r(t_0) \neq r(t_0 + \Delta t)$ выполняется для всех достаточно малых значений Δt.) Возьмем какой-либо единичный вектор $\boldsymbol{l}(\Delta t)$, параллельный секущей $l_{\Delta t}$. Например, если $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0) \neq 0$, то можно взять $\boldsymbol{l}(\Delta t) = \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{|\Delta \boldsymbol{r}|}$, ибо, очевидно, $|\boldsymbol{l}(\Delta t)| = 1$.

Определение 9. *Будем говорить, что секущая $l_{\Delta t}$ стремится к предельному положению, когда точка $r(t_0 + \Delta t)$ кривой Γ стремится к точке $r(t_0)$ (т. е. когда $\Delta t \to 0$), если для всех достаточно малых по абсолютной величине значений Δt можно так выбрать указанную выше единичную вектор-функцию $\boldsymbol{l}(\Delta t)$**), *что для нее существует предел*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{l}(\Delta t) = \boldsymbol{l}_0. \tag{16.2}$$

При выполнении этого условия под предельным положением секущей в точке $r(t_0)$ будем понимать прямую, проходящую через точку $r(t_0)$ и параллельную вектору $\boldsymbol{l}_0$.

Из формулы (16.2) следует, что угол между секущей и ее предельным положением стремится к нулю, когда $\Delta t \to 0$.

---

*) Это означает, что существует $\delta > 0$, такое, что для всех Δt, удовлетворяющих неравенству $|\Delta t| < \delta$, можно осуществить указанный выбор вектора $\boldsymbol{l}(\Delta t)$.

Поскольку из (16.2) следует, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} |\boldsymbol{l}(\Delta t)| = |\boldsymbol{l}_0|,$$

то $\boldsymbol{l}_0$ — также единичный вектор.

Упражнение 1. Доказать, что прямая, являющаяся предельным положением секущей, единственна, т. е. доказать, что если в предположениях определения 9 для некоторого единичного вектора $\boldsymbol{l}_1(\Delta t)$, параллельного секущей $l_{\Delta t}$, существует $\lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{l}_1(\Delta t)$, то он равен либо $\boldsymbol{l}_0$, либо $-\boldsymbol{l}_0$ (см. (16.2)).

Заметим, что если для некоторого вектора $\boldsymbol{l}^*(\Delta t)$ (не обязательно единичного), параллельного секущей $l_{\Delta t}$, существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{l}^*(\Delta t) = \boldsymbol{l}_0^* \neq 0, \quad (16.3)$$

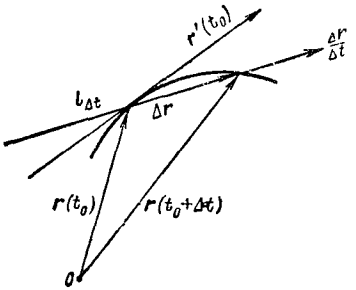


Рис. 51

то существует и

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{l}^*(\Delta t)}{|\boldsymbol{l}^*(\Delta t)|} = \frac{\boldsymbol{l}_0^*}{|\boldsymbol{l}_0^*|}.$$

Но вектор

$$\frac{\boldsymbol{l}^*(\Delta t)}{|\boldsymbol{l}^*(\Delta t)|},$$

очевидно, единичный; поэтому согласно сделанному определению, в этом случае секущая $l_{\Delta t}$ стремится к предельному положению.

Определение 10. *Предельное положение секущей в точке $r(t_0)$ (если оно, конечно, существует) называется касательной к данной кривой в точке $r(t_0)$.*

Лемма. *Пусть вектор-представление $\boldsymbol{r}(t)$ кривой Γ дифференцируемо в точке $t_0 \in [a, b]$ и пусть $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}$. Тогда кривая Γ имеет касательную в точке $r(t_0)$ и производная $\boldsymbol{r}'(t_0)$ направлена по этой касательной.*

Доказательство. Действительно, вектор

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0),$$

а значит, и вектор $\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$, очевидно, параллельны секущей $l_{\Delta t}$ (рис. 51). Согласно предположению,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \boldsymbol{r}'(t_0) \neq 0,$$

т. е. выполняется условие (16.3) для вектор-функции $\boldsymbol{l}(\Delta t) = \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$,

что и означает, что в точке $r(t_0)$ существует касательная*) и что она параллельна вектору $r'(t_0)$.

Лемма доказана.

Отметим, что в рассматриваемом случае дифференциал $dr(t_0) = r'(t_0)\,dt$ также направлен по касательной к кривой, ибо он отличается от производной лишь скалярным множителем dt.

Вектор $t = \dfrac{r'}{|r'|}$, $r' \neq 0$, является единичным вектором, направленным по касательной.

Вектор Δr при $\Delta t > 0$ направлен от точки кривой с меньшим значением параметра к точке с большим значением параметра, поэтому можно сказать, что вектор Δr при $\Delta t > 0$ показывает направление, в котором параметр на кривой возрастает, т. е., как говорят, положительное направление на кривой. Вектор $\dfrac{\Delta r}{\Delta t}$ при $\Delta t > 0$ имеет то же направление, что и вектор Δr. Поскольку $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta r}{\Delta t} = r'(t)$, то естественно говорить, что вектор $r'(t)$, а значит, и вектор t, который отличается, быть может, от вектора $r'(t)$ положительным числовым множителем $\dfrac{1}{|r'(t)|}$, также направлены в сторону возрастания параметра и что их ориентация (направление) соответствует ориентации кривой. Направление вектора t (или, что то же, вектора r') будем называть *положительным направлением касательной.*

Уравнение касательной к кривой Γ в точке $r(t_0)$, для которой $r'(t_0) \neq 0$, в векторной записи имеет вид

$$r = r(t_0) + r'(t_0)\,\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty,$$

где r — текущий радиус-вектор касательной. В координатной записи уравнение касательной в этом случае имеет вид

$$x = x(t_0) + x'(t_0)\,\tau,$$

$$y = y(t_0) + y'(t_0)\,\tau,$$

$$z = z(t_0) + z'(t_0)\,\tau,$$

$$-\infty < \tau < +\infty.$$

Упражнение 2. Пусть вектор-представление $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, кривой Γ дважды дифференцируемо в точке $t_0 \in [a, b]$ и пусть $r'(t_0) = 0$, $r''(t_0) \neq 0$. Доказать, что кривая Γ имеет в точке $r(t_0)$ касательную, и уравнение этой касательной будет

$$r = r(t_0) + r''(t_0)\,\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty.$$

---

*) Справедливость неравенства $r(t_0) \neq r(t_0 + \Delta t)$ при всех достаточно малых Δt (лишь при выполнении которого было сформулировано определение касательной) в рассматриваемом случае следует из предположения, что $r'(t_0) \neq 0$.

Определение 11. *Точка дифференцируемой кривой* $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t)\}$, *в которой* $\boldsymbol{r}' \neq 0$, *называется неособой, а точка, в которой* $\boldsymbol{r}' = 0$, — *особой.*

Если $\boldsymbol{r} = (x(t), y(t), z(t))$, то из равенства $|\boldsymbol{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ (см. п. 15.2) имеем: *точка* $(x(t), y(t), z(t))$ *кривой* Γ *неособая тогда и только тогда, когда в ней* $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$, т. е. хоть одна из производных x', y' и z' не обращается в ноль.

Согласно доказанному выше, *во всякой неособой точке кривой* Γ *существует касательная.*

Если допустимыми преобразованиями параметра являются строго монотонные дифференцируемые функции $t = t(\tau)$ с производной, не обращающейся в ноль, тогда неособая точка при одном представлении кривой будет одновременно неособой и при любом представлении: это следует из равенства

$$x_\tau'^2 + y_\tau'^2 + z_\tau'^2 = (x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2)\, t_\tau'^2.$$

Рассмотрим более подробно случай плоской кривой. Пусть $\Gamma = \{x = x(t),\ y = y(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — непрерывно дифференцируемая плоская кривая. Пусть точка $(x(t_0), y(t_0))$ — неособая, т. е. $x'^2(t_0) + y'^2(t_0) > 0$, например, $x'(t_0) \neq 0$. Пусть для определенности $x'(t_0) > 0$, тогда в некоторой окрестности точки t_0 также $x'(t) > 0$ и, значит, функция $x(t)$ строго монотонно возрастает в этой окрестности; поэтому существует обратная непрерывно дифференцируемая функция $t = t(x)$. Подставляя ее в представление кривой Γ, получим

$$y = y(t(x)) = f(x),$$

т. е. в некоторой окрестности неособой точки непрерывно дифференцируемая кривая является графиком непрерывно дифференцируемой функции f; точнее, существуют окрестность точки t_0 и непрерывно дифференцируемая функция f, определенная на этой окрестности, такие, что часть кривой, соответствующая значениям параметра, принадлежащим указанной окрестности, является графиком функции f.

Определение 12. *Непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек называется гладкой.*

Кривая, представимая как сумма конечного числа гладких кривых, называется кусочно-гладкой.

16.3. Длина дуги кривой и дифференциал длины дуги

Определение 13. *Для всякого отрезка* $[a, b]$ *систему его точек* t_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, *таких, что*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b,$$

будем называть его разбиением и обозначать $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$.

Пусть задана кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ и пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Положим

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})|.$$

Очевидно (рис. 52), σ_τ — длина ломаной с вершинами $\boldsymbol{r}(a)$, $\boldsymbol{r}(t_1)$, ..., $\boldsymbol{r}(t_{n-1})$, $\boldsymbol{r}(b)$, т. е., как обычно говорят, *ломаной, вписанной в кривую* Γ.

Определение 14. *Величина*

$$S_\Gamma = \sup_\tau \sigma_\tau,$$

где верхняя грань взята по всевозможным разбиениям τ *отрезка* $[a, b]$, *называется длиной кривой* Γ. *Если* $S_\Gamma < +\infty$, *то кривая* Γ *называется спрямляемой.*

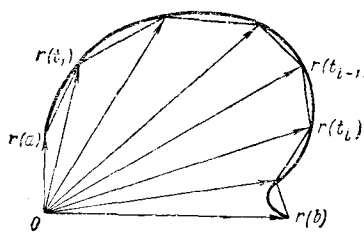


Рис. 52

В силу этого определения спрямляемость кривой и ее длина не зависят от выбора представления кривой и всегда

$$0 \leqslant S_\Gamma \leqslant +\infty.$$

Упражнение 3. Доказать, что кривая, являющаяся частью спрямляемой кривой, также спрямляема.

Лемма. *Пусть* $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$, *тогда*

$$S_\Gamma = S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}. \tag{16.4}$$

Доказательство. Пусть $a < c < b$ и

$$\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\},$$

$$\Gamma_a = \{\boldsymbol{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant c\},$$

$$\Gamma_b = \{\boldsymbol{r}(t),\ c \leqslant t \leqslant b\}.$$

Пусть τ — разбиение отрезка $[a, b]$, а τ^* — разбиение этого же отрезка, совпадающее с τ, если точка c входит в разбиение τ и получающееся из τ добавлением к нему точки c, если эта точка не входит в разбиение τ. Разбиение τ^* является объединением двух разбиений отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, которые мы обозначим соответственно τ_a и τ_b, т. е. $\tau^* = \tau_a \cup \tau_b$. Очевидно, для длин ломаных, соответствующих разбиениям τ^*, τ_a и τ_b, справедливо равенство

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau_a} + \sigma_{\tau_b}.$$

Но $\sup\limits_{\tau_a} \sigma_{\tau_a} = S_{\Gamma_a}$, $\sup\limits_{\tau_a} \sigma_{\tau_b} = S_{\Gamma_b}$, следовательно,

$$\sigma_{\tau^*} \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}.$$

При переходе от разбиения τ к разбиению τ^*, быть может, лишь одно звено $\overline{r(t_{i-1})\,r(t_i)}$ заменяется двумя $\overline{r(t_{i-1})\,r(c)}$ и $\overline{r(c)\,r(t_i)}$, и поскольку

$$|\overline{r(t_{i-1})\,r(t_i)}| \leqslant |\overline{r(t_{i-1})\,r(c)}| + |\overline{r(c)\,r(t_i)}|,$$

то

$$\sigma_\tau \leqslant \sigma_{\tau^*}$$

и, следовательно,

$$\sigma_\tau \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}.$$

Но $S_\Gamma = \sup \sigma_\tau$, поэтому

$$S_\Gamma \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}. \tag{16.5}$$

Докажем теперь обратное неравенство. Для произвольных τ_a и τ_b разбиений соответственно отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ и разбиения $\tau^* = \tau_a \cup \tau_b$ отрезка $[a, b]$ имеем

$$\sigma_{\tau_a} + \sigma_{\tau_b} = \sigma_{\tau^*} \leqslant S_\Gamma.$$

Отсюда $\sigma_{\tau_a} \leqslant S_\Gamma - \sigma_{\tau_b}$; фиксируя разбиение τ_b и переходя к верхней грани σ_{τ_a} при всевозможных τ_a, получим

$$S_{\Gamma_a} \leqslant S_\Gamma - \sigma_{\tau_b}.$$

Отсюда

$$\sigma_{\tau_b} \leqslant S_\Gamma - S_{\Gamma_a},$$

следовательно,

$$S_{\Gamma_b} \leqslant S_\Gamma - S_{\Gamma_a},$$

т. е.

$$S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b} \leqslant S_\Gamma. \tag{16.6}$$

Из неравенств (16.5) и (16.6) получаем (16.4).

Лемма доказана.

Задача 9. Построить пример неспрямляемой кривой.

Теорема 1. *Если кривая* $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), a \leqslant t \leqslant b\}$ *непрерывно дифференцируема, то она спрямляема и ее длина* S_Γ *удовлетворяет неравенству*

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}\,(b-a) \leqslant S_\Gamma \leqslant \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}\,(b-a), \tag{16.7}$$

где

$$m_1=\inf_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)|;\quad m_2=\inf_{a\leqslant t\leqslant b}|y'(t)|;\quad m_3=\inf_{a\leqslant t\leqslant b}|z'(t)|;$$
$$M_1=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)|;\quad M_2=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|y'(t)|;\quad M_3=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|z'(t)|. \tag{16.8}$$

Отметим, что в силу непрерывности производных $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ величины m_k и M_k конечны, $k=1, 2, 3$.

Доказательство. Возьмем какое-либо разбиение $\tau=\{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ отрезка $[a, b]$. Тогда

$$\sigma_\tau=\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{r}(t_i)-\boldsymbol{r}(t_{i-1})|=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2+[z(t_i)-z(t_{i-1})]^2}. \tag{16.9}$$

По формуле конечных приращений Лагранжа (см. п. 11.2)

$$x(t_i)-x(t_{i-1})=x'(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),\quad t_{i-1}<\xi_i<t_i,$$
$$y(t_i)-y(t_{i-1})=y'(\eta_i)(t_i-t_{i-1}),\quad t_{i-1}<\eta_i<t_i,$$
$$z(t_i)-z(t_{i-1})=z'(\zeta_i)(t_i-t_{i-1}),\quad t_{i-1}<\zeta_i<t_i,$$
$$i=1, 2, \ldots, n.$$

Подставляя эти выражения в (16.9), получим

$$\sigma_\tau=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2+[z'(\zeta_i)]^2}\,(t_i-t_{i-1}). \tag{16.10}$$

Из (16.8) следует, что

$$m_1\leqslant|x'(\xi_i)|\leqslant M_1,\quad m_2\leqslant|y'(\eta_i)|\leqslant M_2,\quad m_3\leqslant|z'(\zeta_i)|\leqslant M_3,$$
$$i=1, 2, \ldots, n.$$

Подставляя эти оценки в (16.10) и вынося множители $\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}$ и $\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}$ за знак суммы (они не зависят от индекса суммирования), получим

$$\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\leqslant\sigma_\tau\leqslant\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1}).$$

Так как, очевидно, $\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})=b-a$, то окончательно

$$\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}\,(b-a)\leqslant\sigma_\tau\leqslant\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}\,(b-a)$$

для любого разбиения τ.

Переходя в этом неравенстве к верхней грани по τ, получим утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть кривая* $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)); a \leqslant t \leqslant b\}$ *непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги* s, *отсчитываемая от начала* $r(a)$ *кривой* Γ *или соответственно от ее конца* $r(b)$, *является монотонно возрастающей, соответственно монотонно убывающей, непрерывно дифференцируемой функцией параметра* t; *при этом*

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right|, \tag{16.11}$$

соответственно

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = -\left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right|. \tag{16.12}$$

Доказательство. Пусть $s = s(t)$ — длина дуги кривой Γ от точки $r(a)$ до точки $r(t)$. Пусть $t_0 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t \in [a, b]$ и $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t)$. Очевидно, что функция $s = s(t)$ монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$, поэтому если $\Delta t > 0$, то $\Delta s \geqslant 0$; если же $\Delta t < 0$, то $\Delta s \leqslant 0$. Поэтому всегда $\frac{\Delta s}{\Delta t} \geqslant 0$.

Применяя неравенство (16.7) к части кривой Γ, соответствующей отрезку $[t_0, t_0 + \Delta t]$ при $\Delta t > 0$ (соответственно отрезку $[t_0 + \Delta t, t_0]$ при $\Delta t < 0$), получим

$$|\Delta t| \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \leqslant |\Delta s| \leqslant |\Delta t| \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2},$$

откуда

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \leqslant \frac{\Delta s}{\Delta t} \leqslant \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}, \tag{16.13}$$

где m_k и M_k, $k = 1, 2, 3$, — соответственно нижние и верхние грани абсолютных величин производных функций координатного представления кривой Γ на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ при $\Delta t > 0$ или на отрезке $[t_0 + \Delta t, t_0]$ при $\Delta t < 0$. В силу непрерывности этих производных указанные значения m_k и M_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, принимаются в каких-то точках отрезка $[t_0, t_0 + \Delta t]$ при $\Delta t > 0$ или соответственно отрезка $[t_0 + \Delta t, t_0]$ при $\Delta t < 0$. Итак,

$$m_1 = \inf |x'(t)| = |x'(t_0 + \theta \Delta t)|, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$M_1 = \sup |x'(t)| = |x'(t_0 + \theta_1 \Delta t)|, \quad 0 < \theta_1 < 1,$$

поэтому

$$\lim_{\Delta t\to 0} m_1 = \lim_{\Delta t\to 0} M_1 = |x'(t_0)|;$$

подобным образом

$$\lim_{\Delta t\to 0} m_2 = \lim_{\Delta t\to 0} M_2 = |y'(t_0)|,$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} m_3 = \lim_{\Delta t\to 0} M_3 = |z'(t_0)|.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ в неравенство (16.13), получим, что $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ существует и что

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \left|\frac{dr}{dt}\right|.$$

Формула (16.11) доказана.

Если теперь $\sigma = \sigma(t)$ — переменная длина дуги, отсчитываемая от конца $r(b)$ кривой Γ, то, очевидно, $\sigma = S_\Gamma - s$, откуда $\dfrac{d\sigma}{ds} = -1$. В силу этого формула (16.12) сразу следует из формулы (16.11):

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{ds}\,\frac{ds}{dt} = -\left|\frac{dr}{dt}\right|.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если параметром на кривой является переменная длина дуги* s, *то*

$$\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1. \tag{16.14}$$

Это сразу следует из формулы $\left|\dfrac{dr}{dt}\right| = \dfrac{ds}{dt}$ при $t = s$.

Следствие 2. *Для всякой непрерывно дифференцируемой кривой* Γ *без особых точек, т. е. для всякой гладкой кривой, существует ее представление* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, *в котором за параметр* s *взята переменная длина дуги кривой* Γ.

Доказательство. Пусть непрерывно дифференцируемая кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ не имеет особых точек, т. е. $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ для всех $t \in [a, b]$. В этом случае переменная длина дуги $s = s(t)$ является строго монотонно возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией, ибо $\dfrac{ds}{dt} = |\boldsymbol{r}'| > 0$ во всех точках $[a, b]$. Поэтому существует обратная функция $t = t(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma$, которая также строго монотонно возрастает и имеет непрерывную не обращающуюся в ноль производную на отрезке $[0, S_\Gamma]$, т. е. функция $t = t(s)$ является допустимым преобразованием параметра для непрерывно диффе-

ренцируемых кривых без особых точек и представление $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(l(s))$ является искомым представлением, в котором роль параметра играет переменная длина дуги.

Замечание. Формула (16.14) имеет простой геометрический смысл: $|\Delta \boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)|$ равно длине хорды, соединяющей точки $\boldsymbol{r}(t)$ и $\boldsymbol{r}(t + \Delta t)$, а $|\Delta s| = |s(t + \Delta t) - s(t)|$ — длине дуги между этими точками (рис. 53), и так как

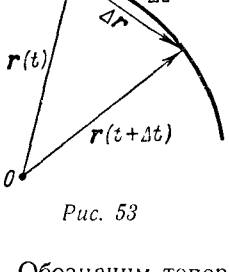


Рис. 53

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}\right|,$$

а условия $\Delta s \to 0$ и $\Delta t \to 0$ равносильны, то

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}\right| = 1,$$

что означает, что предел отношения длины дуги к длине стягивающей ее хорды равен единице, когда дуга стягивается в точку.

Обозначим теперь через α, β и γ углы, образованные вектором $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ или, что то же, касательной к кривой $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(s)\}$ соответственно с осями Ox, Oy и Oz. Тогда из равенства $\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = 1$, очевидно, следует, что проекции вектора $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ на оси координат равны соответственно $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$, т. е.

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma). \tag{16.15}$$

С другой стороны, для вектор-функции $\boldsymbol{r}(s) = (x(s),\ y(s),\ z(s))$, как для всякой вектор-функции (см. п. 15.2), имеем

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}\right). \tag{16.16}$$

Сравнивая (16.15) и (16.16), получим

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma. \tag{16.17}$$

В качестве примера рассмотрим кривую, называемую *винтовой линией*. Эта кривая задается представлением

$$x = a\cos t,$$
$$y = a\sin t,$$
$$z = bt,$$
$$a^2 + b^2 \neq 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Очевидно, что винтовая линия является бесконечно дифференцируемой кривой, и так как

$$x'^2+y'^2+z'^2=a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2=$$
$$=a^2+b^2\neq 0,$$

то она не имеет особых точек (рис. 54). Следовательно, переменную длину ее дуги можно принять за параметр. Найдем соответствующее представление.

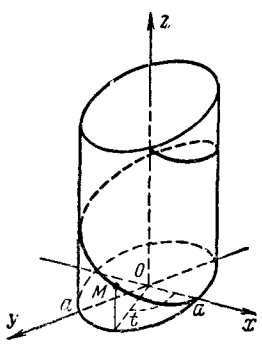


Рис. 54

Согласно формуле (16.11), имеем

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Отсюда

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

и, следовательно, $t=\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Поэтому искомое представление имеет вид

$$x(s)=a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y(s)=a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad z(s)=\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$0\leqslant s\leqslant T\sqrt{a^2+b^2}.$$

Упражнение 4. Доказать, что для спрямляемой кривой без точек самопересечения переменная длина дуги является непрерывной строго монотонной функцией параметра t.

16.4. Плоские кривые

Пусть $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$ — непрерывно дифференцируемая плоская кривая, лежащая в плоскости xOy:

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t)),$$

и пусть $s=s(t)$ — переменная длина дуги кривой Γ; для ее производной из формул (16.11) и (16.12) получаем

$$\frac{ds}{dt}=\pm\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2},\qquad(16.18)$$

где знак «+» берется, если длина дуги $s(t)$ отсчитывается от начальной точки $r(a)$ кривой, и знак «—», если от конечной точки $r(b)$.

Из формулы (16.18) для дифференциала дуги получаем выражение

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{16.19}$$

В случае, если кривая Γ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, формула (16.18) превращается в формулу

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1 + y'^2},$$

и, значит,

$$ds = \pm\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Рассмотрим геометрический смысл формулы (16.19) в случае, когда Γ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и длина дуги кривой отсчитывается от начальной точки кривой (рис. 55). Пусть $x_0 \in [a, b]$, $x_0 + dx \in [a, b]$, $y_0 = f(x_0)$, $M_0 = (x_0, y_0)$, $y_0 + \Delta y = f(x_0 + dx)$, $M = (x_0 + dx, y_0 + \Delta y)$, M_0N — касательная в точке M_0, PM — приращение функции в точке $x_0 + dx$, PN — приращение ординаты касательной в точке $x_0 + dx$. Треугольник M_0NP прямоугольный; очевидно $M_0P = dx$, $PN = dy$, поэтому

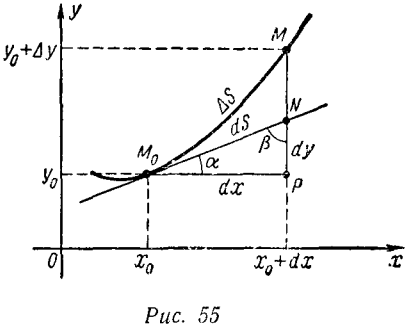


Рис. 55

$$M_0N^2 = M_0P^2 + PN^2 = dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

т. е. длина отрезка касательной M_0N равна ds. Иначе говоря, получим главную часть приращения длины дуги M_0M, если заменим ее приращением длины касательной в точке M_0.

Любопытно отметить, что получается правильная формула (16.19), если, совершая некоторые ошибки, применить к «криволинейному прямоугольному треугольнику» M_0MP теорему Пифагора: $M_0M^2 = M_0P^2 + PM^2$, считая при этом, что его «сторона M_0M» равна ds, а не Δs, как на самом деле, а сторона PM равна dy, а не ее истинному значению Δy. В данном случае одни ошибки компенсируют другие и в результате получается правильный результат.

Если теперь на кривой Γ в качестве параметра взята переменная длина дуги s: $\Gamma = \{r(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma\}$, то, согласно (16.17),

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta = \sin\alpha,\quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \tag{16.20}$$

где (рис. 56) α — угол, образованный касательной с осью Ox, а β — с осью Oy.

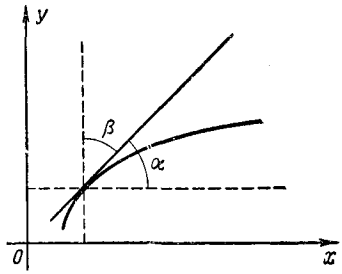


Рис. 56

Отметим, что эти формулы могут быть получены применением к «криволинейному прямоугольнику» M_0MP (см. рис. 55) формул, выражающих синус и косинус углов обычного прямоугольного треугольника через его катеты и гипотенузу, считая, как и выше, стороны указанного «треугольника» M_0MP равными соответственно dx, dy, ds. Подобное обстоятельство имеет место и для пространственных формул (16.17). Такой метод получения формул (16.17) и (16.20) является, конечно, необоснованным, однако он облегчает их запоминание.

16.5. Физический смысл производной вектор-функции

Пусть теперь годограф Γ непрерывно дифференцируемой вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ есть траектория движущейся материальной точки, а параметр t — время движения. Обозначим переменную длину дуги, отсчитываемую от некоторой начальной точки $r(t_0)$, через $s = s(t)$. Пусть $t > t_0$; полагая $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$, согласно (16.11), получим

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

т. е. длина вектора $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ совпадает с величиной скорости в рассматриваемой точке (см. п. 9.4); сам же вектор $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, как мы знаем (см. п. 16.2), направлен по касательной. Вектор $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ называется в этом случае *скоростью движения* в данной точке и обозначается $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

§ 17. КРИВИЗНА КРИВОЙ

17.1. Две леммы. Радиальная и трансверсальная составляющие скорости

Лемма 1. *Пусть вектор-функция* $\boldsymbol{r}(t)$, *определенная на отрезке* $[a, b]$, *в точке* $t_0 \in [a, b]$ *имеет производную* $\boldsymbol{r}'(t_0)$. *Тогда, если длина вектора* $\boldsymbol{r}(t)$ *постоянна на* $[a, b]$, *т. е.* $|\boldsymbol{r}(t)| = c$ *для всех* $t \in [a, b]$, *то вектор* $\boldsymbol{r}'(t_0)$ *ортогонален вектору* $\boldsymbol{r}(t_0)$, *т. е.*

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\,\boldsymbol{r}(t_0) = 0. \tag{17.1}$$

Доказательство. По условию $|\boldsymbol{r}(t)|^2 = c^2$, отсюда и $\boldsymbol{r}^2(t) = c^2$ для всех $t \in [a, b]$. Вычисляя производную функции $\boldsymbol{r}^2(t)$ в точке t_0, получим (см. п. 15.2)

$$2\boldsymbol{r}(t_0)\,\boldsymbol{r}'(t_0) = 0,$$

откуда и следует (17.1)

Лемма доказана.

Физическая интерпретация этой леммы состоит в том, что у материальной точки, движущейся так, что она все время остается на поверхности сферы, ее скорость направлена по касательной к этой сфере и, следовательно, перпендикулярна радиус-вектору.

Пусть теперь вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ определена на отрезке $[a, b]$, $t_0 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t \leqslant [a, b]$ и $\Delta\varphi$ — угол между векторами $\boldsymbol{r}(t)$ и $\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t)$. Будем считать, что $\Delta\varphi \geqslant 0$ при $\Delta t > 0$ и $\Delta\varphi \leqslant 0$ при $\Delta t < 0$. Таким образом, всегда $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} \geqslant 0$.

Определение 1. *Предел* $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, *если он существует, называется скоростью вращения вектор-функции* $\boldsymbol{r}(t)$ *в точке* t_0 *и обозначается* $\omega(t_0, \boldsymbol{r})$.

Лемма 2. *Пусть вектор-функция* $\boldsymbol{r}(t)$ *определена на отрезке* $[a, b]$ *и пусть* $|\boldsymbol{r}(t)| = 1$ *для всех* $t \in [a, b]$. *Тогда, если в точке* $t_0 \in [a, b]$ *существует производная* $\boldsymbol{r}'(t_0)$, *то в этой точке существует и скорость вращения* $\omega = \omega(t_0, \boldsymbol{r})$ *рассматриваемой вектор-функции и*

$$\omega = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right|.$$

Доказательство. Пусть $t_0 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t_k \in [a, b]$, $\Delta t_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k \to \infty} \Delta t_k = 0$ и пусть $\Delta\varphi_k$ — угол между векторами $\boldsymbol{r}(t_0)$ и $\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t_k)$. Последовательность $\{\Delta t_k\}$ разобьем на две части (одна из которых может оказаться пустой), отнеся к первой из них все такие $\Delta t_k'$, для которых $\Delta\varphi_k' = 0$, а ко второй все остальные, т. е. такие $\Delta t_k''$, для которых $\Delta\varphi_k'' \neq 0$. Перенумеровав элементы этих частей в порядке возрастания их индексов в последователь-

ности $\{\Delta t_k\}$, получим, вообще говоря, две последовательности $\{\Delta t_k'\}$ и $\{\Delta t_k''\}$. Если хоть одна из указанных частей содержит лишь конечное число элементов, то ее исключим из дальнейшего рассмотрения.

Для последовательности $\{\Delta t_k'\}$ из условия $\Delta\varphi_k' = 0$ следует, во-первых, что $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\Delta\varphi_k'}{\Delta t_k'} = 0$, а во-вторых, при условии $|\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t_k')| = |\boldsymbol{r}(t_0)|$, что $\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t_k') = \boldsymbol{r}(t_0)$. Отсюда в свою очередь имеем

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t_k') - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t_k'} = 0.$$

Итак,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Delta\varphi_k'}{\Delta t_k'} = |\boldsymbol{r}'(t_0)|. \tag{17.2}$$

Рассмотрим теперь последовательность $\{\Delta t_k''\}$. Поскольку $|\boldsymbol{r}(t_0)| = |\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t_k'')| = 1$, то

$$|\boldsymbol{r}(t_0) \times \boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t_k'')| = |\boldsymbol{r}(t_0)|\,|\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t_k'')|\,|\sin \Delta\varphi_k''| = |\sin \Delta\varphi_k''|.$$

В силу непрерывности функции $\boldsymbol{r}(t)$ имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta\varphi_k'' = 0$. Используя это, получим

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Delta\varphi_k''}{\Delta t_k''} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\Delta\varphi_k''}{\Delta t_k''}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\Delta\varphi_k''}{\sin \Delta\varphi_k''}\right| \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\sin \Delta\varphi_k''}{\Delta t_k''}\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{|\boldsymbol{r}(t_0) \times \boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t_k'')|}{|\Delta t_k''|}. \tag{17.3}$$

Но $\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) = \boldsymbol{r}(t_0) + \boldsymbol{r}'(t_0)\,\Delta t + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\,\Delta t$, где $\lim\limits_{\Delta t\to 0} |\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)| = 0$. Подставляя это выражение в (17.3) и замечая, что $\boldsymbol{r}(t_0) \times \boldsymbol{r}(t_0) = 0$ и что $\lim\limits_{\Delta t\to 0} |\boldsymbol{r}(t_0) \times \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)| = 0$, получим

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Delta\varphi_k''}{\Delta t_k''} = |\boldsymbol{r}(t_0) \times \boldsymbol{r}'(t_0)| = |\boldsymbol{r}(t_0)|\,|\boldsymbol{r}'(t_0)| \sin(\widehat{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}).$$

В силу леммы 1, $\boldsymbol{r}(t_0)\,\boldsymbol{r}'(t_0) = |\boldsymbol{r}(t_0)|\,|\boldsymbol{r}'(t_0)| \cos \widehat{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'} = 0$, поскольку $|\boldsymbol{r}(t_0)| = 1$, то либо $\boldsymbol{r}'(t_0) = 0$, либо угол $\widehat{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}$ между векторами $\boldsymbol{r}(t_0)$ и $\boldsymbol{r}'(t_0)$ равен $\dfrac{\pi}{2}$; в обоих случаях $|\boldsymbol{r}(t_0) \times \boldsymbol{r}'(t_0)| = |\boldsymbol{r}'(t_0)|$.

Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Delta\varphi_k}{\Delta t_k}=|\boldsymbol{r}'(t_0)|. \tag{17.4}$$

Из (17.2) и (17.4) для всей исходной последовательности $\{\Delta t_k\}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t_k}=|\boldsymbol{r}'(t_0)|,$$

и так как последовательность $\{\Delta t_k\}$ была произвольная, то

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=|\boldsymbol{r}'(t_0)|.$$

Лемма доказана.

Замечание. Используя лемму 1, можно легко получить разложение производной вектор-функции на две ортогональные составляющие: в направлении вектора $\boldsymbol{r}(t)$ (*радиальная составляющая*) и в перпендикулярном направлении (*трансверсальная составляющая*).

Пусть вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0, $\boldsymbol{r}(t)\neq 0$, и существует производная $\boldsymbol{r}'(t_0)$. Положим $\boldsymbol{r}_0(t)=\dfrac{\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{r}(t)|}$, очевидно, $|\boldsymbol{r}_0(t)|\equiv 1$. В точке t_0 существует производная

$$\frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}=\frac{d}{dt}\sqrt{\boldsymbol{r}^2}=\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}|}=\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}',$$

а значит, в точке t_0 существует и производная $\dfrac{d\boldsymbol{r}_0}{dt}$, которая, согласно лемме 1, ортогональна вектору $\boldsymbol{r}_0(t_0)$, а значит, и вектору $\boldsymbol{r}(t_0)$.

Дифференцируя равенство $\boldsymbol{r}(t)=|\boldsymbol{r}(t)|\,\boldsymbol{r}_0(t)$ в точке t_0, получим

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}\boldsymbol{r}_0+|\boldsymbol{r}|\frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt}=(\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}_0+|\boldsymbol{r}|\frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt}. \tag{17.5}$$

Это и есть искомое разложение.

В случае, если годограф вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ является траекторией движущейся материальной точки, то формула (17.5) дает разложение ее скорости на составляющую поступательного движения (радиальная составляющая) и составляющую вращательного движения (трансверсальная составляющая).

17.2. Определение кривизны кривой и ее вычисление

Пусть $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ — дифференцируемая спрямляемая кривая, s — переменная длина дуги, $0 \leqslant s_0 \leqslant S$ и $\Delta s = s - s_0$.

Определение 2. *Пусть $\Delta\alpha$ — угол между касательными кривой Γ в точках $r(s_0)$ и $r(s_0 + \Delta s)$. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$, то он называется кривизной кривой Γ в точке $r(t_0)$ и обозначается $k = k(t_0)$:*

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.$$

Пусть теперь $\boldsymbol{t} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$. Вектор $\boldsymbol{t}$ является единичным вектором, направленным по касательной (см. п. 16.3). Согласно определению, кривизна есть скорость вращения (см. п. 17.1) вектор-функции $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(s)$:

$$k = \omega(s_0, \boldsymbol{t}).$$

В силу леммы 2 п. 17.1 отсюда получаем

$$k = \left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right|. \tag{17.6}$$

Определение 3. *Величина, обратная к кривизне, называется радиусом кривизны в данной точке и обозначается R, так что $R = \dfrac{1}{k}$.*

Пусть Γ — окружность радиуса R. В этом случае угол $\Delta\alpha$ между касательным равен углу, образованному радиусами точек касания (рис. 57), а $\Delta s = R\Delta\alpha$. Поэтому $\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \dfrac{1}{R}$.

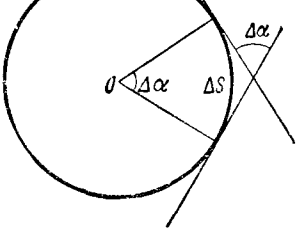


Рис. 57

По определению же кривизны для окружности имеем

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R}.$$

Таким образом, в случае окружности ее кривизна k постоянна (не зависит от точки) и равна обратной величине радиуса; радиус же кривизны окружности равен ее радиусу. Отсюда и произошел термин «радиус кривизны».

Достаточные условия существования кривизны в данной точке и метод ее вычисления даются следующей **теоремой.**

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ *— дважды дифференцируемая кривая без особых точек. Тогда в каждой ее точке существует кривизна и*

$$k = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}. \tag{17.7}$$

Доказательство. Существование кривизны при предположениях теоремы следует из формулы (17.6). Покажем, что и формула (17.7) следует из формулы (17.6).

Действительно, в силу того, что $|t| = 1$, векторы t и $\frac{dt}{ds}$ ортогональны (см. лемму 1 п. 17.1), поэтому либо угол между t и $\frac{dt}{ds}$ равен $\frac{\pi}{2}$, либо $\frac{dt}{ds} = 0$. В обоих случаях из (17.6) имеем

$$k = \left|\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{dt}{ds}\right| \cdot |t| \sin \widehat{t\,\frac{dt}{ds}} = \left|\frac{dt}{ds} \times t\right|. \tag{17.8}$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$t = \frac{dr}{ds} = r' \frac{dt}{ds} = \frac{r'}{s'}. \tag{17.9}$$

Штрихом здесь и в дальнейшем обозначаются производные по параметру t.

Дифференцируя еще раз, имеем

$$\frac{dt}{ds} = \frac{t'}{s'} = \left(\frac{r'}{s'}\right)' \frac{1}{s'} = \frac{s'r'' - s''r'}{s'^3}. \tag{17.10}$$

Подставим теперь полученные выражения для t и $\frac{dt}{ds}$ в (17.8), получим

$$k = \left|\frac{dt}{ds} \times t\right| = \left|\frac{s'r'' - s''r'}{s'^3} \times \frac{r'}{s'}\right| = \left|\frac{r'' \times r'}{s'^3}\right| = \frac{|r'' \times r'|}{|r'|^3}.$$

Теорема доказана.

От формулы (17.7) легко перейти к выражению для кривизны в координатной записи, замечая, что $r' = (x', y', z')$, $r'' = (x'', y'', z'')$ и что

$$r' \times r'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

(где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы соответственно в направлении осей Ox, Oy, Oz), получим

$$|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|=\sqrt{(y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2+(x'y''-x''y')^2}, \quad (17.11)$$

с другой стороны,

$$|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}; \quad (17.12)$$

подставляя (17.11) и (17.12) в (17.7), мы и получим искомое выражение.

17.3. Главная нормаль. Соприкасающаяся плоскость

Обозначим через $\boldsymbol{n}$ единичный вектор в направлении вектора $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$, где $\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ — единичный касательный вектор к рассматриваемой кривой. Из формулы (17.6) следует, что вектор $\boldsymbol{n}$ определен лишь для тех точек, в которых кривизна $k\neq 0$, и что в этих точках

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=k\boldsymbol{n}. \quad (17.13)$$

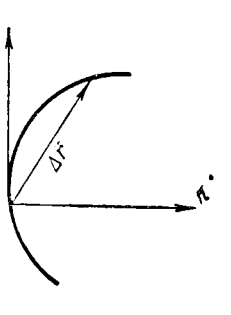


Рис. 58

Вектор $\boldsymbol{t}$ — единичный, поэтому вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен (см. п. 17.1) вектору $\boldsymbol{t}$. Формула (17.13) называется *формулой Френе**).

Определение 4. *Всякая прямая, проходящая через точку кривой и перпендикулярная к касательной в этой точке, называется нормалью к кривой в данной точке. Нормаль к кривой, параллельная вектору $\boldsymbol{n}$, называется главной нормалью.*

Вектор главной нормали $\boldsymbol{n}$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δs^2, указывает направление, в котором кривая в окрестности данной точки отклоняется от своей касательной (рис. 58). Действительно, выбирая на кривой в качестве параметра переменную длину дуги s, согласно формуле Тейлора для вектор-функции (см. п. 15.2), будем иметь

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)=\frac{d\boldsymbol{r}(s_0)}{ds}\Delta s+\frac{1}{2}\frac{d^2\boldsymbol{r}(s_0)}{ds^2}\Delta s^2+\boldsymbol{o}(\Delta s^2),$$

или, замечая, что

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{t}, \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=k\boldsymbol{n}, \quad (17.14)$$

*) Ж. Френе (1801—1880) — французский математик.

получим

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta s\, \boldsymbol{t} + \frac{1}{2} k \Delta s^2 \boldsymbol{n} + \boldsymbol{o}(\Delta s^2),$$

что и доказывает справедливость нашего утверждения.

Определение 5. *Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль в данной точке кривой, называется соприкасающейся плоскостью.*

В силу этого определения соприкасающаяся плоскость определена для точек, в которых $k \neq 0$. Найдем уравнение этой плоскости для кривой, заданной представлением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ с произвольным параметром t. Как и выше, производные по переменному t будем обозначать штрихом, а производные по длине дуги s — символом $\frac{d}{ds}$.

Дифференцируя $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ как сложную функцию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, $s = s(t)$, получим (см. (17.14))

$$\boldsymbol{r}' = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} s' = s'\boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{r}'' = s'^2 \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} + s''\boldsymbol{t} = s'^2 k\boldsymbol{n} + s''\boldsymbol{t}. \qquad (17.15)$$

(Эти формулы, очевидно, обращают формулы (17.9) и (17.10) и могут быть получены также и из них.)

Отсюда следует, что векторы $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ также параллельны соприкасающейся плоскости; в силу же условия $k \neq 0$ выполняется неравенство $\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' \neq 0$ (см. (17.7)), и, значит, $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ не коллинеарны. Обозначим теперь через $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}'_0$ и $\boldsymbol{r}''_0$ векторы $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ в некоторой фиксированной точке данной кривой Γ, а через $\boldsymbol{r}$ обозначим текущий вектор соприкасающейся плоскости, тогда смешанное произведение векторов $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}'_0$ и $\boldsymbol{r}''_0$ должно быть равно нулю, так как все они параллельны соприкасающейся плоскости

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \ \boldsymbol{r}'_0, \ \boldsymbol{r}''_0) = 0.$$

Это и есть уравнение указанной плоскости в векторном виде. В координатном виде оно запишется так:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0,$$

где $\boldsymbol{r}'_0 = (x'_0, \ y'_0, \ z'_0)$, $\boldsymbol{r}'' = (x''_0, \ y''_0, \ z_0)$.

В случае, если в данной точке $k = 0$, то любая плоскость, проходящая через касательную в этой точке, называется соприкасающейся.

17.4. Центр кривизны и эволюта кривой

Определение 6. *Точка пространства, лежащая на главной нормали к кривой в данной точке и находящаяся от этой точки на расстоянии R в направлении вектора $\boldsymbol{n}$, называется центром кривизны кривой в указанной ее точке.*

Таким образом, если $\boldsymbol{\rho}$ является радиус-вектором центра кривизны, а $\boldsymbol{r}$, как обычно, радиус-вектор данной точки кривой, то

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + R\boldsymbol{n},$$

или, что то же (см. (17.14)),

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + \frac{1}{k^2}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}. \tag{17.16}$$

Найдем выражение $\boldsymbol{\rho}$ через производные вектор-функции $\boldsymbol{r}$ по произвольному параметру t. Подставляя выражение для $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{dt}{ds}$ из (17.10) в (17.16), получим

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + \frac{1}{k^2}\frac{s'\boldsymbol{r}'' - s''\boldsymbol{r}'}{s'^3}, \tag{17.17}$$

где $s' = |\boldsymbol{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, откуда

$$s'' = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Определение 7. *Геометрическое место центров кривизны кривой называется ее эволютой.*

Очевидно, что формула (17.16), а также (17.17) дает представление эволюты данной кривой.

Отметим, что центр кривизны всегда лежит в соприкасающейся плоскости.

17.5. Формулы для кривизны и эволюты плоских кривых

Все сказанное в предыдущем пункте, в частности, справедливо и для плоских кривых.

Заметим лишь, что если кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t)\}$ лежит в некоторой плоскости, то все производные вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ также лежат в этой плоскости. В самом деле, $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$, значит, и $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ лежит в той же плоскости, отсюда легко следует, что и $\boldsymbol{r}' = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$

лежит в указанной плоскости. Применяя то же рассуждение к $\boldsymbol{r}'$, мы докажем, что и $\boldsymbol{r}''$ находится в той же плоскости, и т. д.

Из сказанного следует, что если кривая лежит в некоторой плоскости, то касательный вектор $\boldsymbol{t}$, а если ее кривизна $k \neq 0$, то и вектор главной нормали $\boldsymbol{n}$ лежит в той же плоскости, и, значит, эта плоскость является соприкасающейся плоскостью для кривой.

Отметим также, что если в случае кривой $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(s)\}$, лежащей в плоскости xOy, через $\alpha(s)$ обозначить угол, образованный касательной в точке $\boldsymbol{r}(s)$ с осью Ox (см. рис. 59), то $\Delta\alpha = \alpha(s_0 + \Delta s) - \alpha(s_0)$, и если угол α возрастает вместе с s, т. е. если $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \geqslant 0$ при $\Delta s > 0$, то $k = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$; если же α убывает с возрастанием s, то

$$k = -\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = -\frac{d\alpha}{ds}.$$

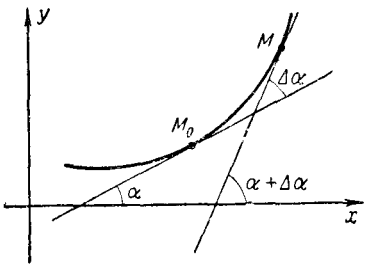


Рис. 59

Выпишем некоторые из формул, полученных в предыдущем пункте, считая, что кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ лежит в плоскости xOy: $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$. Из формул (17.7), (17.11) и (17.12) получим

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{17.18}$$

Обозначая (ξ, η) центр кривизны кривой Γ, из формулы (17.16) имеем

$$\xi = x + R^2 \frac{d^2x}{ds^2},$$

$$\eta = y + R^2 \frac{d^2y}{ds^2},$$

а из формул (17.17) и (17.18) будем иметь

$$\xi = x + \frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(x'y'' - x''y')^2} \cdot \frac{x''\sqrt{x'^2 + y'^2} - x' \dfrac{x'x'' + y'y''}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}. \tag{17.19}$$

Аналогично

$$\eta = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}. \tag{17.20}$$

Упражнение 1. Пусть Γ — дважды дифференцируемая плоская кривая без особых точек, пусть α — угол наклона ее касательной к оси Ox и пусть $k^* = \frac{d\alpha}{ds}$ (значит, $|k^*| = k$) и $R^* = \frac{1}{k^*}$. Показать, что

$$\xi = x - R^* \sin\alpha,$$
$$\eta = y + R^* \cos\alpha,$$

а также

$$\xi = x - \frac{dy}{d\alpha},$$
$$\eta = y + \frac{dx}{d\alpha}.$$

В случае, когда кривая является графиком функции $y = f(x)$, формулы (17.18), (17.19) и (17.20) принимают вид

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{17.21}$$

$$\xi = x - \frac{1+y'^2}{y''}y', \qquad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \tag{17.22}$$

Примеры. 1. Найдем кривизну и эволюту параболы $y = ax^2$, $a > 0$.

Замечая, что $y' = 2ax$, $y'' = 2a$, по формуле (17.21) имеем

$$k = \frac{2a}{1+4a^2x^2}.$$

Чтобы найти уравнение эволюты, воспользуемся формулами (17.22):

$$\xi = x - \frac{1+4a^2x^2}{2a}2ax = -4a^2x^3,$$
$$\eta = ax^2 + \frac{1+4a^2x^2}{2a} = \frac{6a^2x^2+1}{2a}.$$

Мы получили параметрическое представление эволюты параболы с параметром x. Можно получить и ее явное представление, исключив этот параметр x. Для этого из первого равенства найдем $x^3 = -\frac{\xi}{4a^2}$, а из второго $x^2 = \frac{2a\eta - 1}{6a^2}$. Возводя первое получившееся

равенство в квадрат, а второе в куб и приравнивая правые части, получим

$$\left(\frac{\xi}{4a^2}\right)^2 = \left(\frac{2a\eta - 1}{6a^2}\right)^3,$$

откуда

$$\xi = \pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\left(\eta - \frac{1}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Эта кривая называется *полукубической параболой* (рис. 60).

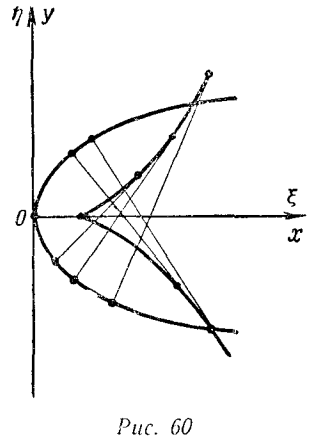


Рис. 60

2. Найдем радиус кривизны и эволюту эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $a \geqslant b > 0$.

Замечая, что $x' = -a\sin t$, $y' = b\cos t$, $x'' = -a\cos t$, $y'' = -b\sin t$, по формуле (17.18) получим

$$R = \frac{1}{k} = \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t} = \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}.$$

Уравнение эволюты получаем из формул (17.19) и (17.20):

$$\xi = a\cos t - b\cos t\,\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta = b\sin t - a\sin t\,\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t.$$

Это — параметрическое представление искомой эволюты; параметр t можно исключить, возводя получившиеся равенства в степень $\frac{2}{3}$ и складывая их:

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Эта кривая называется *астроидой* (рис. 61).

Иногда для изображения кривой бывает удобно использовать так называемые полярные координаты (ρ, φ), $\rho \geqslant 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, где ρ — длина радиус-вектора данной точки M, а φ — угол, образованный этим радиус-вектором с осью Ox. Таким образом, каждой точке плоскости, кроме начала координат, взаимно однозначно соответствует указанная упорядоченная пара (ρ, φ); для начала же координат имеем $\rho = 0$, а угол φ не определен (рис. 62).

Если $M = (x, y)$, где, как обычно x и y — декартовы координаты точки M, то

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \tag{17.23}$$

Обратная связь выражается формулами

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi, \tag{17.24}$$

где $k = 0$, если $x \geqslant 0$, $k = 1$, если $x < 0$, $y > 0$ и $k = -1$, если $x < 0$, $y < 0$.

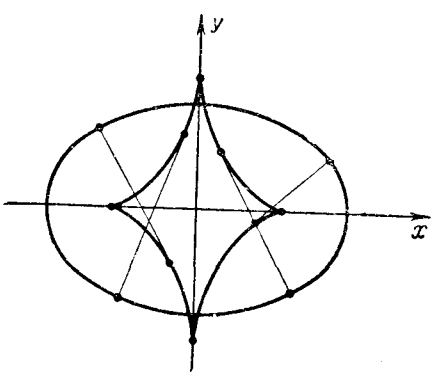


Рис. 61

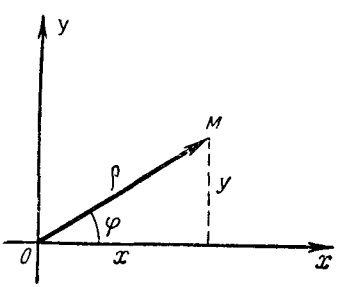


Рис. 62

Иногда на угол φ не накладывают ограничения $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, а обозначают через φ любой угол, для которого $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$. В этом случае соответствие между упорядоченными парами (ρ, φ), $\rho \neq 0$, и точками плоскости, исключая начало координат, уже, очевидно, не является взаимно однозначным.

Если задана непрерывная функция

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \tag{17.25}$$

то, подставляя ее в (17.23), получим

$$\begin{aligned} x &= \rho(\varphi) \cos \varphi, \\ y &= \rho(\varphi) \sin \varphi, \end{aligned} \tag{17.26}$$

т. е. получим параметрическое представление некоторой кривой Γ. В этом смысле можно говорить, что уравнение (17.25) задает в полярных координатах кривую Γ. Для вычисления кривизны, радиуса кривизны и эволюты кривой Γ, заданной уравнением (17.25), надо перейти к ее параметрическому представлению (17.26) и воспользоваться выведенными выше формулами.

Упражнения. 2. Пусть в полярных координатах задана кривая $\rho = \rho(\varphi)$, пусть α — угол наклона ее касательной к оси Ox, а ω — угол, образованный этой касательной с продолжением радиуса вектора точки касания, тогда $\alpha = \omega + \varphi$ и $\operatorname{tg}\omega = \frac{\rho}{\rho'}$.

3. Найти эволюту кривой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, называемой *кардиоидой*.

Указание. Полезно воспользоваться результатами упражнений 1 и 2.

Задача 9. Пусть Γ — дважды дифференцируемая кривая без особых точек, $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ и пусть $t_0 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t_1 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t_2 \in [a, b]$. Проведем через точки $r(t_0)$, $r(t_0 + \Delta t_1)$ и $r(t_0 + \Delta t_2)$ плоскость; тогда при $\Delta t_1 \to 0$ и $\Delta t_2 \to 0$ эта плоскость будет стремиться (определите это понятие) к соприкасающейся плоскости в точке $r(t_0)$.

Задача 10. В предположении предыдущей задачи проведем через те же три точки $r(t_0)$, $r(t_0 + \Delta t_1)$ и $r(t_0 + \Delta t_2)$ окружность; тогда, если кривизна $k \neq 0$ в точке $r(t_0)$, то эта окружность при $\Delta t_1 \to 0$ и $\Delta t_2 \to 0$ будет стремиться к окружности (определите это понятие), лежащей в соприкасающейся плоскости с центром в центре кривизны кривой и радиусом, равным радиусу кривизны в точке $r(t_0)$.

Эта предельная окружность называется *соприкасающейся окружностью* в данной точке кривой.

ГЛАВА
ВТОРАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 18. МНОЖЕСТВА НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Прежде чем перейти к изучению функций многих переменных, изучим некоторые свойства множеств, на которых эти функции задаются.

18.1. Окрестности и пределы последовательностей точек

Мы будем предполагать, что на рассматриваемой нами плоскости или в пространстве всегда фиксирована некоторая прямоугольная система декартовых координат. Точки будем большей частью обозначать буквами x, y, z,...*), а их координаты — теми же буквами с индексами, т. е. в случае плоскости $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$, а в случае пространства $x=(x_1, x_2, x_3)$, $y=(y_1, y_2, y_3)$. Расстояние между точками x и y будем обозначать символом $\rho(x, y)$. Как известно, формула для расстояния между точками x и y в случае плоскости имеет вид

$$\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},$$

а в случае пространства

$$\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}.$$

В дальнейшем придется иметь дело не только с функциями двух и трех переменных, но и с функциями большего числа переменных, поэтому полезно ввести понятие n-мерного пространства.

Определение 1. *Точкой x n-мерного пространства называется упорядоченная совокупность n вещественных чисел*

$$(x_1, \ldots, x_n)=x$$

*) Иногда точки обозначаются и большими буквами M, N, P и т. п.

или, короче, $x=(x_i)$. *Число* $x_i\,(i=1, 2, \ldots, n)$ *называется* i*-координатой точки* x.

Расстояние между двумя точками $x=(x_i)$ и $y=(y_i)$ определим по формуле

$$\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^n}. \qquad (18.1)$$

Определение 2. *Совокупность точек* n*-мерного пространства, для которых определено расстояние согласно формуле* (18.1), *называется* n*-мерным евклидовым пространством и обозначается* E^n *или* E^n_x.

В случае $n=1$ получается прямая, в случае $n=2$ — плоскость, а в случае $n=3$ — пространство с обычным расстоянием между точками. В случае произвольного $n>3$ не следует искать в нашем определении какого-то скрытого физического или геометрического смысла. Нашей целью является лишь построение некоторого математического аппарата, удобного для изучения функций многих переменных; определения и терминологию мы заимствуем из обычной геометрии, так как это позволяет включить прямую, плоскость и трехмерное пространство в одну более общую схему.

Расстояние между точками в n-мерном евклидовом пространстве E^n обладает следующими свойствами.

1. $\rho(x, y)\geqslant 0$, *причем* $\rho(x, y)=0$ *в том и только том случае, если* $x=y$.

2. $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ *для любых двух точек* x *и* y *из* E^n.

3. $\rho(x, z)\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z)$ *для любых трех точек* x, y *и* z *из* E^n.

Свойства 1 и 2 сразу следуют из формулы (18.1); третье же, обычно называемое «*неравенством треугольника*» и хорошо известное для обычного трехмерного пространства, в общем случае ($n>3$) требует доказательства.

Докажем предварительно лемму.

Лемма 1. (Коши — Шварц*). *Для любых вещественных чисел* a_k *и* b_k, $k=1, 2, \ldots, n$, *выполняются неравенства*

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}. \qquad (18.2)$$

Следствие.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_k+b_k)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}. \qquad (18.3)$$

---

*) Г. Шварц (1843—1921) — немецкий математик.

Доказательство. Рассмотрим квадратичную функцию (многочлен второй степени)

$$F(t)=\sum_{i=1}^{n}(a_it+b_i)^2=t^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2t\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2. \qquad (18.4)$$

Очевидно,

$$F(t)\geqslant 0. \qquad (18.5)$$

Из условия (18.5) следует, что многочлен (18.4) имеет либо слившиеся вещественные корни, либо комплексные корни, и, значит, его дискриминант не положителен:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2\leqslant 0.$$

Перенося второе слагаемое в правую часть и извлекая квадратный корень, получим (18.2).

Лемма доказана.

Для доказательства неравенства (18.3) оценим сумму $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2$, применяя неравенство (18.2):

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}=$$

$$=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2.$$

Извлекая из обеих частей квадратный корень, получим (18.3).

Следствие леммы доказано.

Вернемся теперь к свойству 3 расстояния между точками в пространстве E^n.

Пусть $x=(x_i)$, $y=(y_i)$ и $z=(z_i)$.

Положим

$$a_i=x_i-y_i,\quad b_i=y_i-z_i,$$

и, значит,

$$a_i+b_i=x_i-z_i,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Тогда неравенство (18.3) перепишется следующим образом:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2},$$

или, согласно (18.1),

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

т. е. рассматриваемое свойство расстояния доказано.

В дальнейшем в этом параграфе пространство E^n будем считать фиксированным (т. е. считать фиксированным число n).

Определение 3. *Множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного евклидова пространства E^n, таких, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0$, называется i-й координатной осью ($i = 1, 2, \ldots, n$) этого пространства. Точка $O = (0, 0, \ldots, 0)$ называется началом координат.*

Очевидно, в случае $n = 2$ и $n = 3$ наше определение дает обычные координатные оси.

Замечание. Пусть на плоскости заданы две прямоугольные системы координат, точка M в одной системе координат имеет координаты (x, y), а в другой (ξ, η), т. е. $M = (x, y) = (\xi, \eta)$. Ставя в соответствие упорядоченной паре чисел (x, y) упорядоченную пару (ξ, η), получим взаимно однозначное соответствие между множеством всех упорядоченных пар (x, y) и множеством всех упорядоченных пар (ξ, η). При этом если $M' = (x', y') = (\xi', \eta')$, $M'' = (x'', y'') = (\xi'', \eta'')$, то

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} = \sqrt{(\xi'' - \xi')^2 + (\eta'' - \eta')^2}.$$

Этот пример делает естественным следующее определение.

Пусть каждой точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ подставлен в соответствие упорядоченный комплекс из n вещественных чисел $\xi(x) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ таким образом, что для любых двух точек $x' = (x_1', \ldots, x_n')$ и $x'' = (x_1'', \ldots, x_n'')$ и соответствующих им комплексов $\xi(x') = (\xi_1', \ldots, \xi_n')$ и $\xi(x'') = (\xi_1'', \ldots, \xi_n'')$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i'' - x_i')^2 = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i'' - \xi_i')^2.$$

Совокупность чисел $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ также называется *координатами* точки x («в другой системе координат»). Очевидно, что при любом выборе координат расстояние между точками не меняется. В дальнейшем, если не оговорено что-либо другое, система координат считается фиксированной.

Если точка x задается координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, то иногда для ясности пространство E_x^n будем обозначать $E_{x_1, \ldots, x_n}^n$.

Определение 4. *Пусть $x \in E^n$ и $\varepsilon > 0$. Совокупность всех точек y пространства E^n, таких, что $\rho(x, y) < \varepsilon$ называется n-мерным шаром с центром в точке x радиуса ε или ε-окрестностью*

(а иногда сферической окрестностью) точки x в пространстве E^n и обозначается $O(x;\ \varepsilon)$, таким образом,

$$O(x;\ \varepsilon)=\{y : y\in E^n,\ \rho\ (x,\ y)<\varepsilon\}. \qquad (18.6)$$

В координатной записи это определение выглядит так:

$$O(x;\ \varepsilon)=\left\{y=(y_i):\ \sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2<\varepsilon^2\right\},\quad x=(x_i),\ \varepsilon>0.$$

В случае прямой, т. е. при $n=1$ (рис. 63), $x=x_1$, $y=y_1$, поэтому

$$O(x;\ \varepsilon)=\{y : |y-x|<\varepsilon\}.$$

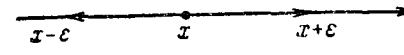


Рис. 63

Таким образом $O(x;\ \varepsilon)$ является интервалом длины 2ε с центром в точке x, т. е. окрестностью точки x в рассматриваемом выше смысле (см. п. 3.1).

В случае плоскости, т. е. при $n=2$ (рис. 64), $x=(x_1,\ x_2)$, $y=(y_1,\ y_2)$ и

$$O(x;\ \varepsilon)=\{y=(y_1,\ y_2):(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2<\varepsilon^2\},\quad \varepsilon>0,$$

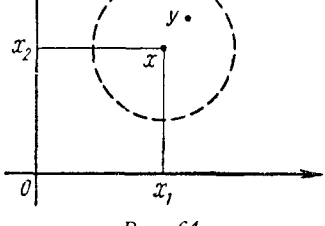


Рис. 64

т. е. $O(x;\ \varepsilon)$ — круг радиуса ε с центром в точке $x=(x_1,\ x_2)$, а в случае пространства, т. е. при $n=3$, окрестность точки $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$

$$O(x;\ \varepsilon)=\{y=(y_1,\ y_2,\ y_3):(y_1-x_1)^2+$$
$$+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2<\varepsilon^2\},\quad \varepsilon>0,$$

является шаром радиуса ε с центром в точке $(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

Мы обобщили, таким образом, понятие окрестности на случай n-мерного евклидова пространства E^n. Однако наряду с указанным обобщением бывает полезно и другое обобщение этого понятия, а именно — понятие так называемой прямоугольной окрестности.

Определение 5. *Пусть* $x=(x_i)\in E^n$, $\delta_i>0$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. *Множество*

$$P(x;\ \delta_1,\ \ldots,\ \delta_n)=$$
$$=\{y=(y_i):x_i-\delta_i<y_i<x_i+\delta_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\} \qquad (18.7)$$

называется n-мерным параллелепипедом, а точка x — его центром.

Если $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = \delta$, *то* $P(x;\ \delta,\ \delta,\ldots,\ \delta)$ *называется n-мерным кубом с центром в точке x и обозначается* $P(x;\ \delta)$.

Если $n = 1$, множество $P(x;\ \delta)$ является интервалом с центром в точке x длины 2δ; если $n = 2$, множество $P(x;\ \delta_1,\ \delta_2)$ является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат, и длины соответственно $2\delta_1$ и $2\delta_2$; при $n = 3$ множество $P(x;\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3)$ представляет собой прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат, соответственно длины $2\delta_1$, $2\delta_2$ и $2\delta_3$.

Под n-мерным параллелепипедом, соответственно n-мерным кубом понимается также множество, определенное вышеуказанными условиями хотя бы в одной системе координат (а не обязательно в данной, как это было сделано выше). В дальнейшем n-мерный параллелепипед и n-мерный куб понимаются лишь в узком смысле, т. е. в смысле данного выше определения при фиксированной системе координат.

Определение 6. *Всякий n-мерный параллелепипед* $P(x;\ \delta_1,\ldots,\ \delta_n)$ *называется прямоугольной окрестностью точки x.*

Лемма 2. *Какова бы ни была* ε*-окрестность* $O(x;\ \varepsilon)$ *точки* $x \in E^n$, *существует ее прямоугольная окрестность* $P(x;\ \delta_1,\ldots,\ \delta_n)$, *такая, что*

$$P(x;\ \delta_1,\ldots,\ \delta_n) \subset O(x;\ \varepsilon), \tag{18.8}$$

и наоборот, какова бы ни была прямоугольная окрестность $P(x;\ \delta_1,\ldots,\ \delta_n)$ *точки* $x \in E^n$, *существует ее* ε*-окрестность* $O(x;\ \varepsilon)$, *такая, что*

$$O(x;\ \varepsilon) \subset P(x;\ \delta_1,\ldots,\ \delta_n). \tag{18.9}$$

Доказательство. Пусть задана окрестность $O(x;\ \varepsilon)$. Заметим, что если $y = (y_i) \in P(x;\ \delta)$ (рис. 65), то, согласно (18.7),

$$\rho(x,\ y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \leqslant \sqrt{\delta^2 + \ldots + \delta^2} < \delta\sqrt{n}.$$

Поэтому, если выбрать $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, то $y \in O(x;\ \varepsilon)$ (см. рис. 65). Так как y — произвольная точка n-мерного куба $P(x;\ \delta)$, то это и означает, что

$$P(x;\ \delta) \subset O(x;\ \varepsilon).$$

Таким образом, (18.8) доказано.

Обратно, пусть задана прямоугольная окрестность $P(x;\ \delta_1,\ldots,\ \delta_n)$.

Положим $\varepsilon = \min\limits_{i=1,2,\ldots,n} \delta_i$ и рассмотрим $O(x; \varepsilon)$ (рис. 66). Если $y = (y_i) \in O(x; \varepsilon)$, т. е. $\rho(x, y) < \varepsilon$, то

$$|y_k - x_k| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = \rho(x, y) < \varepsilon = \min_{i=1,2,\ldots,n} \delta_i \leqslant \delta_k$$

для любого $k = 1, 2, \ldots, n$, т. е., согласно определению (18.7), $y \in P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$. Так как y — произвольная точка шара $O(x; \varepsilon)$, то это и означает, что

$$O(x; \varepsilon) \subset P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n).$$

Лемма 2 доказана.

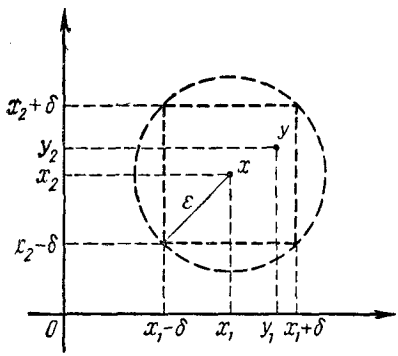


Рис. 65

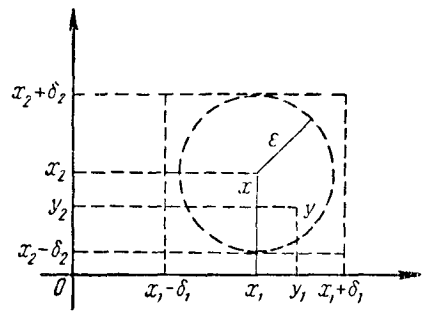


Рис. 66

Определение 7. *Пусть каждому натуральному числу m поставлена в соответствие некоторая точка $x^{(m)} \in E^n$ (необязательно разные точки для разных m). Тогда множество $\{x^{(m)}, m = 1, 2, \ldots\}$, состоящее из точек пространства E с различными номерами, называется последовательностью точек E^n и обозначается*

$$x^{(m)}, \ m = 1, 2, \ldots, \text{ или } \{x^{(m)}\}.$$

Последовательность $\{y^{(k)}\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x^{(m)}\}$ и обозначается

$$x^{(m_k)}, \ k = 1, 2, \ldots, \text{ или } \{x^{(m_k)}\},$$

если для любого k существует такое m_k, что $y^{(k)} = x^{(m_k)}$, причем если $k_1 < k_2$, то $m_{k_1} < m_{k_2}$.

Определение 8. *Точка $x \in E^n$ называется пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$ и пишется*

$$x = \lim_{m \to \infty} x^{(m)}, \tag{18.10}$$

если

$$\lim_{m\to\infty} \rho(x^{(m)}, x) = 0. \tag{18.11}$$

Если $x = \lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)}$, *то будем говорить, что последовательность* $x^{(m)}$ *сходится к точке* x. *Последовательность, которая сходится к некоторой точке, называется сходящейся.*

Используя понятие окрестности, легко получаем, что $x = \lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое m_ε, что для всех $m \geqslant m_\varepsilon$

$$x^{(m)} \in O(x; \varepsilon). \tag{18.12}$$

Используя лемму 2, получаем также: $x = \lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)}$ в том и только том случае, когда для любой прямоугольной окрестности $P(x; \delta_1,\ldots,\delta_n)$ существует номер m_0 (зависящий от этой окрестности), такой, что для всех $m \geqslant m_0$

$$x^{(m)} \in P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n). \tag{18.13}$$

В случае $n = 1$ определение 8 превращается в обычное определение предела числовой последовательности.

При $n = 2$ сходимость последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек плоскости E^2 к точке $x \in E^2$ означает, что, каков бы ни был круг с центром в точке x, начиная с некоторого номера, зависящего от этого круга, все члены данной последовательности лежат в этом круге (рис. 67). В случае $n = 3$ сходимость последовательности точек $\{x^{(m)}\}$ пространства E^3 к точке $x \in E^3$ означает, что, каков бы ни был обычный трехмерный шар с центром в точке x, начиная с некоторого номера, зависящего от этого шара, все члены данной последовательности лежат в этом шаре.

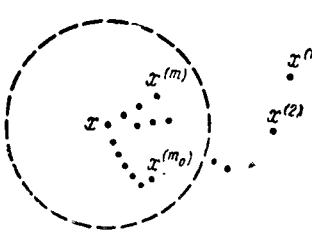


Рис. 67

Как и в случае числовых последовательностей можно сказать, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$, $x^{(m)} \in E^n$, $m = 1, 2,\ldots$, если всякая ε-окрестность точки x содержит почти все точки данной последовательности, т. е. все, за исключением, быть может, их конечного числа.

Понятие предела последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек пространства E^n может быть сведено к понятию предела числовых последовательностей, а именно последовательностей координат точек $x^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность* $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right) \in E^n$, $n = 1, 2, \ldots$, *сходилась к точке* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{m \to \infty} x_i^{(m)} = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.14}$$

Доказательство. Докажем необходимость условия (18.14). Пусть $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$; тогда, согласно (18.13), существует такое m_ε, что

$$x^{(m)} \in P(x; \varepsilon)$$

при всех $m \geqslant m_\varepsilon$, т. е.

$$\left| x_i^{(m)} - x_i \right| < \varepsilon$$

для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ и при $m \geqslant m_\varepsilon$, а это и означает, что

$$\lim_{m \to \infty} x_i^{(m)} = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Докажем достаточность условия (18.14). Пусть $\lim\limits_{m \to \infty} x_i^{(m)} = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $P(x; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — заданная прямоугольная окрестность точки x. Тогда для каждого $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, существует такой номер $m_i = m_i(\varepsilon_i)$, что для всех $m \geqslant m_i$ выполняется неравенство

$$\left| x_i^{(m)} - x_i \right| < \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.15}$$

Обозначим через m_0 наибольший из номеров $m_1, \ldots, m_n$:

$$m_0 = \max\{m_1, \ldots, m_n\},$$

тогда при $m \geqslant m_0$ и всех $i = 1, 2, \ldots, n$ будет выполнено условие (18.15) и, следовательно (см. (18.7)), при $m \geqslant m_0$ будем иметь

$$x^{(m)} \in P(x; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$

что и означает, согласно (18.13), что

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x. \tag{18.16}$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 и свойств пределов числовых последовательностей следует, что если последовательность точек имеет предел, то он единствен, и что всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и вся последовательность.

Упражнение 1. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие сходимости последовательности точек пространства E^n, аналогичное критерию Коши для числовых последовательностей.

Определение 9. *Множество $E \subset E^n$ называется ограниченным, если существует n-мерный куб $P(O; a)$ с центром в начале координат O, такой, что $E \subset P(O; a)$.*

Аналогично лемме 2 доказывается, что, каков бы ни был шар $O(x; \varepsilon)$, существует куб $P(x; \delta)$, такой, что $P(x; \delta) \supset O(x; \varepsilon)$, и обратно: каков бы ни был куб $P(x; \delta)$, существует шар $O(x; \varepsilon)$, такой, что $O(x; \varepsilon) \supset P(x; \delta)$. Отсюда следует, что можно дать еще одно эквивалентное предыдущему определение ограниченного множества.

Определение 9'. *Множество $E \subset E^n$ называется ограниченным, если существует n-мерный шар $O(O; \varepsilon)$, такой, что $E \subset O(O; \varepsilon)$.*

Определение 10. *Последовательность точек $x^{(m)} \in E^n$, $m = 1, 2, \ldots$, называется ограниченной, если множество ее значений образует ограниченное множество в пространстве E^n.*

Если последовательность $x^{(m)} = (x_i^{(m)})$, $m = 1, 2, \ldots$, сходится, то она ограничена, ибо каждая из координатных последовательностей $x_i^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, i — фиксировано ($i = 1, 2, \ldots, n$), в этом случае также сходится и, значит, ограничена.

Теорема 2. *Из любой ограниченной последовательности точек пространства E^n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Эта теорема, как и в одномерном случае, обычно называется, *теоремой Больцано — Вейерштрасса.*

Доказательство. Пусть задана ограниченная последовательность точек $x^{(m)} = (x_i^{(m)})$, $m = 1, 2, \ldots$, пространства. Очевидно, что каждая из n последовательностей $\{x_i^{(m)}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, также ограничена. Поэтому, согласно теореме Больцано—Вейерштрасса (см. п. 3.2), последовательность $\{x_1^{(m)}\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность; пусть это будет последовательность $x_1^{(m_{k_1})}$, $k_1 = 1, 2, \ldots$. Последовательность $\{x_2^{(m_{k_1})}\}$, как подпоследовательность последовательности $\{x_2^{(m)}\}$, также ограничена и, значит, содержит сходящуюся подпоследовательность. Пусть это будет последовательность $x_2^{(m_{k_2})}$, $k_2 = 1, 2, \ldots$. Последовательность $\{x_1^{(m_{k_2})}\}$, как подпоследовательность сходящейся последовательности $\{x_1^{(m_{k_1})}\}$, очевидно, также будет сходящейся. Продолжая этот процесс дальше, через n шагов получим n сходящихся последовательностей $\{x_i^{(m_{k_n})}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, каждая из которых является подпоследовательностью, соответственно последовательности $\{x_i^{(m)}\}$. Тогда, согласно теореме 1, последовательность точек $\{x^{(m_{k_n})}\}$ пространства E^n будет также сходящейся.

18.2. Различные типы множеств

Настоящий пункт по своему содержанию и по своей форме отличается от остальных: в нем имеется 17 определений, много утверждений, семь из которых названы леммами, и ни одной теоремы. Это связано с тем, что здесь будут рассмотрены вопросы, вспомогательные для дальнейшего изложения математического анализа, связанные с геометрией n-мерного пространства.

Определение 11. *Пусть E — некоторое множество точек евклидова пространства E^n. Точка $x \in E$ называется внутренней точкой этого множества, если существует ε-окрестность этой точки, содержащаяся в множестве E, т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что $O(x; \varepsilon) \subset E$.*

Определение 12. *Множество точек пространства E^n, каждая точка которого является внутренней точкой этого множества, называется открытым множеством.*

Важный класс открытых множеств устанавливается следующей леммой.

Лемма 1. *Всякая ε-окрестность $O(x; \varepsilon)$ любой точки $x \in E^n$ является открытым множеством.*

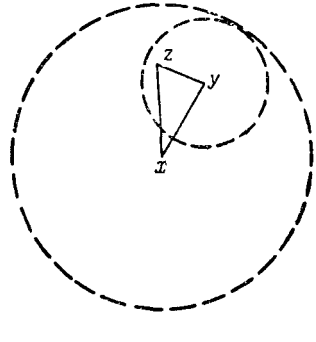


Рис. 68

Доказательство. Пусть задана некоторая окрестность $O(x; \varepsilon)$ и пусть $y \in O(x; \varepsilon)$. Положим

$$\delta = \varepsilon - \rho(y, x) \qquad (18.17)$$

и покажем, что $O(y; \delta) \subset O(x; \varepsilon)$ (рис. 68).

Если $z \in O(y; \delta)$ и, значит, $\rho(z, y) < \delta$, то, применяя неравенство треугольника и (18.17), получим

$$\rho(z, x) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, x) < \delta + \rho(y, x) = \varepsilon,$$

т. е. $z \in O(x; \varepsilon)$. В силу того, что z — произвольная точка множества $O(y; \delta)$, это означает, что $O(y; \delta) \subset O(x; \varepsilon)$.

Лемма доказана.

Открытые множества пространства E^n будем обозначать большей частью буквой G.

Очень удобным оказывается следующее определение.

Определение 13. *Всякое открытое множество, содержащее точку x называется ее окрестностью и обозначается $O(x)$.*

Замечание. При таком определении сохраняется свойство (18.12), т. е. точка x является пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$

тогда и только тогда, когда для любой окрестности $O(x)$ существует такой номер m_0, что для всех $m \geqslant m_0$ выполняется включение

$$x^{(m)} \in O(x).$$

Определение 14. *Точка $x \in E^n$ называется точкой прикосновения множества $E \subset E^n$, если любая окрестность этой точки содержит по крайней мере одну точку множества E.*

Очевидно, что каждая точка множества E является его точкой прикосновения, ибо всякая окрестность точки $x \in E$ содержит саму точку x.

Определение 15. *Если у точки $x \in E$ существует окрестность, не содержащая никаких других точек множества E, кроме самой точки x, то эта точка называется изолированной точкой множества E.*

Определение 16. *Точка $x \in E^n$ называется предельной точкой множества E, если любая окрестность точки x содержит по крайней мере одну точку множества E, отличную от x.*

Очевидно, что предельная точка является точкой прикосновения. С другой стороны, всякая точка прикосновения множества E является либо его изолированной точкой, либо его предельной точкой (в последнем случае она может как принадлежать, так и не принадлежать самому множеству).

Рассмотрим примеры. Пусть $n = 1$, $E = (0; 1)$, каждая точка отрезка $[0; 1]$ является точкой прикосновения и предельной точкой множества E, при этом точки 0 и 1 не принадлежат самому множеству E. Если $E = [0; 1]$, то множество точек прикосновения множества E совпадает с самим множеством. Наконец, если множество E состоит из интервала $(0; 1)$ и точки 2, т. е. $E = (0; 1) \cup \{2\}$, то точка 2 является его изолированной точкой, а множество его точек прикосновения образует множество $[0; 1] \cup \{2\}$.

Определение 17. *Совокупность всех точек прикосновения множества $E \subset E^n$ называется замыканием множества E и обозначается $\overline{E}$.*

Как уже отмечалось, каждая точка множества E является его точкой прикосновения, поэтому

$$E \subset \overline{E}. \tag{18.18}$$

Определение 18. *Множество E называется замкнутым, если $E = \overline{E}$, т. е. если оно содержит в себе все свои точки прикосновения.*

Например, при $n = 1$ интервал $(0; 1)$ не является замкнутым множеством, а отрезок $[0; 1]$ — замкнутое множество.

Все пространство и пустое множество являются одновременно замкнутыми и открытыми множествами (проверьте это).

Лемма 2. *Замыкание всякого множества является замкнутым множеством.*

Доказательство. Пусть $\bar{E}$ — замыкание множества $E \subset E^n$. Согласно определению замкнутого множества, надо показать, что множество $\bar{E}$ совпадает со своим замыканием, т. е., что $\bar{E} = \bar{\bar{E}}$.

Так как, согласно (18.18), $\bar{E} \subset \bar{\bar{E}}$, то достаточно показать, что

$$\bar{\bar{E}} \subset \bar{E}, \tag{18.19}$$

иначе говоря, надо доказать, что если некоторая точка $x \in \bar{\bar{E}}$, т. е. если x является точкой прикосновения множества $\bar{E}$, то она является и точкой прикосновения множества E. Пусть $x \in \bar{\bar{E}}$; это означает, что в любой окрестности $O(x)$ существует точка y множества $\bar{E}$. Поскольку окрестность $O(x)$ является открытым множеством, то существует такая окрестность $O(y)$ точки y (например сама $O(x)$), что $O(y) \subset O(x)$. Точка y является точкой прикосновения множества E, поэтому в окрестности $O(y)$ существует точка z множества E, но $O(y) \subset O(x)$ и поэтому $z \in O(x)$. Таким образом, в любой окрестности $O(x)$ точки $x \in \bar{\bar{E}}$ содержится точка z множества E, а это и означает, что x является точкой прикосновения множества E. Включение (18.19), а значит, и лемма 2 доказаны.

Рассмотрим примеры. Всякий n-мерный шар

$$Q^n = \left\{x = (x_i) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < r^2\right\} \tag{18.20}$$

является открытым множеством (см. лемму 1), поэтому его часто называют также *n-мерным открытым шаром*. Множество же

$$\bar{Q}^n = \left\{x = (x_i) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \leqslant r^2\right\}, \tag{18.21}$$

являющееся замыканием открытого шара Q^n, называется *n-мерным замкнутым шаром*. В случае $n = 2$: Q^2 — открытый круг, $\bar{Q}^2$ — замкнутый круг; в случае $n = 1$: Q^1 — интервал, $\bar{Q}^1$ — отрезок.

Замкнутый шар $\bar{Q}^n$ получается из открытого шара Q^n добавлением к нему множества

$$\left\{x = (x_i) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2\right\},$$

называемого *$(n-1)$-мерной сферой радиуса r с центром в точке $a = (a_i)$*. Мы ее будем обозначать S^{n-1}. В случае $n = 2$: S^1 — окружность; в случае $n = 1$: S^0 — пара точек.

Сфера

$$S^{n-1}=\left\{x=(x_i):\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2=r^2\right\} \tag{18.22}$$

также дает пример замкнутого множества (почему?).

Заметим еще, что n-мерный шар радиуса 1 с центром в начале координат обычно называется *n-мерным единичным шаром* (замкнутым или открытым), а $(n-1)$-мерная сфера радиуса 1 с центром в начале координат — *$(n-1)$-мерной единичной сферой.*

Упражнение 2. Для того чтобы точка $x\in E^n$ была точкой прикосновения множества $E\subset E^n$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность точек $x^{(m)}\in E$, $m=1, 2, \ldots$, такая, что $\lim\limits_{m\to\infty}x^{(m)}=x$.

Определение 19. *Для всякого множества $E\subset E^n$ множество $E^n\setminus E$ называется его дополнением.*

Очевидно, что если множество $B\subset E^n$ является дополнением множества $A\subset E^n$, то и, обратно, множество A является дополнением множества B.

Лемма 3. *Для того чтобы множество было открыто, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение было замкнуто.*

Доказательство необходимости. Пусть G — открытое множество, тогда никакая точка $x\in G$ не является точкой прикосновения его дополнения $F=E^n\setminus G$, так как множество G, будучи открытым, является окрестностью точки x и не содержит точек множества F. Следовательно, все точки прикосновения множества F содержатся в самом F, что и означает замкнутость множества F.

Доказательство достаточности. Пусть F является замкнутым множеством и пусть $x\in G=E^n\setminus F$. В силу замкнутости F точка x не является его точкой прикосновения; поэтому существует ее окрестность $O(x)$, не пересекающаяся с множеством F и, следовательно, такая, что $O(x)\subset G$. Таким образом, любая точка множества G является внутренней, т. е. G открыто.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть A и B — замкнутые непересекающиеся множества из E^n и множество A — ограничено, тогда существует такое число $d>0$, что $\rho(x, y)\geqslant d$ для любых двух точек $x\in A$ и $y\in B$.*

Доказательство. Пусть такого числа d не существует. Тогда для любого $m=1, 2, \ldots$, существует пара точек $x^{(m)}\in A$ и $y^{(m)}\in B$, таких, что $\rho(x^{(m)}, y^{(m)})<\frac{1}{m}$. Поскольку A — ограниченное множество, то из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(m_k)}=x^{(0)}$.

В силу замкнутости множества A имеем $x^{(0)} \in A$. Из неравенства

$$\rho\left(x^{(0)}, y^{(m_k)}\right) \leqslant \rho\left(x^{(0)}, x^{(m_k)}\right) + \rho\left(x^{(m_k)}, y^{(m_k)}\right) < \\ < \rho\left(x^{(0)}, x^{(m_k)}\right) + \frac{1}{m}$$

следует, что

$$\lim_{k \to \infty} \rho\left(x^{(0)}, y^{(m_k)}\right) = 0.$$

Поэтому точка $x^{(0)}$ является точкой прикосновения множества B и, в силу его замкнутости $x^{(0)} \in B$. Таким образом, $x^{(0)} \in A$ и $x^{(0)} \in B$, а это противоречит тому, что A и B не пересекаются.

Лемма доказана.

Определение 20. *Для двух множеств E_1 и E_2 величина*

$$\rho(E_1, E_2) = \inf_{x \in E_1,\ y \in E_2} \rho(x, y)$$

называется расстоянием между множествами E_1 и E_2. В частности, если E_1 состоит из одной точки x, то $\rho(E_1, E_2) = \rho(x, E_2)$ называется расстоянием от точки x до множества E_2.

Применяя этот термин, лемму 4 можно сформулировать следующим образом.

Два непересекающихся замкнутых множества, из которых по крайней мере одно ограничено, находятся на положительном расстоянии.

Упражнение 3. Привести пример двух непересекающихся замкнутых множеств, расстояние между которыми равно нулю.

Лемма 5. *Если A — ограниченное замкнутое множество, $A \subset E^n$, $x \in E^n$ и $\rho(x, A) = d$, то существует $y \in A$, такая, что $\rho(x, y) = d$.*

Доказательство. Если $\rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \rho(x, y) = d$, то для любого $n = 1, 2, \ldots$ найдется такой $y^{(n)} \in A$, что $\rho(x, y^{(n)}) < d + \frac{1}{n}$. Из ограниченности множества A следует, что последовательность $\{y^{(n)}\}$ ограничена и, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{y^{(n_k)}\}$. Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} y^{(n_k)} = y^{(0)}$. В силу замкнутости множества A имеем $y^{(0)} \in A$. Далее,

$$\rho\left(x, y^{(0)}\right) \leqslant \rho\left(x, y^{(n_k)}\right) + \rho\left(y^{(n_k)}, y^{(0)}\right) < \\ < d + \frac{1}{n_k} + \rho\left(y^{(n_k)}, y^{(0)}\right).$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, получим $\rho(x, y^{(0)}) \leqslant d$. С другой стороны, $\rho(x, y^{(0)}) \geqslant \rho(x, A) = d$, следовательно, $\rho(x, y^{(0)}) = d$.

Лемма доказана.

Обозначим теперь для всякого множества $A \subset E^n$ через A_η, где $\eta > 0$, совокупность всех точек, удаленных от множества A на расстояние не большее чем η:

$$A_\eta = \{x : \rho(x, A) \leqslant \eta\}.$$

Лемма 6. *Если A — ограниченное замкнутое множество, то при любом $\eta > 0$ множество A_η также является ограниченным замкнутым множеством.*

Доказательство. Ограниченность множества A означает, что существует такое $a > 0$, что A содержится в шаре $O(O; a)$ радиуса a с центром в начале координат O: $A \subset O(O; a)$.

Покажем, что $A_\eta \subset O(O; a + \eta)$. Если $x \in A_\eta$, то согласно лемме 5, найдется точка $y \in A$, такая, что $\rho(x, y) = \rho(x, A) \leqslant \eta$. Из условия же $A \subset O(O; a)$ следует, что $\rho(O; y) < a$. Поэтому

$$\rho(O; x) \leqslant \rho(O; y) + \rho(y, x) < a + \eta.$$

Таким образом, $x \in O(O; a + \eta)$. Точка x является произвольной точкой множества A_η. Следовательно, $A_\eta \subset O(O; a + \eta)$, и потому A_η является ограниченным множеством.

Покажем теперь, что A_η замкнутое множество. Если $x \in A_\eta$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $y \in A_\eta$, такая, что $\rho(x, y) < \varepsilon$. Из определения множества A_η и леммы 5 следует, что существует такая точка $z_0 \in A$, что $\rho(y, z_0) = \rho(y, A) \leqslant \eta$. Поэтому

$$\rho(x, A) = \inf_{z \in A} \rho(x, z) \leqslant \rho(x, z_0) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z_0) < \eta + \varepsilon.$$

Это неравенство верно для любого $\varepsilon > 0$. Устремляя ε к нулю, получим $\rho(x, A) \leqslant \eta$, т. е. $x \in A_\eta$, что и доказывает замкнутость множества A_η.

Лемма доказана.

Определение 21. *Точка $x \in E^n$ называется граничной точкой множества $E \subset E^n$, если в любой окрестности этой точки существуют точки, как принадлежащие множеству E, так и не принадлежащие ему. Совокупность всех граничных точек множества E называется его границей и обозначается ∂E.*

Очевидно,

$$\partial E \subset \bar{E}.$$

С другой стороны, каждая точка прикосновения множества E является либо его граничной точкой, либо его внутренней точкой — других возможностей нет; поэтому

$$\bar{E} = E \cup \partial E.$$

Если G открытое множество, то в сумме

$$\overline{G} = G \cup \partial G$$

слагаемые G и ∂G не пересекаются.

Действительно, поскольку множество G открыто, то всякая его точка является внутренней и тем самым не принадлежит его границе.

Рассмотрим примеры. Пусть $n = 2$, $Q^2 = \{(x_1, x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ — открытый круг. Если $E = Q^2$, то любая точка окружности $S^1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ является граничной точкой множества E и других граничных точек нет, т. е. $S^1 = \partial E$. В этом случае граница не принадлежит множеству E.

Если $E = \overline{Q^2}$ — замкнутый круг, то снова окружность S^1 является границей E, причем в этом случае $\partial E \subset E$.

Наконец, если $E = S^1$ — окружность, то каждая точка множества E является его граничной точкой и других граничных точек нет, т. е. в этом случае $E = \partial E$.

Вообще, $(n-1)$-мерная сфера (18.22) является границей как n-мерного открытого шара (18.20), так и замкнутого (18.21), а также совпадает со своей собственной границей (почему?).

Упражнения. 4. Для того чтобы множество $A \subset E^n$ было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы $\partial A \subset A$.

5. Доказать, что, каковы бы ни были множества $D_\alpha \subset E^n$ и множество их индексов $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$, справедливы формулы

$$E^n \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} D_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E^n \setminus D_\alpha),$$

$$E^n \setminus \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} D_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E^n \setminus D_\alpha).$$

6. Доказать, что пересечение конечного числа и сумма любой системы открытых множеств снова является открытым множеством, а также что пересечение любой системы и сумма конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

Для дальнейшего нам понадобится еще понятие кривой в n-мерном пространстве. Для этой цели обобщим данное выше определение кривой в трехмерном пространстве, не касаясь вопроса о преобразовании параметра.

Определение 22. *Геометрическое место точек $x = (x_i)$ пространства E^n, координаты которых заданы как непрерывные функции $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, определенные на некотором отрезке $[a, b]$, называется непрерывной кривой в пространстве E^n. Аргумент t называется параметром кривой. Точка $x(a) = (x_i(a))$ называется началом, а точка $x(b) = (x_i(b))$ — концом данной кривой.*

Все сказанное в п. 16.1 о кривой в трехмерном пространстве можно естественным образом перенести и на общий n-мерный случай, но мы не будем на этом останавливаться.

Определение 23. *Пусть* $x^{(0)} = (x_i^{(0)}) \in E^n$ *и* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — *некоторые фиксированные числа. Геометрическое место точек* $x = (x_i)$ *пространства* E^n, *координаты которых представлены в виде*

$$x_i = x_i^{(0)} + \alpha_i t, \quad -\infty < t < +\infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

называется прямой в пространстве E^n, *проходящей через точку* $x^{(0)}$ *в «направлении»* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Часть прямой, соответствующая изменению параметра t в некотором отрезке $[a, b]$, называется *прямолинейным отрезком*, а ее часть, соответствующая изменению параметра t на бесконечном промежутке $t \geqslant a$, — *лучом*. Очевидно, что в случае $n = 3$ получается прямая, соответственно отрезок или луч, в обычном трехмерном пространстве, а $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ будет являться направляющим вектором этой прямой.

Если заданы две точки (x_i') и (x_i''), то уравнение прямой, проходящей через эти точки имеет вид

$$x_i = x_i' + (x_i'' - x_i')\, t, \quad -\infty < t < +\infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Определение 24. *Множество* $E \subset E^n$, *любые две точки которого можно соединить в нем непрерывной кривой, называется связным.*

Иначе говоря, множество E называется связным, если, каковы бы ни были точки $x^{(1)} \in E$ и $x^{(2)} \in E$, существует непрерывная кривая $x(t) = \{x_i(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, такая, что ее началом является точка $x^{(1)}$, т. е. $x(a) = x^{(1)}$, концом — точка $x^{(2)}$, т. е. $x(b) = x^{(2)}$ и все точки этой кривой принадлежат множеству E, т. е. $x(t) \in E$ для всех $t \in [a, b]$.

Примером связных множеств являются точка, отрезок. Примером несвязного множества — пара различных точек.

Определение 25. *Открытое связное множество называется областью.*

Рассмотрим примеры. В случае $n = 1$ всякий интервал является областью, а множество, состоящее из двух или более непересекающихся интервалов (рис. 69), хотя и есть открытое множество, но не является областью.

В случае $n = 2$ всякий открытый круг есть область, а множество, состоящее из двух или более непересекающихся открытых

кругов (рис. 70), хотя и есть открытое множество, но не является областью, так как две точки x и y, принадлежащие разным кругам, нельзя соединить непрерывной кривой, оставаясь внутри рассматриваемого множества.

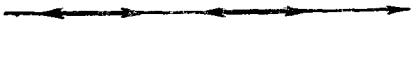


Рис. 69

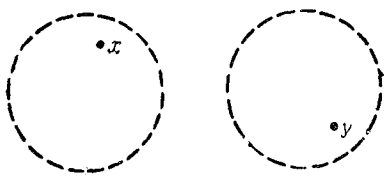


Рис. 70

Всякий n-мерный открытый шар является областью.

Определение 26. *Область, любые две точки которой можно соединить отрезком, целиком в ней лежащим, называется выпуклой областью.*

Всякий n-мерный открытый шар является выпуклой областью.

Упражнение 7. Построить пример невыпуклой области.

Определение 27. *Множество, лежащее в пространстве E^n и являющееся замыканием некоторой области, называется замкнутой областью.*

Замкнутый n-мерный шар является замкнутой областью.

Лемма 7. *Если связное множество пересекается с некоторым множеством и его дополнением, то оно пересекается и с границей этого множества.*

Доказательство. Пусть A — связное множество, $A \subset E^n$, B — некоторое множество, $B \subset E^n$, и пусть пересечения $A \cap B$ и $A \cap (E^n \setminus B)$ не пусты. Пусть $x \in A \cap B$ и $y \in A \cap (E^n \setminus B)$. Поскольку A — связное множество, то существует такая непрерывная кривая $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, что $r(a) = x$, $r(b) = y$ и $r(t) \in A$ для всех $t \in [a, b]$. Обозначим через τ верхнюю грань тех $t \in [a, b]$, для которых $r(t) \in B$. Очевидно, $a \leqslant \tau < b$. В любой окрестности точки $r(\tau)$ содержатся как точки, принадлежащие B, так и не принадлежащие B (почему?). Следовательно, $r(\tau) \in \partial B$. Поскольку $r(\tau) \in A$, то пересечение $\partial B \cap A$ не пусто.

Лемма доказана.

§ 19. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этом параграфе рассматриваются вещественные функции, определенные на множествах n-мерного евклидова пространства E^n, значениями которых являются вещественные числа.

Эти функции обозначаются одним символом, например f, или, указывая аргумент, $f(x)$ или $f(x_1, \ldots, x_n)$. При $n > 1$ эти функции

называются функциями многих переменных. В случае $n = 2$ вместо $f(x_1, x_2)$ будем писать также $f(x, y)$, в случае $n = 3$ вместо $f(x_1, x_2)$ — также $f(x, y, z)$.

19.1. Предел функции

Определение 1. *Пусть на множестве E пространства E^n определена функция $y = f(x)$ и пусть E^{n+1}_{xy} — $(n+1)$-мерное евклидово пространство точек $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$. Геометрическое место точек пространства E^{n+1}_{xy} вида $(x, f(x))$, где $x \in E$, называется графиком функции f* (рис. 71).

Перейдем теперь к определению предела функции.

Определение 2. *Пусть функция f определена на множестве $E \subset E^n$, пусть E_0 — некоторое подмножество множества E и пусть точка $x^{(0)}$ — предельная точка множества E_0.*

Число a называется пределом функции f по множеству E_0 при x, стремящемся к $x^{(0)}$, если для любой последовательности точек $x^{(m)} \in E_0$, $m = 1, 2, \ldots$, такой, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x^{(0)}$, числовая последовательность $\{f(x^{(m)})\}$ сходится к числу a:

$$\lim_{m\to\infty} f(x^{(m)}) = a.$$

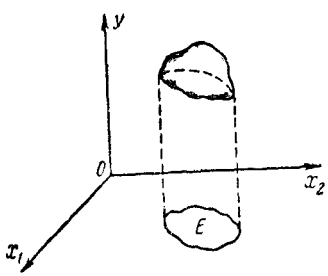


Рис. 71

В этом случае будем писать

$$\lim_{x\to x^{(0)},\ x\in E_0} f(x) = a.$$

При сделанных предположениях можно дать и другое, эквивалентное предыдущему определение функции по аналогии с тем, как это было сделано раньше для функций одного переменного (см. п. 4.4 и 4.6).

Определение 3. *Число a называется пределом функции f по множеству E_0 при $x \to x^{(0)}$ *), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $|f(x) - a| < \varepsilon$ для любой точки $x \in O(x^{(0)}; \delta) \cap E_0$, $x \neq x^{(0)}$.*

Совершенно аналогично случаю функций одного переменного доказывается эквивалентность этих двух определений.

Упражнения. 1. Доказать эквивалентность двух приведенных определений предела функции по множеству.

2. Сформулировать и доказать критерий Коши существования предела $\lim\limits_{x\to x^{(0)},\ x\in E} f(x)$ по множеству $E \subset E^n$.

*) Как и выше, мы предполагаем, что точка $x^{(0)}$ является предельной точкой множества E_0, содержащегося в множестве определения функции f.

Иногда вместо «предел функции при x, стремящемся к $x^{(0)}$», будем говорить «предел функции в точке $x^{(0)}$».

Запись $x \to x^{(0)}$ будем считать равносильной записи $\rho(x, x^{(0)}) \to 0$, и потому наряду с обозначением $\lim\limits_{x \to x^{(0)},\ x \in E_0} f(x)$ будем писать также

$$\lim_{\rho(x,\ x^{(0)}) \to 0,\ x \in E_0} f(x).$$

Определение 4. *Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $O(x^{(0)}; \delta)$ точки $x^{(0)}$, кроме, быть может, самой точки, $x^{(0)}$, то в этом случае предел функции f по множеству $E_0 = O(x^{(0)}; \delta)$ при $x \to x^{(0)}$ называется просто пределом функции и обозначается* $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$.

Определение 5. *Если множество E_0 является прямой* (см. п. 18.2), *проходящей через точку $x^{(0)}$ в некотором направлении, то в этом случае предел функции f по множеству E_0 при $x \to x^{(0)}$ называется пределом функции в данном направлении в точке $x^{(0)}$.*

Определение 6. *Если множество E_0 является множеством точек некоторой кривой, проходящей через точку $x^{(0)}$, то в этом случае предел функции f по множеству E_0 при $x \to x^{(0)}$ называется пределом функции по данной кривой в точке $x^{(0)}$.*

Очевидно, что если у функции f существует предел в точке x_0, то он существует в этой точке и по любому направлению и по любой кривой, причем все эти пределы совпадают с указанным пределом функции.

Пример. Пусть $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Эта формула задает функцию во всех точках плоскости, кроме начала координат (0, 0). Исследуем пределы этой функции по различным направлениям в точке (0, 0). Уравнение прямой, проходящей через начало координат (0, 0) в направлении вектора (α, β), имеет вид $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Имеем

$$f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha^2 \beta t}{\alpha^4 t^2 + \beta^2} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0,$$

т. е. предел по любому направлению существует и равен нулю. Если же $y = x^2$, то

$$f(x, x^2) \equiv \frac{1}{2},$$

и, значит, предел вдоль параболы $y = x^2$ также существует, но равен $\frac{1}{2}$.

Таким образом, для рассмотренной функции существует один и тот же предел по любому направлению, а предел по указанной параболе, хотя и существует, отличен от общего значения пределов по направлениям, тем самым просто предел в точке (0, 0) не существует.

Упражнение 3. Исследовать пределы по направлению в точке (0, 0) функции

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Аналогично случаю функций одного переменного для пределов функций многих переменных по множеству имеют место соответствующие теоремы о пределах суммы, произведения и частного, так как в силу приведенного выше определения предел функции n переменных по множеству также сводится к понятию предела последовательности (см. п. 4.6).

Наряду с указанными пределами у функций многих переменных можно рассматривать и пределы других видов, связанные с последовательным переходом к пределу, например по различным координатам, т. е. пределы вида

$$\lim_{x_{i_1} \to x_{i_1}^{(0)}} \lim_{x_{i_2} \to x_{i_2}^{(0)}} \dots \lim_{x_{i_n} \to x_{i_n}^{(0)}} f(x_1, \dots, x_n),$$

где $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \dots, n$, $x^{(0)} = (x_i^{(0)}) \in E^n$ и функция f определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$, кроме, быть может, самой этой точки. Пределы указанного вида называются *повторными пределами*; они представляют собой специфику функций многих переменных.

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{y} + y \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \text{ и } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \text{ или } y = 0, \end{cases}$$

определенную на всей плоскости. Исследуем различные ее пределы.

Очевидно, $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0$. Что же касается повторных пределов

$$\lim_{y \to 0} \left[\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{y} + \lim_{x \to 0} y \sin \frac{1}{x} \right] \text{ и } \lim_{x \to 0} \left[\lim_{y \to 0} x \sin \frac{1}{y} + \lim_{y \to 0} y \sin \frac{1}{x} \right],$$

то они не существуют, так как уже не существуют

$$\lim_{x \to 0} y \sin \frac{1}{x} \ (y \neq 0) \text{ и } \lim_{y \to 0} x \sin \frac{1}{y} \ (x \neq 0).$$

Для функции же $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, определенной этой формулой на всей плоскости, кроме начала координат, оба повторных предела существуют и $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = 0$. Просто же предела нет, ибо, как легко видеть, предел вдоль координатных осей равен нулю, а вдоль прямой $y = x$ предел равен $\frac{1}{2}$.

Таким образом, только из существования предела функции в данной точке не следует существования повторных пределов в этой точке, и наоборот, из существования повторных пределов не следует существования предела в соответствующей точке.

Тем не менее, определенная связь между этими понятиями может быть установлена.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве E, содержащем все точки некоторой прямоугольной окрестности $P((x_0, y_0); \delta_1, \delta_2)$ точки (x_0, y_0), кроме, быть может, точек прямых $x = x_0$ и $y = y_0$. Если существует предел функции f в точке (x_0, y_0) по множеству E и если при любом $y \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$, $y \neq y_0$, существует предел**)

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) = g(y), \tag{19.1}$$

то повторный предел $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$ существует и

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0),\ (x, y) \in E} f(x, y). \tag{19.2}$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0),\ (x, y) \in E} f(x, y) = A$ и пусть фиксировано произвольное $\varepsilon > 0$. Существует прямоугольная окрестность $P = P((x_0, y_0); \eta_1, \eta_2)$, $0 < \eta_1 < \delta_1$, $0 < \eta_2 < \delta_2$, такая, что если $0 < |x - x_0| < \eta_1$, $0 < |y - y_0| < \eta_2$, то

$$|f(x, y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19.3}$$

В силу существования предела (19.1) для любого числа y такого, что $0 < |y - y_0| < \eta_2$, из (19.3) следует, что

$$|g(y) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = A$.

Теорема доказана.

*) Как всегда, под пределами понимаются конечные пределы.

Как и для случая функций одной переменной, для функций $f(x)$ многих переменных можно определить предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, т. е. предел, когда точка $x=(x_i)$ неограниченно удаляется от начала координат, иначе говоря, когда $\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\to+\infty$, а также предел по одной из переменных x_i при условии $x_i\to\infty$ и повторный предел по переменным $x_i\to\infty$ и $x_j\to\infty$ $(i, j=1, 2,\ldots, n)$. Отметим, что и в этом случае имеет место утверждение, аналогичное теореме 1. Можно ввести и понятие бесконечных пределов. Мы всего этого делать не будем, предоставляя это проделывать учащемуся по мере потребности.

Замечание. В дальнейшем будут рассматриваться суперпозиции функций многих переменных. Для сложных функций многих переменных справедлив аналог правила замены переменного для пределов функций, установленного ранее для функций одного переменного (см. п. 4.5). Его формулировку и доказательство (также аналогичное одномерному случаю) мы предоставляем читателю.

19.2. Непрерывность функций

Определение 7. *Пусть функция f определена на множестве $E\subset E^n$. Функция f называется непрерывной в точке $x^{(0)}\in E$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)$, что для всех $x\in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x^{(0)})<\delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x)-f(x^{(0)})|<\varepsilon. \tag{19.4}$$

Заметим, что это определение в случае $n=1$ шире соответствующего определения непрерывности, данного в п. 5.1, так как мы здесь не предполагаем, что функция f определена обязательно в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$.

Определение непрерывности (в отличие от сформулированного в п. 19.1 определения предела) не предполагает и того, что точка $x^{(0)}$ является предельной для множества E. Точка $x^{(0)}$ может быть и изолированной; при этом в изолированной точке множества E функция f всегда непрерывна, ибо в этом случае в качестве $\delta>0$, участвующего в определении непрерывности, всегда можно взять такое δ, что окрестность $O(x^{(0)}; \delta)$ не содержит других точек множества E, кроме самой точки $x^{(0)}$, а для точки $x=x^{(0)}$ условие (19.4), очевидно, выполняется при любом $\varepsilon>0$.

Если же точка $x^{(0)}$ является предельной для множества E, то данное определение непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ эквивалентно условию

$$\lim_{x\to x^{(0)},\ x\in E} f(x)=f(x^{(0)}). \tag{19.5}$$

Из сказанного следует, что если функция f, определенная на множестве E, непрерывна в точке $x^{(0)} \in E$, то либо $x^{(0)}$ является предельной точкой множества E и тогда выполняется условие (19.5), либо $x^{(0)}$ является изолированной точкой.

Если в равенстве (19.5) перенести $f(x^{(0)})$ в левую часть и обозначить $\Delta y = f(x) - f(x^{(0)})$, то условие (19.5) перепишется в виде

$$\lim_{\rho(x,\, x^{(0)}) \to 0,\ x \in E} \Delta y = 0. \tag{19.6}$$

Число Δy называется приращением функции в точке $x^{(0)}$, соответствующим изменению аргумента от точки $x^{(0)} = (x_i^{(0)})$ до точки $x = (x_i)$. Так как $\rho(x, x^{(0)}) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$, где $\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то непрерывность функции f в точке $x^{(0)}$ означает, что ее приращение Δy в этой точке стремится к нулю, когда приращения Δx_i всех ее аргументов стремятся к нулю.

Лемма (о сохранении знака). *Если функция f определена на* множестве $E \subset E^n$ *и непрерывна в точке* $x^{(0)} \in E$, *причем* $f(x^{(0)}) \neq 0$, *то существует окрестность* $O(x^{(0)})$ *точки* $x^{(0)}$, *такая,* что $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x^{(0)})$ *для всех* $x \in O(x^{(0)}) \cap E$.

Доказательство. Найдем, например, сферическую окрестность, для которой выполняется указанное свойство. Пусть $\varepsilon = |f(x^{(0)})|$, тогда в силу непрерывности существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(x^{(0)})| < |f(x^{(0)})|$ для всех $x \in O(x^{(0)}; \delta)$, т. е.

$$f(x^{(0)}) - |f(x^{(0)})| < f(x) < f(x^{(0)}) + |f(x^{(0)})|, \quad x \in O(x^{(0)}; \delta).$$

Если $f(x^{(0)}) > 0$, то $f(x^{(0)}) - |f(x^{(0)})| = 0$, и поэтому $f(x) > 0$, если же $f(x^{(0)}) < 0$, то $|f(x^{(0)})| + f(x^{(0)}) = 0$, и поэтому $f(x) < 0$ при $x \in O(x^{(0)}; \delta) \cap E$.

Лемма доказана.

Совершенно аналогично случаю $n = 1$ доказывается, что если функции f и g непрерывны в точке $x^{(0)}$ множества E, то функции $f + g$, cf (c — постоянная), fg, а если $g(x^{(0)}) \neq 0$, то и $\frac{f}{g}$ также непрерывны в точке $x^{(0)}$.

19.3. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций

Пусть на некотором множестве $E_t \subset E^k$ задана система n функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$, $t=(t_1, \ldots, t_k) \in E_t$, и пусть на некотором множестве $E_x \subset E^n$ задана функция $f(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_n) \in E_x$.

Если $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in E_x$ для любой точки $t \in E_t$, то имеет смысл говорить о сложной функции $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, т. е. функции, ставящей в соответствие каждой точке $t \in E_t$ число $f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$. Функция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ называется также *суперпозицией* функций f и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Теорема 2. *Пусть имеет смысл сложная функция* $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. *Если функции* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *непрерывны в точке* $t^{(0)} \in E_t \subset E^k$, *а функция* f *непрерывна в точке* $x^{(0)}=(\varphi_1(t^{(0)}), \ldots, \varphi_n(t^{(0)})) \in E_x \subset E^n$, *то сложная функция* $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *непрерывна в точке* $t^{(0)}$.

Доказательство. В силу непрерывности функции f в точке $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta=\eta(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$|f(x)-f(x^{(0)})| < \varepsilon \tag{19.7}$$

для всех точек $x \in P(x^{(0)}; \eta) \cap E_x$ *), т. е. для всех точек $x=(x_1, \ldots, x_n) \in E_x$, для которых

$$|x_i - x_i^{(0)}| < \eta, \quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{19.8}$$

В силу же непрерывности каждой из функций φ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, в точке $t^{(0)}$ для указанного $\eta > 0$ существуют $\delta_i = \delta_i(\eta) > 0$, такие, что

$$|\varphi_i(t)-\varphi_i(t^{(0)})| < \eta \tag{19.9}$$

для всех $t \in E_t \cap O(t^{(0)}; \delta_i)$.

Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_i, $i=1, 2, \ldots, n$. Тогда для всех $t \in E_t \cap O(t^{(0)}; \delta)$ и всех $i=1, 2, \ldots, n$ выполняется неравенство (19.9), т. е. неравенство (19.8), где $x_i=\varphi_i(t)$, $x_i^{(0)}=\varphi_i(t^{(0)})$, $i=1, 2, \ldots, n$. Поэтому для всех $t \in E_t \cap O(t^{(0)}; \delta)$ выполняется условие

$$|f(x)-f(x^{(0)})| < \varepsilon,$$

где $x=(\varphi_i(t))$, $x^{(0)}=(\varphi_i(t^{(0)}))$, что и означает непрерывность сложной функции $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ в точке $t^{(0)}$.

Теорема доказана.

---

*) Здесь удобнее пользоваться прямоугольной окрестностью $P(x^{(0)}; \eta)$, чем сферической.

Как видно из проведенных рассуждений, доказательство теоремы 2 по идее повторяет доказательство соответствующей теоремы для $n=1$ (см. п. 5.2).

Замечание. Если функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, определенные на множестве $E_t \subset E^k$, непрерывны в точке $t^{(0)} \in E_t \subset E^k$, а функция f определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)}=(\varphi_1(t^{(0)}), \ldots, \varphi_n(t^{(0)}))$, то существует такая окрестность $O(t^{(0)})$ точки $t^{(0)}$, что для всех $t \in O(t^{(0)}) \cap E_t$ имеет смысл суперпозиция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Таким образом, когда функция f определена не на каком-то множестве E_x, содержащем точку $x^{(0)}$, а на множестве, содержащем некоторую окрестность точки $x^{(0)}$, то требование существования суперпозиции $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ в условиях теоремы 2 можно отбросить.

Действительно, если функция f определена в какой-то окрестности точки $x^{(0)}$, то существует и прямоугольная окрестность $P(x^{(0)}; \eta)$ этой точки, в которой функция f также определена. В качестве же искомой окрестности точки $t^{(0)}$ можно взять δ-окрестность этой точки, построенную при доказательстве теоремы 2. В самом деле, если $t \in O(t^{(0)}; \delta) \cap E_t$, то, согласно неравенству (19.9), получим $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in P(x^{(0)}; \eta)$, и, следовательно, сложная функция определена на $O(t^{(0)}; \delta) \cap E_t$.

С помощью теоремы 2 можно легко установить непрерывность функций, большей частью встречающихся на практике, а именно так называемых элементарных функций многих переменных.

Определение 8. *Функции, получающиеся из переменных $x_1, \ldots, x_n$ с помощью конечного числа суперпозиций, операций сложения, умножения, деления и взятия элементарных функций одного переменного, называются элементарными функциями переменных $x_1, \ldots, x_n$.*

Например, функция $f(x, y)=xe^{y \sin \frac{xy}{x+y}}$ является элементарной функцией двух переменных x и y. Действительно,

$$f(x, y)=xw, \quad w=e^v, \quad v=yz, \quad z=\sin t, \quad t=\frac{\alpha}{\beta},$$

$$\alpha=xy, \quad \beta=x+y.$$

Из теоремы 2 следует, что всякая элементарная функция многих переменных непрерывна в каждой точке области своего определения.

19.4. Теоремы о функциях, непрерывных на множествах

Функция f называется *непрерывной на множестве E*, если она непрерывна в каждой точке множества E.

Докажем ряд теорем о непрерывных функциях на множествах. Эти теоремы доказываются аналогично соответствующим теоремам

для функций одного переменного. Мы рассмотрим их при достаточно общих предположениях, это позволит более глубоко выяснить, с чем связаны рассматриваемые свойства непрерывных функций. Начнем с обобщения теорем Вейерштрасса (см. п. 6.1) на многомерный случай. Определение ряда понятий, которые будут рассматриваться ниже, как-то: ограниченность функции, верхняя и нижняя грани функции и т. п. — см. в п. 4.1.

Теорема 3. *Если функция f определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве, то она ограничена и достигает своей верхней и нижней граней.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение об ограниченности рассматриваемой функции f. Допустим противное: пусть существует ограниченное замкнутое множество $A \subset E^n$ и определенная на нем неограниченная непрерывная функция f. Тогда для любого натурального m ($m = 1, 2, \ldots$) существует точка $x^{(m)} \in A$, такая, что $|f(x^{(m)})| \geqslant m$. Так как A ограничено, то последовательность $\{x^{(m)}\}$ ограничена. Согласно теореме Больцано — Вейерштрасса (см. п. 18.1) из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$. Так как A замкнуто, то $x^{(0)} \in A$. Теперь, с одной стороны, $|f(x^{(m_k)})| \geqslant m_k$ и, значит, $f(x^{(m_k)}) \to \infty$ при $k \to \infty$, с другой: $f(x^{(m_k)}) \to f(x^{(0)})$ при $k \to \infty$.

Полученное противоречие и доказывает, что всякая непрерывная на ограниченном замкнутом множестве A функция f ограничена.

Пусть теперь $\sup\limits_A f = M$. Докажем, что существует по крайней мере одна точка $x^{(0)} \in A$, для которой $f(x^{(0)}) = M$. Допустим снова противное: пусть $f(x) \neq M$ для всех $x \in A$. Тогда функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ также определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве A, но в силу определения верхней грани функция φ не ограничена на A.

Полученное противоречие доказывает достижимость верхней грани M при сделанных предположениях. Аналогично доказывается и достижимость нижней грани $m = \inf\limits_A f$.

Теорема доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению обобщения теоремы Коши о промежуточных значениях (см. п. 6.2) для случая функций многих переменных.

Теорема 4. *Пусть функция f определена и непрерывна в области $G \subset E^n$, тогда, принимая какие-либо два значения в G, функция f принимает в G и любое значение, заключенное между ними.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна в области $G \subset E^n$, пусть $x^{(1)} \in G$, $x^{(2)} \in G$, $f(x^{(1)}) = a$, $f(x^{(2)}) = b$ и, например, $a < b$. Пусть, далее, c — какое-либо число такое, что $a < c < b$. Согласно определению области (см. определения 24 и 25 в п. 18.2), существует такая кривая $x(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, что $x(\alpha) = x^{(1)}$, $x(\beta) = x^{(2)}$ и $x(t) \in G$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$.

Если $x(t) = (x_i(t))$, то, по определению кривой, функции $x_i(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Согласно же теореме 2 о суперпозиции непрерывных функций многих переменных, функция $f(x(t)) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ также непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Так как $f(x(\alpha)) = a$, $f(x(\beta)) = b$ и $a < c < b$, то, согласно теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной функции на отрезке (см. п. 6.2), существует точка $t_0 \in (\alpha, \beta)$, такая, что $f(x(t_0)) = c$. Полагая $x^{(0)} = x(t_0)$, имеем $x^{(0)} \in G$ и $f(x^{(0)}) = c$.

Теорема доказана.

Следствие. *Функция f, определенная и непрерывная в замкнутой области $\bar{G}$, принимая какие-либо два значения, принимает в $\bar{G}$ и любое промежуточное.*

Доказательство. Пусть G — область, функция f определена и непрерывна на ее замыкании $\bar{G}$, $x^{(1)} \in \bar{G}$, $x^{(2)} \in \bar{G}$, $f(x^{(1)}) = a$, $f(x^{(2)}) = b$ и пусть для определенности $a < c < b$. Докажем, что существует точка $\xi \in G$, такая, что $f(\xi) = c$.

Возьмем

$$\varepsilon = \min\{c - a,\ b - c\}.$$

В силу непрерывности функции f в точке $x^{(1)}$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если $x \in O(x^{(1)}; \delta) \cap \bar{G}$, то $|f(x) - f(x^{(1)})| < \varepsilon$ и, значит, $|f(x) - a| < c - a$, в частности, $f(x) < c$. Точка $x^{(1)} \in \bar{G}$, т. е. точка $x^{(1)}$, является точкой прикосновения множества G, поэтому в окрестности $O(x^{(1)}; \delta)$ заведомо существует точка, принадлежащая G, обозначим ее $y^{(1)}$. Таким образом, $y^{(1)} \in O(x^{(1)}; \delta) \cap G$, и поэтому $f(y^{(1)}) < c$. Аналогичным методом доказывается существование точки $y^{(2)} \in G$, такой, что $f(y^{(2)}) > c$. Из существования в области G точек $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ с указанным свойством в силу теоремы 4 вытекает существование в G точки ξ такой, что $f(\xi) = c$.

Следствие доказано.

Отметим, что ни при доказательстве самой теоремы 4, ни при доказательстве ее следствия не использовалось то, что множество G открыто. Использовалось лишь то, что любые две его точки можно соединить кривой, принадлежащей самому множеству, т. е. что оно связно.

Упражнение 4. Пусть функция f определена, непрерывна и принимает значение разных знаков на открытом множестве. Доказать, что множество точек, в которых $f \neq 0$, является открытым множеством, но не является областью.

Задача 11. Построить пример области G, в замыкании которой существуют две точки, не соединяемые в $\overline{G}$ непрерывной кривой.

19.5. Равномерная непрерывность функций. Модуль непрерывности

Наряду с понятием непрерывности функции в точке в математическом анализе большую роль играет так называемое понятие равномерной непрерывности функции на множестве.

Определение 9. *Функция $f(x)$, определенная на множестве $E \subset E^n$, называется равномерно непрерывной на E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых двух точек $x' \in E$, $x'' \in E$, удовлетворяющих условию*

$$\rho(x', x'') < \delta, \tag{19.10}$$

выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{19.11}$$

Отметим, что если функция f равномерно непрерывна на множестве E, то она и просто непрерывна на E, т. е. непрерывна в каждой точке $x^{(0)} \in E$. Чтобы в этом убедиться, достаточно, например, в (19.10) и (19.11) положить $x'' = x^{(0)}$.

Если же функция f непрерывна в каждой точке $x \in E$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь $\delta = \delta(\varepsilon; x)$, такое, что при $\rho(x, x') < \delta$, $x \in E$, $x' \in E$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. В этом случае выбор δ зависит не только от ε, но, вообще говоря, и от точки x.

Подчеркнем, что в случае, когда функция f равномерно непрерывна на множестве E, выбор соответствующего δ зависит только от ε и не зависит от выбора рассматриваемых точек множества E.

Рассмотрим примеры. 1. Функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на всей числовой оси, ибо, если задано $\varepsilon > 0$, достаточно взять $\delta = \varepsilon$, тогда если $|x' - x''| < \delta$, то в силу равенств $f(x') = x'$, $f(x'') = x''$ получим $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

2. Функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, не будет равномерно непрерывной на своей области определения, т. е. на числовой оси, из которой удалена точка $x = 0$. В самом деле, если взять, например, $\varepsilon = 1$, то при любом сколь угодно малом $\delta > 0$ найдутся точки x' и x'', например, точки вида

$$x' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \quad \text{и} \quad x'' = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2\pi n}$$

(n — достаточно большое натуральное число), такие, что $|x' - x''| < \delta$, а вместе с тем $|f(x') - f(x'')| > 1$.

В качестве достаточного признака равномерной непрерывности функций одного переменного на интервале отметим следующий.

Лемма. *Если функция $f(x)$ определена и имеет ограниченную производную на некотором интервале (a, b), то она равномерно непрерывна на этом интервале.*

Действительно, если $|f'(x)| \leqslant c$ (c — постоянная) на (a, b), то с помощью формулы конечных приращений Лагранжа (см. п. 11.2) получим

$$|f(x'') - f(x')| = |f'(\xi)(x'' - x')| \leqslant c|x'' - x'|,$$
$$a < x' < b, \quad a < x'' < b, \quad a < \xi < b. \tag{19.12}$$

Поэтому для $\varepsilon > 0$ достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, тогда если $|x'' - x'| < \delta$, $a < x' < b$, $a < x'' < b$, то в силу (19.12) $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, что и означает равномерную непрерывность функции f на (a, b).

Лемма доказана.

Аналогичный результат имеет место для любого промежутка, конечного или бесконечного. Обобщение этого критерия на многомерный случай будет дано в п. 39.2.

Принципиальное значение имеет следующая теорема.

Теорема 5. (Кантор). *Функция, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве, равномерно непрерывна.*

Следствие. *Функция, непрерывная на отрезке, является равномерно непрерывной.*

Доказательство проведем от противного. Пусть существует функция f, определенная и непрерывная на некотором ограниченном замкнутом множестве E, но неравномерно непрерывная на нем. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки $x'_\delta \in E$ и $x''_\delta \in E$ (индекс «δ» у точек означает, что эти точки зависят от выбора δ), для которых $\rho(x'_\delta, x''_\delta) < \delta$ и вместе с тем $|f(x''_\delta) - f(x'_\delta)| \geqslant \varepsilon_0$. Возьмем какую-либо последовательность чисел δ_n так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, например, $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $x'^{(n)} = x'_{\delta_n}$, $x''^{(n)}_{\delta_{(n)}} = x''_{\delta_n}$, и, значит,

$$\rho(x'^{(n)}, x''^{(n)}) < \frac{1}{n}, \quad |f(x''^{(n)}) - f(x'^{(n)})| \geqslant \varepsilon_0. \tag{19.13}$$

Множество E ограничено, а $x'^{(n)} \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, поэтому последовательность $\{x'^{(n)}_n\}$ также ограничена и из нее по теореме Больцано — Вейерштрасса (см. п. 18.1) можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'^{(n_k)}\}$; пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x'^{(n_k)} = \xi$.

Точка ξ является точкой прикосновения замкнутого множества E, и потому $\xi \in E$.

Рассмотрим теперь подпоследовательность $\{x''^{(n_k)}\}$ последовательности $\{x''^{(n)}\}$, соответствующую подпоследовательности $\{x'^{(n_k)}\}$. Докажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} x''^{(n_k)} = \xi$.

Действительно,

$$\rho\left(x''^{(n_k)}, \xi\right) \leqslant \rho\left(x''^{(n_k)}, x'^{(n_k)}\right) + \rho\left(x'^{(n_k)}, \xi\right) < \frac{1}{n_k} + \rho\left(x'^{(n_k)}, \xi\right),$$

и так как

$$\rho\left(x'^{(n_k)}, \xi\right) \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{n_k} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

то и

$$\rho\left(x''^{(n_k)}, \xi\right) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

а это и означает, что

$$x''^{(n_k)} \to \xi \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

В силу непрерывности функции f в точке $\xi \in E$, $f\left(x'^{(n_k)}\right) \to f(\xi)$ и $f\left(x''^{(n_k)}\right) \to f(\xi)$ при $k \to \infty$, и, значит,

$$f\left(x''^{(n_k)}\right) - f\left(x'^{(n_k)}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{19.14}$$

Но по конструкции последовательностей $\{x'^{(n)}\}$ и $\{x''^{(n)}\}$ (см. 19.13)

$$\left| f\left(x''^{(n_k)}\right) - f\left(x'^{(n_k)}\right) \right| \geqslant \varepsilon_0 \tag{19.15}$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Очевидно, условия (19.14) и (19.15) противоречат друг другу. Это и доказывает теорему 5.

Отметим, что при отказе от условий ограниченности и замкнутости множества теорема перестает быть верной. Например, функция $y = \frac{1}{x}$ определена и непрерывна на интервале (0; 1), который хотя и является ограниченным множеством, но не является замкнутым; эта функция неравномерно непрерывна на интервале (0; 1). Функция $y = x^2$ определена и непрерывна на всей вещественной оси, которая хотя и является замкнутым множеством, но не является ограниченным. Эта функция также неравномерно не-

прерывна на вещественной оси. Доказательство неравномерной непрерывности функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = x^2$ на указанных множествах будет дано в этом пункте несколько дальше.

Часто оказывается более удобным несколько другой подход к понятию равномерной непрерывности, а именно с помощью так называемого *модуля непрерывности* функции

Определение 10. *Пусть функция f определена на множестве $E \subset E^n$. Ее модулем непрерывности $\omega(\delta; f; E)$ называется функция*

$$\omega(\delta; f; E) = \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} \{f(x'') - f(x')\}, \quad x' \in E, \quad x'' \in E. \quad (19.16)$$

Часто для краткости вместо $\omega(\delta; f; E)$ пишется просто $\omega(\delta; f)$ или даже $\omega(\delta)$.

Нетрудно убедиться, что

$$\sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} \{f(x') - f(x'')\} = \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} \{|f(x'') - f(x')|\}, \quad x' \in E, \quad x'' \in E,$$

т. е. в правой части равенства (19.16) под знаком верхней грани можно писать или не писать знак абсолютной величины, от чего величина указанной верхней грани не меняется.

Очевидно также, что $\omega(\delta) \geqslant 0$.

Далее, если $0 < \delta_1 < \delta_2$, то

$$\{y : y = f(x'') - f(x'), \quad \rho(x', x'') \leqslant \delta_1\} \subset$$
$$\subset \{y : y = f(x'') - f(x'), \quad \rho(x', x'') \leqslant \delta_2\},$$

откуда

$$\sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta_1} \{f(x'') - f(x')\} \leqslant \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta_2} \{f(x'') - f(x')\},$$

т. е. $\omega(\delta_1) \leqslant \omega(\delta_2)$, иначе говоря, *модуль непрерывности является монотонно возрастающей функцией.*

Задача 12. Пусть G — область в E^n. Доказать, что если $\lim\limits_{\delta \to 0} \frac{\omega(\delta; f; G)}{\delta} = 0$, то f — постоянная функция

Примеры. 1. Найдем $\omega(\delta)$ для функции $y = x^2$, $-\infty < x < +\infty$.

Для любого $\delta > 0$ и любого фиксированного x имеем

$$\omega(\delta; x^2) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} \{x''^2 - x'^2\} \geqslant x^2 - (x - \delta)^2 = 2x\delta - \delta^2. \quad (19.17)$$

Это неравенство верно при любом x_0, и так как при любом фиксированном δ

$$\lim_{x\to+\infty}(2x_0\delta-\delta^2)=+\infty,$$

то из (19.17) получаем $\omega(\delta; x^2)=+\infty$, $-\infty<x<+\infty$.

Найдем теперь модуль непрерывности для функции $y=x^2$ на отрезке $[0; 1]$.

Пусть $0\leqslant x''-\delta\leqslant x'\leqslant x''\leqslant 1$, тогда, в силу неравенства

$$x''^2-x'^2\leqslant x''^2-(x''-\delta)^2=2x''\delta-\delta^2\leqslant 2\delta-\delta^2,$$

получим

$$\omega(\delta; x^2)=\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}\{x''^2-x'^2\}\leqslant 2\delta-\delta^2, \qquad (19.18)$$

с другой стороны, беря $x'=1-\delta$, $x''=1$, будем иметь

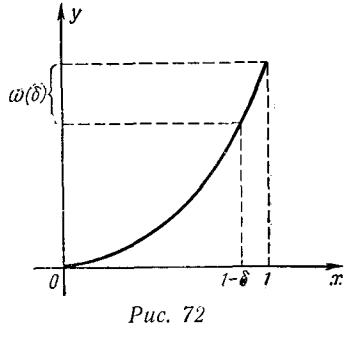


Рис. 72

$$\omega(\delta; x^2)=\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}\{x''^2-x'^2\}\geqslant$$

$$\geqslant 1-(1-\delta)^2=2\delta-\delta^2. \qquad (19.19)$$

Из оценок (19.18) и (19.19) следует, что на отрезке $[0; 1]$

$$\omega(\delta; x^2)=2\delta-\delta^2.$$

Записав это выражение в виде

$$\omega(\delta; x^2)=1^2-(1-\delta)^2, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

видим, что $\omega(\delta; x^2)$ совпадает с приращением функции на участке длины δ, на котором она растет наиболее быстро (рис. 72).

2. Рассмотрим функцию $y=\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$.

С одной стороны,

$$\omega\left(\delta; \sin\frac{1}{x}\right)=\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}\left\{\left|\sin\frac{1}{x''}-\sin\frac{1}{x'}\right|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}\left\{\left|\sin\frac{1}{x''}\right|+\left|\sin\frac{1}{x'}\right|\right\}\leqslant\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}\{2\}=2.$$

С другой стороны, беря $x_n''=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, $x_n'=\dfrac{1}{\frac{3}{2}\pi+2\pi n}$, выбирая и фиксируя n так, что $|x_n'|\leqslant\dfrac{\delta}{2}$, $|x_n''|\leqslant\dfrac{\delta}{2}$ и, значит,

$|x_n''-x_n'|\leqslant|x_n'|+|x_n''|\leqslant\delta$, будем иметь

$$\omega\left(\delta;\sin\frac{1}{x}\right)\geqslant\sin\frac{1}{x_n''}-\sin\frac{1}{x_n'}=1+1=2.$$

Полученные оценки дают

$$\omega\left(\delta;\ \sin\frac{1}{x}\right)=2.$$

3. Рассмотрим функцию $y=\frac{1}{x}$ на интервале $(0;\ 1)$. При любом фиксированном δ, $0<\delta<1$, имеем

$$\omega\left(\delta;\frac{1}{x}\right)=\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}\left\{\frac{1}{x''}-\frac{1}{x'}\right\}=\sup_{x'\leqslant x''\leqslant x'+\delta}\left\{\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0+\delta}\overset{*)}{=}\frac{\delta}{x_0(x_0+\delta)}\to\infty\quad\text{при } x_0\to+0.$$

Таким образом,

$$\omega\left(\delta;\frac{1}{x}\right)=+\infty.$$

В терминах модуля непрерывности равномерная непрерывность может быть выражена следующим образом.

Теорема 6. *Для того чтобы функция f, определенная на множестве E, была равномерно непрерывна на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta;f;E)=0. \tag{19.20}$$

Доказательство. Пусть функция f равномерно непрерывна на множестве E, т. е. выполнены условия (19.10) — (19.11); тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta_\varepsilon=\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)>0$, такое, что если $x'\in E$, $x''\in E$, $\rho(x',x'')<\delta_\varepsilon$, то

$$|f(x'')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что для любого $\delta<\delta_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sup_{\rho(x',x'')\leqslant\delta}\{|f(x'')-f(x')|\}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

т. е. если $0<\delta<\delta_\varepsilon$, то $\omega(\delta)<\varepsilon$, что и означает, что $\lim\limits_{\delta\to+0}\omega(\delta)=0$. Необходимость условия (19.20) доказана.

*) Здесь x_0 таково, что $0<x_0<1-\delta$.

Докажем достаточность условия (19.20). Выполнение условия (19.20) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что если $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, то

$$\omega(\delta; f; E) < \varepsilon,$$

поэтому (см. (19.16)) при $\rho(x', x'') < \delta_\varepsilon$, $x' \in E$, $x'' \in E$, и подавно

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon,$$

т. е. функция f равномерно непрерывна на E.

Теорема доказана.

Мы видели выше, что на отрезке $[0, 1]$ $\omega(\delta; x^2) = 2\delta - \delta^2$, поэтому

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta; x^2) = 0,$$

и, следовательно, функция x^2 равномерно непрерывна на этом отрезке, как и должно быть согласно теореме 5. Модуль непрерывности той же функции x^2, но уже рассматриваемой на всей вещественной оси, так же как и модули непрерывности $\omega\left(\delta; \sin\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, и $\omega\left(\delta; \frac{1}{x}\right)$, $0 < x < 1$, не стремятся к нулю при $\delta \to +0$, и потому все эти функции не являются равномерно непрерывными на соответствующих множествах.

Введем теперь еще некоторые понятия, полезные для дальнейшего.

Определение 11. *Пусть $E \subset E^n$. Величина*

$$d = \sup_{x' \in E,\ x'' \in E} \rho(x', x'')$$

называется диаметром множества E и обозначается $d(E)$.

Упражнения. 5. Пусть Q_0 — n-мерный шар с центром в некоторой точке $x^{(0)}$ и радиусом r: $Q^n = O(x^{(0)}, r)$, тогда $d(Q^n) = 2r$.

6. Доказать, что множество $E \subset E^n$ ограничено тогда и только тогда, когда $d(E) < +\infty$.

Определение 12. *Пусть функция f определена на множестве E, тогда величина $\omega(d(E); f; E)$ называется колебанием функции f на множестве E и обозначается $\omega(f; E)$ или просто $\omega(f)$.*

Очевидно, что в силу (19.16)

$$\omega(f; E) = \sup_{x' \in E,\ x'' \in E} \{f(x'') - f(x')\}.$$

Заключительное замечание. Из сказанного в этом параграфе следует, в частности, что в ряде вопросов, относящихся

к функциям многих переменных, всю их специфику можно в достаточной мере усмотреть уже в двумерном или трехмерном случае. Благодаря удачно выбранным определениям и обозначениям доказательства теорем автоматически переносятся со случая $n = 2$ на произвольный n-мерный случай, иногда лишь приводя к некоторому техническому усложнению записи. Случай же $n = 2$ имеет преимущество геометрической наглядности и более простой записи, когда в ней участвуют координаты точек. Поэтому для большей ясности и простоты изложения мы, как правило, будем подробно рассматривать лишь случаи $n = 2$ или $n = 3$, а в случае произвольного n — лишь формулировать соответствующие результаты или даже только отмечать возможность их обобщения на случай произвольного n. Если же при рассмотрении какого-либо вопроса при $n > 3$ возникают какие-либо специфические трудности, то этот вопрос будет детально рассматриваться в общем случае.

§ 20. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

20.1. Частные производные и частные дифференциалы

Рассмотрим сначала случай функций трех переменных.

Определение 1. *Пусть в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0, z_0) *задана функция* $u = u(x, y, z)$. *Фиксируя переменные* y *и* z *так, что* $y = y_0$, $z = z_0$, *получим функцию одного переменного* x: $u = u(x, y_0, z_0)$. *Обычная производная* (см. п. 9.1) *этой функции в точке* $x = x_0$ *называется частной производной функции* $u(x, y, z)$ *в точке* (x_0, y_0, z_0) *по* x *и обозначается* $\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$.

Таким образом,

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \left.\frac{du(x, y_0, z_0)}{dx}\right|_{x = x_0}.$$

Если вспомнить определение обычной производной $\frac{du}{dx}$ (см. п. 9.1), то, согласно этому определению, можно написать

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x},$$

или, если ввести обозначение

$$u(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0) = \Delta_x u$$

($\Delta_x u$ — приращение функции по переменной x),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

Аналогично вводятся частные производные по y и z:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = \left.\frac{du(x_0, y, z_0)}{dy}\right|_{y=y_0},$$

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = \left.\frac{du(x_0, y_0, z)}{dz}\right|_{z_0=z_0},$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\partial z},$$

где $\Delta_y u$ и $\Delta_z u$ — приращения функции соответственно по переменным y и z.

По аналогии с функциями одного переменного линейные функции $\frac{\partial u}{\partial x} dx$, $\frac{\partial u}{\partial y} dy$, $\frac{\partial u}{\partial z} dz$ переменных dx, dy, dz, называемых *дифференциалами независимых переменных*, называются *частными дифференциалами* функции $u(x, y, z)$ соответственно по переменным x, y, z и обозначаются

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Аналогичные определения имеют место для любого числа переменных.

Если функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x^{(0)})$, то, по определению,

$$\frac{\partial f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{\partial x_i} = \left.\frac{df(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{dx_i}\right|_{x_i = x_i^{(0)}}, \quad (20.1)$$

или, что то же, опуская обозначение аргумента,

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} y}{\Delta x_i},$$

где

$$\Delta_{x_i} y = f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

Для обозначения частной производной $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ применяются также обозначения y_{x_i} или f_{x_i}.

Частный дифференциал $d_{x_i} y$ определяется по формуле

$$d_{x_i} y = \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i, \quad -\infty < dx_i < +\infty, \tag{20.2}$$

и тем самым является линейной функцией переменной dx_i, называемой *дифференциалом независимой переменной* x_i. Здесь везде $i = 1, 2, \ldots, n$. В случае $n = 1$ частная производная совпадает с обычной производной, а частный дифференциал — с обычным дифференциалом.

Подчеркнем, что $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ — единый символ, т. е. в нем числитель и знаменатель не имеют самостоятельного смысла. С другой стороны, частная производная $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, конечно, может быть записана и в виде частного двух дифференциалов:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{d_{x_i} y}{dx_i}.$$

Из определения частных производных, как обычных производных при условии фиксирования всех переменных, кроме одной, по которой берется производная, следует, что при вычислении частных производных можно пользоваться правилами вычисления обычных производных.

Пусть, например, требуется найти производную $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z = x y e^{\frac{x}{y}}$. Для этого, зафиксировав в этой формуле x, получим функцию одного переменного y; вычисляя ее производную, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x e^{\frac{x}{y}} + x y e^{\frac{x}{y}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x(y-x) e^{\frac{x}{y}}}{y}.$$

В заключение этого пункта отметим, что из непрерывности в данной точке функции n переменных не вытекает существование у нее в этой точке частных производных. Соответствующий пример в случае $n = 1$ был приведен ранее (см. п. 9.2). Важно заметить, что при $n \geqslant 2$ из существования даже всех частных производных в некоторой точке не следует непрерывность функции в этой точке*).

*) Напомним, что при $n = 1$, т. е. для функции одной переменной, из существования в точке производной вытекает и непрерывность функции в этой точке (см. п. 9.2).

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим функцию $f(x\,y)$, равную 0, если $xy = 0$, и 1, если $xy \neq 0$. Очевидно, $f(x, 0) \equiv f(0, y) \equiv 0$, и, значит,

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

Однако эта функция разрывна в точке (0, 0), так как, например, ее предел вдоль прямой $y = x$ при $(x, y) \to (0, 0)$ равен 1, а $f(0, 0) = 0$.

Более того, существуют функции, имеющие частные производные во всех точках и все-таки разрывные. Примером такой функции является функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2 > 0, \\ 0 & \text{при } x = y = 0. \end{cases} \tag{20.3}$$

Эта функция имеет частные производные во всей плоскости и разрывна в точке (0, 0) (почему?).

20.2. Дифференцируемость функции в точке

Рассмотрим сначала случай функций двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой δ-окрестности $O = O(M_0; \delta)$ точки $M_0 = (x_0, y_0)$ и пусть $M = (x, y) \in O(M_0; \delta)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ (рис. 73) и, значит, $\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$. Пусть, наконец,

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

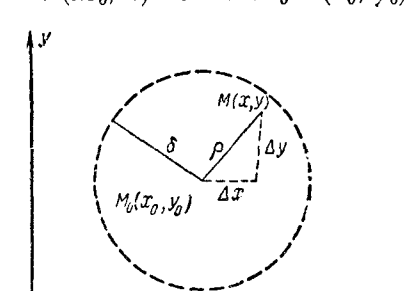


Рис. 73

Обычно Δz называется *полным приращением функции*; это название объясняется тем, что здесь, вообще говоря, все переменные получают приращения, отличные от нуля.

Определение 2. *Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если существуют два числа A и B, такие, что*

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \tag{20.4}$$

где

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho, \quad \rho \neq 0,$$
$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0^{*}). \tag{20.5}$$

Из (20.4) следует, что $\alpha(0, 0) = 0$.

В случае дифференцируемости функции f в точке (x_0, y_0) линейная функция $A\Delta x + B\Delta y$ переменных Δx и Δy называется полным дифференциалом, или просто дифференциалом, функции f в точке (x_0, y_0) и обозначается dz.

Таким образом,

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Вместо Δx и Δy употребляются также равнозначные обозначения dx и dy, т. е. пишут

$$dz = Adx + Bdy.$$

Из (20.5) следует, что

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0. \tag{20.6}$$

Функции $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, обладающие свойством (20.6), будем обозначать по аналогии с функциями одного переменного $o(\rho)$ при $\rho \to 0$**). Применяя это обозначение, определение дифференцируемости можно переписать в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho). \tag{20.7}$$

Лемма. *Условие* (20.5) *эквивалентно условию*

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \quad \rho \neq 0, \tag{20.8}$$

где

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0.$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (20.5), т. е. $\alpha = \varepsilon\rho$, $\rho \neq 0$, где $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$, тогда

$$\alpha = \varepsilon\rho = \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} =$$

$$= \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta x + \varepsilon\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta y = \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

---

*) Напомним, что, согласно сделанному нами соглашению, запись $\lim_{\rho \to 0} f$ равносильна записи $\lim_{M \to M_0} f$, где $\rho = \rho(M, M_0)$.

**) Вообще для функций α и β многих переменных мы будем писать $\alpha = o(\beta)$ при $x \to x^{(0)}$, $x \in E^n$, $x^{(0)} \in E^n$, если $\alpha(x) = \varepsilon(x)\beta(x)$, где

$$\lim_{x \to x^{(0)}} \varepsilon(x) = 0.$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon \Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

Замечая, что

$$\left| \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leqslant 1, \quad \left| \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leqslant 1,$$

имеем $|\varepsilon_1| \leqslant |\varepsilon|$, $|\varepsilon_2| \leqslant |\varepsilon|$, откуда $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0$, т. е. представление (20.8) получено.

Пусть, наоборот, выполнено условие (20.8), т. е.

$$\alpha = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \quad \rho \neq 0,$$

где $\varepsilon_1 \to 0$ и $\varepsilon_2 \to 0$ при $\rho \to 0$; тогда

$$\alpha = \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_2 \right) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \varepsilon \rho,$$

где

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_2$$

и, значит, $|\varepsilon| \leqslant |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$, поэтому $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$, т. е. представление (20.5) получено.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то она непрерывна в этой точке.*

Действительно, так как $|\Delta x| \leqslant \rho$ и $|\Delta y| \leqslant \rho$, то из формул (20.4) и (20.5) следует, что $\Delta z \to 0$ при $\rho \to 0$, что и означает непрерывность функции f в точке (x_0, y_0).

Теорема 2. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и $dz = A\Delta x + B\Delta y$ — ее дифференциал в этой точке, то в точке (x_0, y_0) у функции f существуют все частные производные и*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = B. \tag{20.9}$$

Таким образом,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{20.10}$$

Доказательство. Согласно определению дифференцируемости (см. (20.4) и (20.8)),

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

где

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0. \tag{20.11}$$

Полагая $\Delta y = 0$, получим

$$\Delta z = \Delta_x z = A\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = 0,$$

откуда

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \varepsilon_1, \tag{20.12}$$

где при $\Delta x \to 0$ правая часть стремится к пределу, равному A, поэтому и левая часть при $\Delta x \to 0$ имеет тот же предел, а это и означает (см. (20.1)), что в точке (x_0, y_0) существует частная производная $\frac{\partial z}{\partial x} = A$. Аналогично, полагая в (20.4) $\Delta x = 0$ и переходя к пределу, получим $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Таким образом, формулы (20.9) доказаны.

Следствие. *Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то она имеет единственный дифференциал.*

Единственность дифференциала непосредственно вытекает из формул (20.9), так как частные производные в данной точке определяются однозначно.

Вспоминая формулы для частных дифференциалов (см. (20.2)), формулу (20.10) можно переписать в виде

$$dz = d_x z + d_y z,$$

т. е. полный дифференциал функции (когда он существует) является суммой ее частных дифференциалов.

Заметим, что утверждение, обратное теореме 2, не имеет места: существуют функции, имеющие все частные производные во всех точках плоскости, но не дифференцируемые в некоторой точке. Примером такой функции является функция (20.3), приведенная в конце предыдущего пункта: в точке (0, 0) эта функция не непрерывна, откуда в силу теоремы 1 вытекает, что в точке (0, 0) эта функция и не дифференцируема.

Из сказанного следует, что не всегда выражение $d_x z + d_y z$, когда оно имеет смысл, является полным дифференциалом функции. Связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием в этой точке частных производных сложнее, чем связь между дифференцируемостью и существованием производной у функции одной переменной.

Сформулируем достаточные условия в терминах свойств частных производных для дифференцируемости функции.

Теорема 3. *Пусть функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, которые непре-*

рывны в самой точке (x_0, y_0), *тогда функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в этой точке.*

Доказательство. Обозначим через $O(\delta)$ δ-окрестность точки (x_0, y_0), в которой определена вместе со своими частными производными f_x и f_y функция f. Выберем Δx и Δy так, чтобы $(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \in O(\delta)$. Замечая, что

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0) =$$
$$= [f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0 + \Delta y)] + [f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)],$$

применим к выражениям, стоящим в квадратных скобках и являющимся приращениями функций только по одной переменной, формулы конечных приращений Лагранжа (см. п. 11.2). Тогда

$$\Delta z = f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x,\ y_0 + \Delta y)\,\Delta x + f_y(x_0,\ y_0 + \theta_2 \Delta y)\,\Delta y,$$
$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1, \tag{20.13}$$

причем θ_1 и θ_2 зависят, конечно, от выбора точки $(x_0 + \Delta x, \quad y_0 + \Delta y)$, т. е. от Δx и Δy.

Если

$$\begin{aligned} f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f_x(x_0,\ y_0) &= \varepsilon_1, \\ f_y(x_0,\ y_0 + \theta_2 \Delta y) - f_y(x_0,\ y_0) &= \varepsilon_2, \end{aligned} \tag{20.14}$$

то в силу непрерывности частных производных f_x и f_y в точке (x_0, y_0) имеем

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0. \tag{20.15}$$

Подставляя (20.14) в (20.13), получим

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \tag{20.16}$$

что в силу выполнения условий (20.15) и означает дифференцируемость функции f в точке (x_0, y_0) (см. (20.4) и (20.9)).

Теорема доказана.

Эта теорема имеет важное значение, связанное с тем, что понятие дифференцируемости функции играет первостепенную роль в ряде разделов теории функций многих переменных. Однако непосредственная проверка дифференцируемости функции (например, для выяснения возможности применения тех или иных теорем) часто бывает затруднительна, в то время как проверка непрерывности частных производных, для вычисления которых имеется удобный аналитический аппарат, оказывается проще.

Определение 3. *Функция, имеющая в некоторой точке (или соответственно на некотором открытом множестве) непрерывные частные производные, называется непрерывно дифференцируемой в этой точке (соответственно на этом множестве).*

В дальнейшем нам понадобятся некоторые дополнительные свойства функций ε_1 и ε_2 из формулы (20.16).

Определение 4. *Пусть A и B — два плоских множества, $A \subset E^2_{xy}$, $B \subset E^2_{uv}$, и пусть функция $f = f(x, y, u, v)$ определена для $(x, y) \in A$, $(u, v) \in B$.*

Функция f называется равномерно стремящейся к нулю на множестве A при $(u, v) \to (u_0, v_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех (u, v), удовлетворяющих условию $\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2} < \delta$, $(u, v) \neq (u_0, v_0)$, и всех $(x, y) \in A$ выполняется условие $|f(x, y, u, v)| < \varepsilon$.

Общее определение равномерного стремления функции к пределу будет дано в п. 39.4.

Теорема 4. *Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные производные $f_x(x, y)$ и $f_y(x, y)$ на открытом множестве $G \subset E^2$. Тогда для ее приращения Δz существует такое представление $\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$, что функции $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x, y, \Delta x, \Delta y)$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$ равномерно стремятся к нулю при $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ на любом замкнутом ограниченном множестве $A \subset G$.*

Доказательство. Пусть A — некоторое ограниченное замкнутое множество, лежащее в G. Тогда замкнутые множества A и $E^2 \setminus G$ не пересекаются, и так как A — ограничено, то $d = \rho(A, E^2 \setminus G) > 0$ (см. лемму 4 п. 18.2).

Множество

$$A_{\frac{d}{2}} = \left\{(x, y):\ \rho((x, y), A) \leqslant \frac{d}{2}\right\}$$

содержится в множестве G и является ограниченным замкнутым множеством (см. лемму 6 п. 18.2).

Пусть теперь $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \frac{d}{2}$, тогда при $(x_0, y_0) \in A$ получим (см. (20.13))

$$(x_0 + \theta_1 \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \in A_{\frac{d}{2}},\quad (x_0,\ y_0 + \theta_2 \Delta y) \in A_{\frac{d}{2}},$$

и, следовательно, согласно формулам (20.14) имеем

$$|\varepsilon_1| \leqslant \omega\left(\rho; f_x; A_{\frac{d}{2}}\right),\quad |\varepsilon_2| \leqslant \omega\left(\rho; f_y; A_{\frac{d}{2}}\right),$$

где в правых частях неравенств стоят соответственно модули непрерывности функций f_x и f_y. Из непрерывности частных производных f_x и f_y на ограниченном замкнутом множестве $A_{\frac{d}{2}}$ следует, что

$$\lim_{\rho \to 0} \omega\left(\rho; f_x; A_{\frac{d}{2}}\right) = 0 \text{ и } \lim_{\rho \to 0} \omega\left(\rho; f_y; A_{\frac{d}{2}}\right) = 0.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $\rho < \delta$ выполняются неравенства

$$\omega\left(\rho; f_x; A_{\frac{d}{2}}\right) < \varepsilon, \quad \omega\left(\rho; f_y; A_{\frac{d}{2}}\right) < \varepsilon.$$

Поэтому для всех $\rho < \delta$ и всех $(x_0, y_0) \in A$ справедливы неравенства

$$|\varepsilon_1| < \varepsilon, \quad |\varepsilon_2| < \varepsilon.$$

Это и означает равномерное стремление к нулю при $\rho \to 0$ функций ε_1 и ε_2 на множестве A.

Теорема доказана.

Все определения и утверждения этого пункта переносятся и на случай функции $y = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, любого числа n переменных, определенной в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Например, условие дифференцируемости в данной точке $x^{(0)}$ в общем случае выглядит так:

$$\Delta y = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{20.17}$$

где

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}, \quad \Delta y = f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}),$$

$$\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

причем в этом случае

$$A_i = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, если функция f дифференцируема, то

$$f(x) = f(x^{(0)}) + A_1(x_1 - x_1^{(0)}) + \ldots + A_n(x_n - x_n^{(0)}) + o(\rho), \ \rho \to 0, \tag{20.18}$$

т. е. функция f в окрестности данной точки с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x - x_i^{(0)})^2}$, равна линейной функции*). Образно говоря, дифференцируемость функции в данной точке означает, что функция f «почти линейна» в окрестности этой точки; точный смысл выражения «почти линейна» заключается в формуле (20.18).

В случае, когда имеет место (20.17), линейная функция $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \Delta x_n$ n переменных $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ (здесь вместо

*) Функции вида $y = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$, где c_i — постоянные, называются *линейными функциями n переменных*, или *линейными функциями точки* $x \in E^n$.

$x^{(0)}$ написано x) называется *дифференциалом функции*, или, подробнее, полным дифференциалом функции в данной точке x и обозначается $df(x)$:

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\Delta x_n. \tag{20.19}$$

Дифференциал, как и всякая линейная функция n переменных, определен на всем n-мерном пространстве E^n. Таким образом, *формула* (20.19) *имеет смысл для всех значений* Δx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, в то время как *формула* (20.17) — *только для тех, которые не выводят за область определения функции* f.

Переменные Δx_i называются также дифференциалами переменных x_i и обозначаются dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. В этих обозначениях дифференциал функции f записывается в виде

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}dx_n. \tag{20.20}$$

Очевидно, что

$$\Delta f(x) = df(x) + o(\rho) \quad \text{при } \rho \to 0.$$

Если же рассматривать дифференциал и при изменении точки $x = (x_i)$, то он будет уже являться функцией от $2n$ переменных: $x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n$.

Теоремы 1—4 настоящего параграфа очевидным образом обобщаются на функции n переменных, поэтому мы не будем приводить их формулировки.

20.3. Дифференцирование сложной функции

Теорема 5. *Пусть функции* $x(t)$ *и* $y(t)$ *одного переменного* t *дифференцируемы в точке* t_0 (*что, как мы знаем, эквивалентно существованию у них производных в точке* t_0, *см. п.* 9.2) *и пусть* $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. *Если функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* (x_0, y_0), *то в некоторой окрестности точки* t_0 *имеет смысл суперпозиция* $f(x(t), y(t))$, *сложная функция* $z = f(x(t), y(t))$ *в точке* t_0 *имеет производную* $\frac{dz}{dt}$ *и в этой точке*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \tag{20.21}$$

или, подробнее,

$$\frac{\partial f(x(t_0), y(t_0))}{dt} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{dx(t_0)}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{dy(t_0)}{dt}.$$

Доказательство. В силу дифференцируемости функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) она определена в некоторой окрестности этой точки. Из дифференцируемости же функций $x(t)$ и $y(t)$ следует их непрерывность в точке t_0. Поэтому, согласно замечанию к теореме 2 в п. 19.3, в некоторой окрестности точки t_0 определена сложная функция $f(x(t), y(t))$.

Дифференцируемость функции $z=f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) означает, что ее полное приращение

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, \quad y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

представимо в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}, \tag{20.22}$$

где функция $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ такова, что

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Здесь, как обычно, $\rho = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Доопределим функцию $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ в точке $(0, 0)$, положив $\varepsilon(0, 0)=0$ (ср. с доказательством теоремы 6 в п. 9.7). Так доопределенная функция $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ является непрерывной в точке $(0, 0)$.

Пусть теперь Δt — приращение переменной t и

$$\Delta x = x(t_0+\Delta t) - x(t_0), \quad \Delta y = y(t_0+\Delta t) - y(t_0).$$

Разделим обе части равенства (20.22) на Δt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}. \tag{20.23}$$

При $\Delta t\to 0$ в силу непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ в точке t_0 получим $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$, а значит, и $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\rho = 0$. Отсюда по теореме о суперпозиции непрерывных функций (см. п. 19.3)

$$\lim_{\Delta t\to 0}\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Далее,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)}.$$

Из всего этого следует, что при $\Delta t\to 0$ правая часть формулы (20.23) стремится к конечному пределу $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ $(t=t_0)$, поэтому и левая часть этой формулы, т. е. $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ стремится к тому

же пределу, а это и означает, что в точке t_0 существует производная $\frac{dz}{dt}$ и выражается формулой (20.21).

Теорема доказана.

Отметим, что, хотя в окончательную формулу производной сложной функции (20.21) входят только частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$, по ходу доказательства существенно использовалось более сильное свойство этой функции, чем существование частных производных, а именно ее дифференцируемость.

Упражнение 1. Показать, что при отказе от требования дифференцируемости функции $z = f(x, y)$, а лишь при предположении существования частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке (x_0, y_0) и существовании производных $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ в точке t_0 формула (20.21), вообще говоря, не имеет места и, более того, сложная функция $f(x(t), y(t))$ (предполагается, конечно, что она имеет смысл), вообще говоря, может не иметь производной в точке t_0.

Следствие. *Пусть теперь функции* $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ *определены в некоторой окрестности точки* (u_0, v_0), *а функция* $z = f(x, y)$ *определена в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0), *где* $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = (u_0, v_0)$, *и в некоторой окрестности точки* (u_0, v_0) *имеет смысл суперпозиция* $f(x(u, v), y(u, v))$.

Если функция $f(x, y)$ *дифференцируема в точке* (x_0, y_0) *и существуют частные производные* $\frac{\partial x}{\partial u}$ *и* $\frac{\partial y}{\partial u}$ *в точке* (u_0, v_0), *то в точке* (u_0, v_0) *существует частная производная* $\frac{\partial z}{\partial u}$ *сложной функции* $z = f(x(u, v), y(u, v))$.

Фиксируя $v = v_0$ и рассматривая сложную функцию $z = f(x(u, v_0), y(u, v_0))$ одного переменного u, согласно формуле (20.21), получим, что производная $\frac{\partial z}{\partial u}$ в точке (u_0, v_0) существует и выражается по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{20.24}$$

Аналогично, если в точке (u_0, v_0) существуют частные производные $\frac{\partial x}{\partial v}$ и $\frac{\partial y}{\partial v}$, то у сложной функции $z = f(x(u, v), y(u, v))$ существует

в точке (u_0, v_0) частная производная по v и для нее имеет место формула

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{20.25}$$

Следствие доказано.

В общем случае *пусть в окрестности точки* $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *задана функция* $y = y(x_1, \ldots, x_n)$, *пусть заданы функции* $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *такие, что* $x_i(t_1^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)}) = x_i^{(0)}$. *Если функция* $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ *дифференцируема в точке* $x^{(0)}$, *если в точке* $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)})$ *существуют частные производные* $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *и если в некоторой окрестности точки* $t^{(0)}$ *имеет смысл суперпозиция* $y(x(t))$, *то сложная функция* $y(x(t))$ *имеет в точке* $t^{(0)}$ *частные производные* $\frac{\partial y}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, *причем*

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{20.26}$$

20.4. Инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных. Правила вычисления дифференциалов

Теорема 6. *Пусть функция* $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, *определена в некоторой окрестности точки* $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, *а функции* $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *определены в некоторой окрестности точки* $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)})$ *и пусть* $x_i^{(0)} = x_i(t^{(0)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда, если функция $f(x)$ *дифференцируема в точке* $x^{(0)}$, *а функции* $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *дифференцируемы в точке* $t^{(0)}$, *то сложная функция* $f(x(t)) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *определена в некоторой окрестности точки* $t^{(0)}$ *и дифференцируема в этой точке.*

При этом дифференциал df *функции* $f(x(t))$ *в точке* $t^{(0)}$ *может быть записан в следующих двух видах:*

$$df = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f(x(t^{(0)}))}{\partial t_j}\, dt_j, \tag{20.27}$$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\, dx_i, \quad \text{где} \quad dx_i = dx_i(t)|_{t = t^{(0)}}. \tag{20.28}$$

Доказательство. Поскольку функции $x_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$, определены в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ и поскольку из дифференцируемости функций следует их непрерывность, то сложная функция $f(x(t))$ определена в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ (см. замечание к теореме 2 п. 19.3).

Зафиксируем какие-либо два числа $\delta > 0$ и $\eta > 0$ так, чтобы функция $f(x)$ была бы определена на η-окрестности точки $x^{(0)}$, функции $x_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$, на δ-окрестности точки $t^{(0)}$ и чтобы

$$(x_1(t), ..., x_n(t)) \in O(x^{(0)}; \eta) \text{ при } t \in O(t^{(0)}; \delta).$$

Тогда на окрестности $O(t^{(0)}; \delta)$ определена сложная функция $f(x(t))$. Возможность выбора таких чисел δ и η (очевидно, δ зависит от выбора η) была показана в п. 19.2.

Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$, поэтому при

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} < \eta$$

имеем

$$\Delta f = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, ..., x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \Delta x_i + \varepsilon r, \tag{20.29}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x_1, ..., \Delta x_n)$ таково, что $\lim\limits_{r \to 0} \varepsilon = 0$. Положим $\varepsilon(0, ..., 0) = 0$. Доопределенная таким образом функция ε является непрерывной в точке $(0, ..., 0)$.

В силу дифференцируемости функций $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, ... n$, в точке $t^{(0)}$ при

$$\rho = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \Delta t_j^2}$$

получим

$$\Delta x_i = x_i(t_1^{(0)} + \Delta t_1, ..., t_k^{(0)} + \Delta t_k) - x_i(t_1^{(0)}, ..., t_k^{(0)}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta x_i + \varepsilon_i \rho, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{20.30}$$

где

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Подставляя значения Δx_i из (20.30) в (20.29), получаем

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_j + \beta, \tag{20.31}$$

где

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \varepsilon_i \rho + \varepsilon r. \tag{20.32}$$

Переставляя порядок суммирования в (20.31), имеем

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \right) \Delta t_j + \beta. \tag{20.33}$$

Теперь, для того чтобы доказать, что сложная функция $f(x(t))$ дифференцируема в точке $t^{(0)}$, надо показать, что $\beta = o(\rho)$ при $\rho \to 0$.

В силу непрерывности функций $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в точке $t^{(0)}$ имеем $\lim\limits_{\rho \to 0} \Delta x_i = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{\rho \to 0} r = 0$. Отсюда в силу теоремы о суперпозиции непрерывных функций (см. п. 19.2)

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon = 0. \tag{20.34}$$

Из (20.32) имеем

$$\frac{\beta}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \varepsilon_i + \varepsilon \frac{r}{\rho}. \tag{20.35}$$

Докажем, что отношение $\frac{r}{\rho}$ ограничено. Используя формулы (20.30), получаем

$$\frac{r}{\rho} = \frac{1}{\rho} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} \leqslant \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i| \text{ *)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \left| \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \right| \frac{|\Delta t_j|}{\rho} + \varepsilon_i.$$

---

*) Мы воспользовались неравенством $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$, которое является следствием очевидного неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| \right)^2.$$

Поскольку $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_i=0$, то в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ функции ε_i ограничены, и так как $\frac{|\Delta t_j|}{\rho}\leqslant 1$, то функция $\frac{r}{\rho}$ ограничена в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$. Поэтому из (20.34) и (20.35) следует, что

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\beta}{\rho}=0,$$

т. е. что $\beta=o(\rho)$ при $\rho\to 0$. Дифференцируемость сложной функции $f(x(t))$ в точке $t^{(0)}$ доказана.

Из формулы (20.31) имеем

$$df(x^{(0)})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j}\Delta t_j.$$

Отсюда, замечая, что

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j}\Delta t_j=dx_i,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

мы и получим формулу (20.28). Формула же (20.27) является обычной формулой для дифференциала (см. 20.19).

Теорема доказана.

Формально обе записи (20.27) и (20.28) дифференциала функции выглядят одинаково: в обеих формулах дифференциал равен сумме произведений частных производных на соответствующие дифференциалы, однако в случае формулы (20.27) dt_j являются дифференциалами независимых переменных, а в случае формулы (20.28) dx_i суть дифференциалы функций. Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала* относительно выбора переменных.

Замечание. Из формулы (20.33) следует, что

$$df(x^{(0)})=\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j}\right)dt_j.$$

Но коэффициенты дифференциала функции при дифференциалах независимых переменных определяются однозначно и равны соответствующим частным производным, поэтому, сравнивая эту формулу с формулой (20.27), получим

$$\frac{\partial f}{\partial t_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j},$$

т. е. снова формулу (20.26). Правда, на этот раз она выведена при более сильных ограничениях, чем раньше; предполагалась диффе-

ренцируемость функций $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в то время как в п. 20.3 — лишь существование у этих функций соответствующих частных производных.

Инвариантность формы первого дифференциала широко используется при практическом вычислении дифференциалов и частных производных. Если u и v суть функции какого-то числа переменных, то с помощью формулы (20.28) легко получаются следующие:

$$1.\ d(u+v) = du + dv.$$
$$2.\ d(uv) = v\,du + u\,dv. \qquad (20.36)$$
$$3.\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Докажем, например, формулу 3. Пусть $z = \frac{u}{v}$, где $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, $v = v(x_1, \ldots, x_n)$. Замечая, что $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}$ и $\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$, имеем, согласно формуле (20.28),

$$dz = \frac{1}{v}\,du - \frac{u}{v^2}\,dv = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Формула 3 доказана.

При вычислении конкретных дифференциалов функций многих переменных можно широко использовать формулы, полученные нами раньше (см. § 9) для дифференциалов элементарных функций. Заметим для этого следующее: пусть функция $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ представлена в виде $y = F(u)$, где $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда при соответствующих предположениях, согласно формуле (20.28),

$$dy = F'(u)\,du, \quad u = u(x_1, \ldots, x_n).$$

Например, если $y = \sin u$, то $dy = \cos u\,du$; $y = \ln u$, то $dy = \frac{du}{u}$; если $y = \operatorname{arctg} u$, то $dy = \frac{du}{1+u^2}$ и т. д. (подчеркнем, что здесь везде $u = u(x_1, \ldots, x_n)$).

В качестве примера найдем дифференциал функции $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Вычисления производятся в следующем порядке:

$$dz = d\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\,d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}.$$

Если требуется вычислить частные производные функции многих переменных, особенно если надо вычислить все производные

то целесообразно вычислить дифференциал этой функции, тогда искомыми частными производными будут коэффициенты при соответствующих дифференциалах.

Так, в рассмотренном примере $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; беря коэффициенты при dx и dy из найденного нами выражения для дифференциала, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Замечание. Всякую функцию $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ *от* n *переменных можно рассматривать в определенном смысле и как функцию от любого числа* $n+m > n$ *переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m}$. Именно, для всякой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, заданной на множестве $E \subset E^n$, определим функцию $f^*(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m})$ на множество точек $(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m})$, таких, что $(x_1, \ldots, x_n) \in E$, $-\infty < x_j < +\infty$, $j = n+1, \ldots, n+m$, следующим образом:

$$f^*(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m}) = f(x_1, \ldots, x_n). \tag{20.37}$$

Таким образом, рассмотрение функции n переменных, как функции $n+m$ переменных, означает фактически продолжение по формуле (20.37) функции f с множества ее определения $E \subset E^n$ на множество

$$E^* = \{(x_1, \ldots, x_{n+m}): (x_1, \ldots, x_n) \in E, -\infty < x_j < +\infty, j = n+1, \ldots, n+m\},$$

лежащее уже в пространстве E^{n+m}. Для функции f^*, полученной после такого продолжения, имеем

$$\frac{\partial f^*(x_1, \ldots, x_{n+m})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial f^*(x_1, \ldots, x_{n+m})}{\partial x_j} = 0, \quad j = n+1, \ldots, n+m,$$

поэтому

$$df^*(x_1, \ldots, x_{n+m}) = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f^*(x_1, \ldots, x_{n+m})}{\partial x_i} dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} dx_i = df(x_1, \ldots, x_n).$$

Например, когда мы говорим, что функцию одного переменного $z = f(x)$, определенную на некотором интервале (a, b), мы рассматриваем как функцию двух переменных $f(x) = F(x, y)$, $x \in (a, b)$,

$-\infty < y < +\infty$, это означает, что функция $F(x, y)$ является постоянной, равной $f(x)$ на любой прямой, проходящей через точку x интервала (a, b) оси Ox параллельно оси Oy. При этом

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = f'(x), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0, \quad dF(x\,y) = df(x),$$
$$a < x < b, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Полезно для дальнейшего отметить в известном смысле обратный факт. Пусть $E \subset E^n$. Если функция $f^*(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ определена на множестве

$$E^* = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) : (x_1, \ldots, x_n) \in E, a < x_{n+1} < b\}$$

и

$$\frac{\partial f^*(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} = 0 \text{ на } E^*, \tag{20.38}$$

то существует функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных, определенная на множестве E, и такая, что

$$f^*(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_i, \ldots, x_n)$$

для всех

$$(x_1, \ldots, x_n) \in E, \; x_{n+1} \in (a, b).$$

В этом случае говорят, что *функция f^* фактически не зависит от переменной x_{n+1}*. В самом деле, из условия (20.38) следует, что функция f^* постоянна как функция x_{n+1} (см. лемму п. 11.2) при фиксированной точке $(x_1, \ldots, x_n)$, т. е., зафиксировав какое-либо $c \in (a, b)$ для любой точки $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ и $x_{n+1} \in (a, b)$ имеем

$$f^*(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f(x_1, \ldots, x_n, c).$$

Искомая функция f, очевидно, определяется равенством

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_n, c),$$

причем она не зависит от выбора $c \in (a, b)$.

Из вышесказанного, в частности, следует, что формулы 1—3 для дифференциалов остаются справедливыми и в том случае, когда числа переменных, от которых зависят функции u и v,— различны, так как всегда в силу указанного приема этот случай можно свести к вышеразобранному случаю одного числа переменных.

20.5. Геометрический смысл частных производных и полного дифференциала

Для большей геометрической наглядности и для того, чтобы не вводить новых понятий, в этом пункте ограничимся рассмотрением функций двух переменных.

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную на плоском открытом множестве G, т. е. множестве G, лежащем на плоскости E^2. Пусть $(x_0, y_0) \in G$ и пусть в точке (x_0, y_0) существует частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$. Ее геометрический смысл сразу получается из определения частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ как обычной производной функции

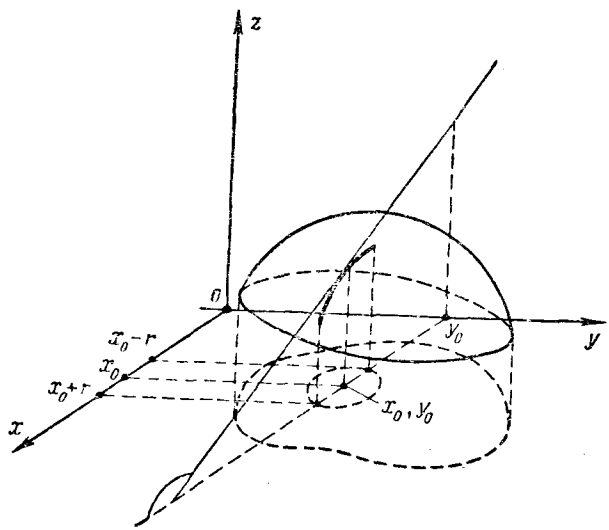


Рис. 74

$f(x, y)$ по x при фиксированном y и из геометрического смысла обычной производной (см. п. 9.3). В самом деле, возьмем замкнутый круг Q радиуса r с центром в точке (x_0, y_0) и лежащий в G*). Пусть γ — кривая, заданная представлением

$$z = f(x, y_0)$$
$$y = y_0$$
$$x_0 - r \leqslant x \leqslant x_0 + r,$$

т. е. кривая, которая получается сечением графика функции $z = f(x, y)$, $(x, y) \in Q$ плоскостью $y = y_0$ (рис. 74).

*) Такой круг Q всегда существует. Действительно, в силу определения открытого множества существует такая δ-окрестность O точки (x_0, y_0), что $O \subset G$. Тогда замкнутый круг Q радиуса $\frac{\delta}{2}$ с центром в точке (x_0, y_0) будет заведомо лежать в G.

Как известно,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{df(x, y_0)}{dx}\Big|_{x=x_0} = \operatorname{tg}\alpha,$$

где α — угол, образованный касательной к графику функции $f(x, y_0)$ в точке $(x_0, f(x_0, y_0))$ с осью Ox, т. е. угол, образованный касательной к кривой γ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ с осью Ox.

Таким образом,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha$$

— в этом и состоит геометрический смысл частной производной. Совершенно аналогично устанавливается и геометрический смысл частной производной $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ как тангенса угла наклона, образованного касательной в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ к кривой, образованной сечением графика функции $z = f(x, y)$, $(x, y) \in Q$ плоскостью $x = x_0$, с осью Oy.

Что же касается геометрического смысла дифференциала, то из формулы (20.18) для нашего случая, т. е. при $n = 2$, получим

$$f(x, y) = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{20.39}$$

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad z_0 = f(x_0, y_0).$$

Уравнение

$$z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) \tag{20.40}$$

является уравнением плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и не параллельной оси Oz. Как мы знаем, коэффициенты A и B однозначно определяются из соотношения (20.39), причем

$$A = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \tag{20.41}$$

и, значит, плоскость (20.40) однозначно определена соотношением (20.39). Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к графику функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0).

Таким образом, мы пришли к следующему определению.

Определение 5. *Касательной плоскостью к графику функции $f(x, y)$ в данной точке называется такая плоскость, что разность ее аппликаты и значения функции $f(x, y)$ является величиной, бесконечно малой по сравнению с ρ при $\rho \to 0$.*

В силу (20.41) ее уравнение имеет вид

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0). \tag{20.42}$$

В дальнейшем (см. т. 2 п. 50.2) мы познакомимся с другим подходом к понятию касательной плоскости.

Полагая $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, правую часть уравнения (20.42) запишем в виде

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial x(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Это есть обычная запись дифференциала dz функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0). Если текущую аппликату касательной плоскости обозначить $z_{\text{кас}}$, то (20.42) перепишется следующим образом:

$$z_{\text{кас}} - z_0 = dz.$$

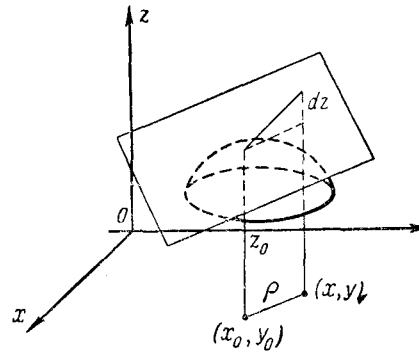


Рис. 75

Таким образом, геометрически *полный дифференциал функции в точке* (x_0, y_0) *равен приращению аппликаты касательной плоскости к графику функции* (рис. 75).

20.6. Производная по направлению

Частные производные от функции, по существу, являются производными в направлениях координатных осей. Естественно поставить вопрос об определении и вычислении производной по любому фиксированному направлению. Прежде всего определим это понятие. Проведем рассмотрение этого вопроса на примере функций трех переменных.

Пусть функция f определена в δ-окрестности $O(M_0; \delta)$ точки $M_0 \in E^3$, пусть $M_1 \in O(M_0; \delta)$. Проведем через точки M_0 и M_1 прямую. За положительное направление на этой прямой возьмем направление вектора $\boldsymbol{l} = \overrightarrow{M_0M_1}$, т. е. направление от точки M_0 к точке M_1. Для всякой точки M этой прямой обозначим через M_0M ориентированную длину отрезка с началом в точке M_0 и концом в точке M, т. е. длину этого отрезка со знаком «плюс», если вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет то же направление, что и вектор $\boldsymbol{l}$, и со знаком «минус» в противном случае.

Определение 6. *Предел*

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M},$$

если он существует, называется производной функции f в точке M_0 по направлению вектора $\vec{l}$ и обозначается $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$.

Пусть теперь в пространстве E^3 зафиксирована некоторая система координат x, y, z. Пусть $M = (x_0, y_0, z_0)$, $M = (x, y, z)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$ и $s = M_0M$. Найдем связь между координатами точки M и ориентированной длиной s отрезка M_0M. Пусть α, β и γ — углы, образованные вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$ соответственно с осями Ox, Oy и Oz. Тогда (рис. 76)

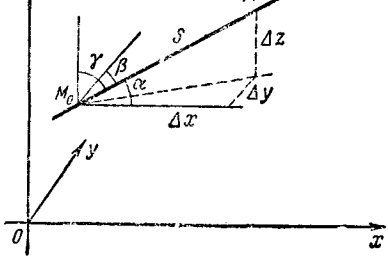


Рис. 76

$$x - x_0 = s\cos\alpha,$$

$$y - y_0 = s\cos\beta,$$

$$z - z_0 = s\cos\gamma.$$

Вдоль прямой M_0M функция f является функцией одного переменного s, а именно

$$f(x, y, z) = f(x_0 + s\cos\alpha, y_0 + s\cos\beta, z_0 + s\cos\gamma).$$

Производная этой функции по s (если она, конечно, существует) и является *производной функции f в точке M_0 по направлению вектора* $\overrightarrow{M_0M_1}$.

Заметим, что направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ определяются следующим образом через координаты точек $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$:

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_0}{\rho}, \quad \cos\beta = \frac{y_1 - y_0}{\rho}, \quad \cos\gamma = \frac{z_1 - z_0}{\rho}, \qquad (20.43)$$

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

Вычисляется производная по направлению по правилу дифференцирования сложной функции. Пусть функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0) и пусть

$$x = x_0 + s\cos\alpha, \quad y = y_0 + s\cos\beta, \quad z = z_0 + s\cos\gamma. \qquad (20.44)$$

Согласно общей формуле для производной сложной функции,

$$\frac{df(M_0)}{ds} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\frac{dz}{ds},$$

но из (20.44) следует, что

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=\cos\beta,\quad \frac{dz}{ds}=\cos\gamma, \tag{20.45}$$

поэтому окончательно

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(M_0)}{ds}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{df(M_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma. \tag{20.46}$$

Это и есть искомая формула.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0). Тогда в этой точке функция f имеет производные по любому направлению и эти производные находятся по формуле* (20.46).

Очевидно, что по самому определению производной по направлению (от точки M_0 к точке M_1) функции точки она не зависит от выбора прямоугольной декартовой системы координат, а определяется только точками M_0 и M_1, или, что то же, точкой M_0 и вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$ (кстати, этот факт сразу не виден из формулы (20.46)).

Вектор с координатами

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x},\quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y},\quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}$$

называется *градиентом* функции $f(M)$ в точке M_0 и обозначается $\operatorname{grad} f$. Таким образом, если $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — координатные орты, то

$$\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{20.47}$$

Часто оказывается удобным использование *символ-вектора Гамильтона**)*.

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

называемого *наблой*. Набла является обозначением определенной операции, которую следует произвести над тем или иным объектом.

Для функции f по определению полагаем

$$\nabla f=\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Формально это равенство можно рассматривать как «произведение» вектора ∇ на число f.

Итак, $\operatorname{grad} f$ и ∇f являются обозначениями одного и того же выражения.

*) У. Гамильтон (1805—1865) — английский математик.

С помощью градиента можно коротко записать формулу для производной функции f по направлению вектора $\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \cos\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial f}{\partial z} = \boldsymbol{l}\ \operatorname{grad} f,$$

где в правой части стоит скалярное произведение векторов $\boldsymbol{l}$ и $\operatorname{grad} \boldsymbol{f}$.

Отсюда, поскольку $\boldsymbol{l}$ — единичный вектор,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad}\ u| \cos\varphi,$$

где φ — угол, образованный вектором $\boldsymbol{l}$ и $\operatorname{grad} u$. Из этой формулы видно, что в случае, если в данной точке

$$|\operatorname{grad} f|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \neq 0^*),$$

то производная функции по направлению достигает наибольшего значения в единственном направлении, при котором $\cos\varphi = 1$, т. е. в направлении градиента. Из этого, в частности, следует, что при заданной функции точки $f(M)$ градиент в каждой точке однозначно определяется самой функцией, а не зависит от выбора системы координат, как это могло бы сначала показаться из формулы (20.47).

Возьмем теперь любую непрерывно дифференцируемую кривую без особых точек, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0), и такую, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ является ее касательным вектором. Обозначим через s переменную длину дуги этой кривой, отсчитываемую от точки M_0 в таком направлении, чтобы вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ давал положительное направление на касательной. Если $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$ представление этой кривой, то, как мы знаем (см. п. 17.1),

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma,$$

т. е. также выполняется (20.45). Поэтому если взять производную в точке (x_0, y_0, z_0) от дифференцируемой функции $f(x, y, z)$ по данной кривой, т. е. при $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$, то мы снова получим формулу (20.46).

Все сказанное переносится на функции любого числа n переменных ($n \geqslant 2$). Сформулируем лишь определение производной по направлению.

---

*) Легко проверить, что если это условие выполняется в одной декартовой системе координат, то оно выполняется и в любой другой подобной системе.

Пусть в некоторой окрестности точки $x^{(0)}=(x_i^{(0)})$ определена функция $f(x)$ и пусть $x^{(1)}=(x_i^{(1)})$ — точка этой окрестности. Проведем прямую через точки $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$ или, что то же (см. п. 18.2), прямую через точку $x^{(0)}$ в направлении

$$\left(\frac{x_1^{(1)}-x_1^{(0)}}{\rho},\ \ldots,\ \frac{x_n^{(1)}-x_n^{(0)}}{\rho}\right),$$

где

$$\rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(1)}-x_i^{(0)})^2}. \tag{20.48}$$

Ее уравнение имеет вид

$$x_i=x_i^{(0)}+\frac{x_i^{(1)}-x_i^{(0)}}{\rho}s,\quad -\infty<s<+\infty,\quad i=1,\ 2,\ldots,\ n,$$

или, полагая

$$\cos\alpha_i=\frac{x_i^{(1)}-x_i^{(0)}}{\rho},\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{20.49}$$

что имеет смысл, ибо $\dfrac{|x_i^{(1)}-x_i^{(0)}|}{\rho}\leqslant 1$, получим

$$x_i=x_i^{(0)}+s\cos\alpha_i,\quad i=1,2,\ldots,n,\quad -\infty<s<+\infty. \tag{20.50}$$

Косинусы $\cos\alpha_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, называются *направляющими косинусами прямой* (20.50). Заметим, что формулы (20.49) аналогичны формулам (20.43), однако, если (20.43) надо было доказывать, то (20.49) принимаются за определение.

Очевидно, что из (20.48) и (20.49) следует, что

$$\cos^2\alpha_1+\ldots+\cos^2\alpha_n=1.$$

Производная функции $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ в точке $x^{(0)}$ в направлении точки $x^{(1)}$ или, что то же, в направлении $(\cos\alpha_1,\ \ldots,\ \cos\alpha_n)$ *определяется как производная* $\dfrac{df}{ds}$ *от сложной функции*

$$f(x_1^{(0)}+s\cos\alpha_1,\ \ldots,\ x_n^{(0)}+s\cos\alpha_n).$$

В случае, если функция f дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то согласно формуле для производной сложной функции, имеем в этой точке

$$\frac{df}{ds}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cos\alpha_n. \tag{20.51}$$

§ 21. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

21.1. Частные производные высших порядков

Пусть задана функция $f(x, y)$, тогда ее частные производные (если они, конечно, существуют) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ снова являются функциями двух переменных и от них также можно брать частные производные. Частная производная $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ обозначается $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ или f_{xx}, частная производная $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ обозначается $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ или f_{xy}. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = f_{xy}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = f_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Все эти частные производные называются частными производными второго порядка. Беря от производных второго порядка снова частные производные, получим всевозможные частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2},\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x},\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial x} \text{ и т. д.}$$

Определение 1. *Частная производная от частной производной порядка* $n-1$, $n = 1, 2, \ldots$*), *называется частной производной порядка* n.

Частная производная, содержащая дифференцирование по различным переменным, называется смешанной частной производной. Частная же производная, содержащая дифференцирование только по одной переменной, называется чистой частной производной.

Число различных частных производных при увеличении n, очевидно, возрастает, однако оказывается, что при определенных пред-

*) Частной производной нулевого порядка для удобства обозначений считается сама функция.

положениях многие из них совпадают, а именно частные производные не зависят от порядка дифференцирования.

Более точно, имеет место, например, следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x, y)$ определена вместе со своими частными производными f_x, f_y, f_{xy} и f_{yx} в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причем производные f_{xy} и f_{yx} непрерывны в этой точке, тогда*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \tag{21.1}$$

Доказательство. Пусть функция $f(x, y)$ определена вместе с производными f_x, f_y, f_{xy} и f_{yx} в δ-окрестности точки (x_0, y_0) и пусть Δx и Δy фиксированы так, что $\Delta x^2 + \Delta y^2 < \delta^2$. Будем обозначать, как и раньше (см. п. 20.1), символом Δ_x, соответственно символом Δ_y, приращение функции f по аргументу x, соответственно по аргументу y, в точке (x_0, y_0)*). Положим

$$\Delta_{xy} f = \Delta_x(\Delta_y f),$$
$$\Delta_{yx} f = \Delta_y(\Delta_x f)$$

и покажем, что

$$\Delta_{xy} f = \Delta_{yx} f. \tag{21.2}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\Delta_{xy} f = \Delta_x(\Delta_y f) &= \Delta_x[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = \\ &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] - \\ &\quad - [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)].\end{aligned} \tag{21.3}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\Delta_{yx} f = \Delta_y(\Delta_x f) &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] - \\ &\quad - [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)].\end{aligned} \tag{21.4}$$

Сравнивая (21.3) и (21.4), убеждаемся в справедливости (21.2). Положим теперь

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0),$$

тогда (21.3) можно переписать в виде

$$\Delta_{xy} f = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0).$$

В силу того, что в рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0) существует частная производная f_x, функция $\varphi(x)$ дифференцируема на отрезке с концами в точках x_0 и $x_0 + \Delta x$.

---

*) Для всякой функции $F(x, y)$

$$\Delta_x F(x_0, y_0) = F(x_0 + \Delta x, y_0) - F(x_0, y_0),$$
$$\Delta_y F(x_0, y_0) = F(x_0, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0).$$

По теореме Лагранжа о конечных приращениях получим

$$\Delta_{xy} f = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x)\, \Delta x,\ 0 < \theta_1 < 1.$$

Но $\varphi'(x) = f_x(x, y_0 + \Delta y) - f_x(x, y_0)$, поэтому

$$\Delta_{xy} f = [f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)]\, \Delta x.$$

Применяя еще раз ту же теорему о конечных приращениях, но теперь уже по переменной y, будем иметь

$$\Delta_{xy} f = f_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta x\, \Delta y,\ 0 < \theta_1 < 1,\ 0 < \theta_2 < 1. \quad (21.5)$$

Совершенно аналогично, полагая

$$\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y),$$

получим

$$\Delta_{yx} f = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \psi'(y_0 + \theta_3 \Delta y)\, \Delta y =$$
$$= [f_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) - f_y(x_0, y_0 + \theta_3 \Delta y)]\, \Delta y =$$
$$= f_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y)\, \Delta x\, \Delta y,$$
$$0 < \theta_3 < 1,\ 0 < \theta_4 < 1. \quad (21.6)$$

Согласно (21.2), левые части равенства (21.5) и (21.6) равны между собой, значит, равны и правые; приравнивая их и сокращая на $\Delta x\, \Delta y$ при $\Delta x \neq 0$ и $\Delta y \neq 0$, получим

$$f_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y),$$
$$0 < \theta_i < 1,\quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (21.7)$$

В силу непрерывности частных производных f_{xy} и f_{yx} в точке x_0, y_0 в пределе при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ из (21.7) получим (21.1).

Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказанной теоремы по индукции легко следует, что, если у функции n переменных смешанные частные производные m-го порядка непрерывны в некоторой точке, то они в этой точке не зависят от порядка дифференцирования.

Это следует из того, что любые две последовательности дифференцирования, отличающиеся только порядком дифференцирования (т. е. такие, что по каждому фиксированному аргументу они содержат одно и то же суммарное число дифференцирований), можно перевести одну в другую конечным числом шагов, при каждом из которых меняется порядок дифференцирования только по двум переменным, а другие остаются при этом фиксированными. Таким образом, при каждом шаге фактически рассматривается изменение порядка дифференцирования у функции лишь двух переменных, т. е. в этом

случае мы находимся в условиях вышедоказанной теоремы. Тем самым общий случай и сводится к случаю функций двух переменных.

Поясним это на примере. Докажем, например, что

$$f_{xyz} = f_{zyx}.$$

Согласно вышесказанному, имеем последовательно

$$f_{xyz} = (f_x)_{yz} = (f_x)_{zy} = (f_{xz})_y = (f_{zx})_y = (f_z)_{xy} = (f_z)_{yx} = f_{zyx}.$$

Замечание 2. В заключение этого пункта отметим, что на первый взгляд доказанная теорема может показаться не очень содержательной: для того чтобы судить о том, имеет ли место равенство $f_{xy} = f_{yx}$, надо, согласно этой теореме, проверить непрерывность функций f_{xy} и f_{yx}, а для этого надо как будто бы их знать; но если мы их уже знаем, то без всякой теоремы можем выяснить, равны они или нет. Тем не менее теорема 1 все-таки содержательна. Дело в том, что о непрерывности функции можно иногда судить на основании некоторых общих теорем, не прибегая к конкретному вычислению и исследованию самой функции. Так, мы знаем, что все элементарные функции многих переменных непрерывны в своей области определения (см. п. 19.3). С другой стороны, частные производные элементарных функций сами являются элементарными, поэтому частные производные элементарных функций непрерывны в области своего определения.

Задача 13. Доказать, что если функция $f(x, y)$ определена вместе со своими частными производными f_x, f_y и f_{xy} в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причем частная производная f_{xy} непрерывна в точке (x_0, y_0), то в этой точке существует частная производная f_{yx} и

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0).$$

21.2. Дифференциалы высших порядков

Функция от $2n$ переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ или, что то же, от упорядоченной пары точек n-мерного пространства $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ вида

$$A(x, y) = A(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k,$$

где a_{ik} — заданные числа $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, называется *билинейной формой от x и y*. Это название объясняется тем, что если одну из точек x или y зафиксировать, то функция будет линейной относительно координат оставшейся точки.

Функция $A(x, x)$ называется *квадратичной формой*, соответствующей данной билинейной $A(x, y)$:

$$A(x, x) = A(x_1, \ldots, x_n; x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k.$$

В случае, когда $a_{ik} = a_{ki}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, билинейная форма $A(x, y)$ и соответствующая ей квадратичная $A(x, x)$ называются *симметричными*.

Например, скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

является симметричной билинейной формой точек $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$, а квадрат длины вектора $|\boldsymbol{x}|$ — соответствующей ей квадратичной:

$$|\boldsymbol{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

В дальнейшем для удобства изложения будем обозначать дифференциалы не только символом d, но и символом δ, например, писать не только

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

но и

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y.$$

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные вторые производные в точке (x_0, y_0) и, значит, ее первые производные дифференцируемы в этой точке. Вычислим дифференциал от первого дифференциала $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ в точке (x_0, y_0), считая dx и dy фиксированными, т. е. рассматривая дифференциал только как функцию точки (x, y); при этом новое дифференцирование обозначим символом δ:

$$\delta(dz) = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} \delta y\right) dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \delta y\right) dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx\, \delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} (dx\, \delta y + \delta x\, dy) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy\, \delta y.$$

Все производные здесь взяты в точке (x_0, y_0). Мы получили билинейную форму переменных dx, dy, δx, δy, являющуюся симметрич-

ной в силу теоремы о независимости порядка дифференцирования. Полагая $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, получим соответствующую ей квадратичную форму, которая и называется *вторым дифференциалом* функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) и обозначается d^2z.

Таким образом, мы пришли к следующему определению.

Определение 2. *Вторым дифференциалом d^2z функции $z = f(x, y)$ в данной точке называется квадратичная форма от дифференциалов dx и dy независимых переменных, соответствующая билинейной форме дифференциала от первого дифференциала:*

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{21.8}$$

На практике при конкретном вычислении дифференциалов обычно совмещаются оба шага — вычисление дифференциала от дифференциала $\delta(dz)$ и приравнивание дифференциалов аргументов: $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. Например, пусть $z = x^3\cos^2 y$ и требуется найти d^2z. Последовательно имеем

$$dz = 3x^2\cos^2 y\, dx - x^3 \sin 2y dy,$$

$$d^2z = 6x\cos^2 y dx^2 - 3x^2 \sin 2y\, dx\, dy - 3x^2 \sin 2y\, dx\, dy -$$

$$- 2x^3 \cos 2y\, dy^2 = 6x\cos^2 y dx^2 - 6x^2 \sin 2y\, dx\, dy - 2x^3\cos^2 2y\, dy^2.$$

Аналогичным образом при непрерывности частных производных третьего порядка можно вычислить и дифференциал от второго дифференциала $\delta(d^2z)$, после чего, полагая $\delta x = dx$ и $\delta y = dy$, мы получим по определению третий дифференциал. По индукции определяется и дифференциал $(n+1)$-го порядка $d^{n+1}z$, $n = 1, 2, \ldots$. Именно, чтобы получить $d^{n+1}z$, надо взять (если, конечно, это возможно) дифференциал от дифференциала d^nz порядка n: $\delta(d^nz)$ и положить $\delta x = dx$, $\delta y = dy$.

При этом справедлива формула

$$d^n z = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\, \partial y^k} dx^{n-k}\, dy^k, \tag{21.9}$$

ее обычно символически записывают в следующем виде, более удобном для запоминания:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^{\{n\}} f(x, y). \tag{21.10}$$

Докажем формулу (21.9) по индукции. При $n = 1$ она, очевидно, верна. Пусть она справедлива при некотором n, покажем ее справедливость при $n + 1$. Имеем

$$\delta(d^n z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-k+1}\, \partial y^k} \delta x\, dx^{n-k}\, dy^k + \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-k}\, \partial y^{k+1}} dx^{n-k}\, \delta y\, dy^k \right).$$

Полагаем $\delta x = dx$ и $\delta y = dy$:

$$d^{n+1} z =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-k+1}\, \partial y^k} dx^{n-k+1}\, dy^k + \sum_{m=0}^{n} C_n^m \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-m}\, \partial y^{m+1}} dx^{n-m}\, dy^{m+1}.$$

Заменяя во второй сумме индекс суммирования m на $k-1$ и замечая, что $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, получим

$$d^{n+1} z =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-k+1}\, \partial y^k} dx^{n-k+1}\, dy^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-k+1}\, \partial y^k} dx^{n-k+1}\, dy^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1-k}\, \partial y^k} dx^{n+1-k}\, dy^k.$$

Формула (21.9) доказана.

Замечание. Следует иметь в виду, что если имеется сложная функция $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, то второй дифференциал функции f, записанный через дифференциалы переменных x и y, уже не будет, вообще говоря, иметь вид (21.8), а будет, как правило, выглядеть сложнее. Таким образом, в случае дифференциала высшего порядка (т. е. порядка большего или равного двум) не имеет места инвариантность формы дифференциала относительно выбора переменных. Чтобы в этом убедиться, вычислим в рассматриваемом случае второй дифференциал функции $z = f(x, y)$, где $x =$

$= x(u, v)$, $y = y(u, v)$. В силу инвариантности формы первого дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Далее вычислим дифференциал $\delta(dz)$, считая, что $\delta u = du$, $\delta v = dv$, используя инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных и замечая, что дифференциал $\delta(dx)$ есть дифференциал функции и, значит, вообще говоря, не ноль, получим

$$d^2z = \delta(dz)\Big|_{\substack{\delta u=du\\ \delta v=dv}} = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)\Big|_{\substack{\delta u=du\\ \delta v=dv}} =$$

$$= \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial z}{\partial x}\,\delta(dx) + \frac{\partial z}{\partial y}\,\delta(dy)\Big|_{\substack{\delta u=du\\ \delta v=dv}} =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}\,d^2y.$$

На практике и в этом случае обе операции: взятие дифференциалов и приравнивание дифференциалов $\delta u = du$, $\delta v = dv$ производятся одновременно.

Все сказанное, в частности определение дифференциалов высших порядков, естественным образом переносится на функции большего числа переменных. Отметим, что дифференциал m го порядка от функций n переменных $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид

$$d^m y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\,dx_n\right)^{(m)} y(x_1, \ldots, x_n). \qquad (21.11)$$

Доказывается эта формула аналогично формуле (21.10).

Упражнения. 1. Найти частные производные первого порядка функции

$$z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}.$$

2. Найти полный дифференциал функции

$$u = z^{xy}.$$

3. Найти все частные производные второго порядка функции

$$u = x \sin(x+y) + y \cos(x+y).$$

4. Найти $d^2 z$, если $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.

5. Найти производные первых двух порядков от функции $w = f(u, v)$, где $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

ГЛАВА
ТРЕТЬЯ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 22. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

22.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 1. *Пусть функция f определена на некотором конечном или бесконечном промежутке E, т. е. на отрезке, интервале или полуинтервале числовой оси. Функция F, определенная на E, называется первообразной функцией (или просто первообразной) функции f на E, если $F'(x) = f(x)$ для каждого $x \in E$*)*.

Очевидно, если F — первообразная функция функции f на промежутке E, то функция $F + C$, где C — некоторая постоянная, также является первообразной функции f на E.

Действительно,

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x), \quad x \in E.$$

С другой стороны, в силу следствия леммы 1 п. 11.2, если F и Φ — две первообразные функции f на E, т. е. если

$$F'(x) = f(x), \quad \Phi'(x) = f(x), \quad x \in E,$$

и, значит,

$$[F(x) - \Phi(x)]' = 0, \quad x \in E,$$

то они отличаются на некоторую постоянную

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad x \in E. \tag{22.1}$$

Таким образом, *если F есть какая-либо первообразная функция функции f, то всякая функция вида* (22.1) *также является первообразной для f и всякая первообразная функции f представима в таком виде.*

---

*) Как обычно, на конце промежутка, если он входит в рассматриваемый промежуток, речь идет о соответствующей односторонней производной.

Определение 2. *Совокупность всех первообразных функции f, определенных на некотором промежутке E, называется неопределенным интегралом от функции f на промежутке E и обозначается*

$$\int f(x)\,dx. \tag{22.2}$$

Если F — какая-либо первообразная функции f на E, то пишут

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{22.3}$$

хотя было бы правильнее писать

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}. \tag{22.4}$$

Мы, как обычно принято, будем употреблять запись (22.3). Тем самым один и тот же символ $\int f(x)dx$ будет обозначать как всю совокупность первообразных функции f, так и любой элемент этого множества, т. е. какую-то первообразную функции f.

Следует, однако, иметь в виду, что *всякое равенство, в обеих частях которого стоят неопределенные интегралы, есть равенство между множествами.*

Значок $\int$ называется *знаком интеграла.* Под знаком интеграла пишут для удобства не саму функцию f, а ее произведение на дифференциал dx. Это делается прежде всего для того, чтобы указать, по какой переменной пишется первообразная. Например,

$$\int x^2 z\,dx = \frac{x^3 z}{3} + C, \quad \int x^2 z\,dz = \frac{x^2 z^2}{2} + C;$$

здесь в обоих случаях берется функция, записываемая одинаково x^2z, но ее неопределенные интегралы в рассмотренных случаях оказываются различными; в первом случае она рассматривается как функция от переменной x, во втором — как функция от переменной z.

Другие удобства, вытекающие из употребления записи $\int f(x)dx$, будут указаны в дальнейшем (см. замену переменного в интеграле, п. 22.3).

В формуле (22.2) под знаком интеграла, очевидно, стоит дифференциал любой из первообразных F функции f:

$$dF(x) = F'(x)\,dx = f(x\ dx,\ x \in E. \tag{22.5}$$

Основные свойства неопределенного интеграла

Будем предполагать, что все рассматриваемые функции определены на одном и том же промежутке.

1. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Справедливость этого равенства вытекает из определения неопределенного интеграла как совокупности всех функций, дифференциал которых стоит под знаком интеграла (см.(22.5)) и общего вида (22.1) всех первообразных данной функции.

2. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

В данной формуле под $\int f(x)dx$ понимается любая первообразная F функции f. Справедливость этой формулы также очевидна в силу (22.5).

3. *Если функции f_1 и f_2 имеют первообразные, то и функция $f_1 + f_2$ также имеет первообразную, причем*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \tag{22.6}$$

Это равенство выражает собой совпадение двух множеств функций и означает, что сумма каких-либо первообразных функций f_1 и f_2 является первообразной для функции $f_1 + f_2$ и что всякая первообразная функции $f_1 + f_2$. является суммой каких-либо первообразных f_1 и f_2. Свойство интеграла, выражаемое формулой (22.6), называется *аддитивностью интеграла относительно функций.*

Пусть

$$\int f_1(x)\,dx = F_1(x) + C, \quad \int f_2(x)\,dx = F_2(x) + C$$

и, значит, $F_1' = f_1$, $F_2' = f_2$, положим $F = F_1 + F_2$, тогда $F' = F_1' + F_2' = f_1 + f_2$, т. е. $F = F_1 + F_2$ является первообразной для $f_1 + f_2$, поэтому (см. 22.1)

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = F(x) + C = F_1(x) + F_2(x) + C.$$

Таким образом, левая часть формулы (22.6) состоит из функций вида $F_1 + F_2 + C$, а правая — из функций вида $F_1 + C_1 + F_2 + C_2$. Ввиду произвольности постоянных C, C_1 и C_2 эти совокупности совпадают.

4. *Если функция f имеет первообразную и k — постоянная, то и функция $kf(x)$ также имеет первообразную, причем при $k \neq 0$ справедливо равенство*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx. \tag{22.7}$$

Действительно, пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$ или $F' = f$, тогда $(kF)' = kf$. Поэтому левая часть формулы (22.7) представляет собой совокупность функций вида $kF + C$, а правая, очевидно, является в силу определения интеграла совокупностью функций вида $k(F + C_1) = kF + kC_1$. Ввиду произвольности постоянных C и C_1 и условия $k \neq 0$, обе совокупности совпадают.

Вопрос о существовании первообразной будет изучаться несколько позже (см. п. 29.2), а теперь рассмотрим методы вычисления первообразных для различных классов элементарных функций.

Упражнение 1. Доказать, что функция $\operatorname{sign} x$ не имеет первообразной на всей вещественной оси.

22.2. Табличные интегралы

Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции, называемая операцией интегрирования, является операцией, обратной операции дифференцирования, т. е. операции нахождения по данной функции ее производной (см. свойства 1 и 2 неопределенного интеграла в п. 22.1). Поэтому всякая формула для производных конкретных функций, т. е. формула вида $F'(x) = f(x)$, может быть обращена (записана в виде интегральной формулы):

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Используя это соображение, напишем таблицу значений ряда интегралов, получающуюся непосредственно из соответствующей таблицы производных элементарных функций (см. § 9).

1. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ x > 0,\ \alpha \neq -1.$

Если число α таково, что степень x^{α} имеет смысл и для всех $x \leqslant 0$, то формула 1 справедлива на любом промежутке, принадлежащем области определения функции x^{α}. Например, формула

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

справедлива для всей числовой оси.

Однако для интеграла $\int \frac{dx}{x^2}$ уже нельзя написать подобную единую формулу, справедливую на всей числовой оси с выкинутым нулем, в этом случае имеем

$$\int \frac{dx}{x^2} = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1 & \text{для } x > 0 \\ -\frac{1}{x} + C_2 & \text{для } x < 0. \end{cases}$$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

на любом промежутке, на котором $x \neq 0$.

3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1.$

В частности, $\int e^x\,dx = e^x + C.$

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

9. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C.$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C,\ |x| < |a|.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C,$

причем, когда под корнем стоит $x^2 - a^2$, предполагается $|x| > |a|$.

Само собой разумеется, что если знаменатель подынтегральной функции обращается в ноль в некоторой точке, то написанные формулы будут справедливы лишь для тех промежутков, в которых не происходит обращения в ноль указанного знаменателя (см. формулы 2, 6, 7, 11, 13, 15).

То, что производными функций, стоящих в правых частях этих формул, являются соответствующие подынтегральные выражения, проверяется непосредственным дифференцированием (см. примеры в § 9).

С помощью интегралов 1—15, называемых обычно *табличными интегралами*, и доказанных выше свойств неопределенного интеграла можно выразить интегралы и от более сложных элементарных функций также через элементарные функции.

Например,

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=5\int\cos x\,dx+2\int dx-3\int x^2\,dx+\int\frac{dx}{x}-4\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=5\sin x+2x-x^3+\ln|x|-4\operatorname{arctg}x+C.$$

Отметим, что для всякого многочлена степени n существует первообразная и она является многочленом степени $n+1$, точнее,

$$\int(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)\,dx=$$

$$=a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+\ldots+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+C. \tag{22.8}$$

Это следует из свойств 3 и 4 неопределенного интеграла (см. п. 22.1) и формулы 1 этого пункта.

Если первообразная некоторой функции f является элементарной функцией, то говорят, что интеграл $\int f(x)dx$ выражается через элементарные функции, или что этот интеграл вычисляется.

22.3. Интегрирование подстановкой

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ определены на некоторых промежутках и имеет смысл сложная функция $F[\varphi(t)]$; если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, а функция φ дифференцируема, то функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ также имеет первообразную и*

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=F[\varphi(t)]+C. \tag{22.9}$$

Доказательство. Поскольку функция $F(x)$ определена на том же промежутке, что и функция $f(x)$, то сложная функция $F[\varphi(t)]$ имеет смысл и по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t)]=\frac{dF(x)}{dx}\Big|_{x=\varphi(t)}\frac{d\varphi(t)}{dt}=f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

т. е. функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ имеет в качестве одной из своих первообразных функцию $F[\varphi(t)]$, и потому формула (22.9) доказана.

Формула (22.9) часто применяется на практике при вычислении различных интегралов. Для этого ее удобно записать в виде

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Отсюда видно, что можно сначала вычислить интеграл $\int f(x)dx$, а затем вместо x подставить $\varphi(t)$. Эту же формулу можно записать в таком виде:

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int f[\varphi(t)]\,d\varphi(t).$$

Примеры. 1. Для вычисления интеграла $\int \cos 3x\,dx$ естественно сделать подстановку $u = 3x$, тогда

$$\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \cos u\,du = \frac{1}{3}\sin u + C = \frac{\sin 3x}{3} + C.$$

2. Для вычисления интеграла $\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2}$ удобно применить подстановку $u = x^2 + a^2$:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C.$$

3. При вычислении интегралов вида $\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)}$ полезна подстановка $u = \varphi(x)$:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C.$$

Например,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

4. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad a \neq 0,$$

в случае, когда подкоренное выражение неотрицательно на некотором интервале*), легко сводятся с помощью подстановок к табличным.

Действительно, замечая, что

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

*) В противном случае, т. е. когда подкоренное выражение отрицательно, получится интеграл от комплекснозначной функции. Такие интегралы в этой книге не рассматриваются.

сделаем замену переменного $t = \sqrt{|a|}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ и положим $d = c - \frac{b^2}{4a}$, тогда получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dt}{\sqrt{\pm t^2 + d}}$$

(перед t^2 стоит знак «+», если $a > 0$, и знак «—», если $a < 0$). Интеграл, стоящий справа, является табличным (см. формулы 14 и 15 в п. 22.2).

Подобным же приемом вычисляются и интегралы вида

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad a \neq 0$$

(см. об этом в п. 24.1).

22.4. Интегрирование по частям

Теорема 2. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы и интеграл $\int v\,du$ существует, то и интеграл $\int u\,dv$ также существует и*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{22.10}$$

Доказательство. По правилу дифференцирования произведения имеем

$$d(uv) = v\,du + u\,dv,$$

и потому

$$u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Если дифференциалы (или, что то же, производные) каких-либо функций равны, то их неопределенные интегралы, очевидно, совпадают; поэтому (см. (22.6) и (22.7))

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du, \tag{22.11}$$

но, согласно свойству 1 п. 22.1,

$$\int d(uv) = uv + C.$$

Подставляя это выражение в (22.11) и относя произвольную постоянную ко второму слагаемому, получим (22.10).

Теорема доказана.

Формула (22.10) часто оказывается очень удобной при конкретном вычислении интегралов. Отметим, что при практическом использовании этой формулы задана левая часть, т. е. функция u и дифференциал dv, поэтому функция v определяется неоднозначно. Обычно в качестве функции v выбирается функция, записывающаяся наиболее простой формулой.

Примеры. 1. Пусть требуется вычислить интеграл $\int xe^x\,dx$.

Полагая

$$u = x,\ dv = e^x\,dx$$

и, значит,

$$du = dx,\ v = e^x,$$

имеем

$$\int xe^x\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

2. Вычислить интеграл

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Полагая

$$u = \sqrt{a^2 - x^2},\quad dv = dx$$

и, следовательно,

$$du = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx,\ v = x,$$

получаем

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \qquad (22.12)$$

Добавим и вычтем a^2 в числителе подынтегральной функции интеграла, стоящего в правой части равенства; тогда, произведя деление на $\sqrt{a^2 - x^2}$, будем иметь

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \arcsin\frac{x}{a} - I$$

и, подставляя это выражение в (22.12), получим

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - I. \qquad (22.13)$$

Как уже отмечалось, всякое равенство такого вида выражает собой равенство между двумя множествами функций, элементы каж-

дого из которых отличаются друг от друга на постоянную. Поэтому общее выражение для элемента из множества I, согласно (22.13), имеет вид

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

3. Иногда для вычисления интеграла правило интегрирования по частям приходится применять несколько раз, например,

$$\int \arcsin^2 x\,dx = x\arcsin^2 x - 2\int \arcsin x \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\arcsin^2 x + 2\int \arcsin x\, d\sqrt{1-x^2} =$$

$$= x\arcsin^2 x + 2\arcsin x\,\sqrt{1-x^2} - 2x + C.$$

4. Если $P_n(x)$ многочлен степени x, то для вычисления интеграла $\int P_n(x)\,e^{\alpha x}dx$ следует формулу интегрирования по частям применить n раз, тогда получим

$$\int P_n(x)\,e^{\alpha x}dx = e^{\alpha x}\left(\frac{P_n(x)}{\alpha} - \frac{P_n'(x)}{\alpha^2} + \ldots + (-1)^n\frac{P_n^{(n)}(x)}{\alpha^{n+1}}\right) + C.$$

§ 23. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛАХ И МНОГОЧЛЕНАХ

23.1. Комплексные числа

Как известно из курса элементарной математики, *комплексными числами* называются выражения вида

$$z = x + iy,$$

где $i^2 = -1$, а x и y — вещественные числа. Число x называется вещественной частью, y — мнимой частью комплексного числа z. Это записывается следующим образом:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z\ ^{*)}.$$

Комплексное число z, не являющееся вещественным, т. е. у которого $\operatorname{Im} z \neq 0$, будем называть существенно комплексным числом. Число $\sqrt{x^2+y^2}$ называется модулем комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$, т. е. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

---

*) От французских слов reel — действительный и imagine — мнимый.

Каждому комплексному числу $z = x + iy$ соответствует упорядоченная пара вещественных чисел (x, y), и обратно, каждой упорядоченной паре вещественных чисел (x, y) соответствует комплексное число $z = x + iy$.

В силу этого взаимно однозначного соответствия (а также и в силу других обстоятельств, о которых речь будет ниже) комплексное число $z = x + iy$ геометрически удобно интерпретировать как радиус-вектор на плоскости с координатами x и y (при некоторой фиксированной прямоугольной декартовой системе координат).

Угол φ, образованный радиус-вектором z, $z \neq 0$, с положительным направлением оси Ox, называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Значения φ аргумента комплексного числа z, такие, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, обычно обозначают $\arg z$. Очевидно, что $\operatorname{Arg} z$ определяется комплексным числом $z \neq 0$ с точностью до целочисленного кратного 2π*), в то время как $\arg z$ определяется уже числом $z \neq 0$ однозначно. Очевидно также, что

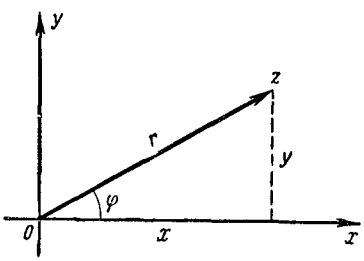


Рис. 77

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi,$$

где $k = 0$ для первой и четвертой координатных четвертей, $k = 1$ для второй и $k = -1$ для третьей.

Пусть $|z| = r$, $\operatorname{Arg} z = \varphi$, тогда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (рис. 77), и потому

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Представление комплексного числа z в таком виде называется *тригонометрической записью комплексного числа.*

Сумма двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется согласно формуле

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{23.1}$$

Иначе говоря, вещественная и мнимая части суммы $z_1 + z_2$ равны суммам соответственно вещественных и мнимых частей z_1 и z_2.

Разность комплексных чисел определяется как действие, обратное сложению, т. е. разность $z = z_1 - z_2$ является таким числом z, что $z_2 + z = z_1$.

Следовательно, если $z = x + iy$, то $x_2 + x + i(y_2 + y) = x_1 + iy$. Отсюда $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$, т. е. вещественная и мнимая

*) Поэтому равенства, в которых в обеих частях стоят аргументы (Arg) каких-то комплексных чисел, представляют собой, по существу, равенство между множествами.

части разности $z_1 - z_2$ равны разностям соответственно вещественных и мнимых частей чисел z_1 и z_2.

Поскольку геометрически вещественная и мнимая части комплексного числа являются его координатами, и при сложении (вычитании) координат векторов сами векторы также складываются (вычитаются), то формулы (23.1) означают, что геометрически комплексные числа складываются и вычитаются как векторы (рис. 78 и 79).

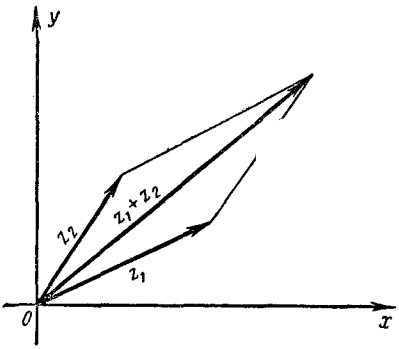


Рис. 78

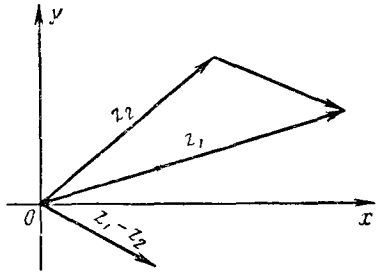


Рис. 79

Произведение двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется по формуле

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \quad (23.2)$$

Найдем формулы умножения комплексных чисел в тригонометрической форме. Если

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) +$$
$$+ i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

и, таким образом,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2{}^{*)}. \quad (23.3)$$

Отсюда для степени z^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, комплексного числа z имеем

$$|z^n| = |z|^n, \quad \operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z,$$

*) Это равенство, как и вообще все равенства с Arg, следует понимать как равенство множеств.

в частности, при $|z|=1$, т. е. когда $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$,

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+r\sin n\varphi. \tag{23.4}$$

Операция деления $\frac{z_1}{z_2}$ комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2\neq 0$ определяется как операция, обратная операции умножения, т. е. число $z=\frac{z_1}{z_2}$ называется частным, если $z_1=z_2 z$.

Поэтому

$$|z_1|=|z_2||z| \quad \text{и} \quad \operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg} z_2+\operatorname{Arg} z,$$

откуда

$$|z|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg} z=\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2. \tag{23.5}$$

Формулами (23.5) комплексное число $z=\frac{z_1}{z_2}$ при заданных z_1 и $z_2\neq 0$, очевидно, определено однозначно. Ряд других свойств комплексных чисел, как, например, коммутативность и ассоциативность сложения и умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения и другие свойства непосредственно следуют из формул, с помощью которых определены эти операции для комплексных чисел, и из соответствующих свойств вещественных чисел. Поэтому не будем на них подробно останавливаться.

Корень n-й степени $w=\sqrt[n]{z}$ из комплексного числа z определяется как такое число w, n-я степень которого равна подкоренному выражению:

$$w^n=z.$$

Если $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, а $w=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$, то

$$\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi);$$

отсюда

$$\rho=\sqrt[n]{r}.$$

Здесь корень понимается в арифметическом смысле — как неотрицательное вещественное число, ибо по определению модуля комплексного числа $\rho\geqslant 0$.

Далее,

$$n\psi=\varphi+2k\pi \quad (k\text{ — целое}),$$

или

$$\psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

Мы получим по существу различные значения аргумента при значениях $k = 0, 1, \ldots, n-1$ в том смысле, что если обозначить эти значения аргумента через ψ_k и положить $w_k = \rho(\cos\psi_k + i\sin\psi_k)$, то при $\rho \neq 0$ получим различные комплексные числа. При всех остальных k значения ψ будут отличаться от указанных углов ψ_k на кратное 2π, т. е. эти значения аргумента будут приводить к одному из комплексных чисел w_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом, корень $\sqrt[n]{z}$ имеет при $z \neq 0$ в точности n значений $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$.

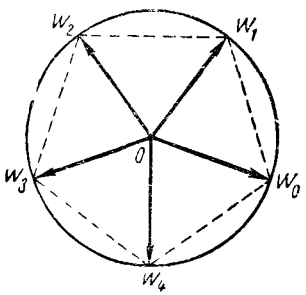


Рис. 80

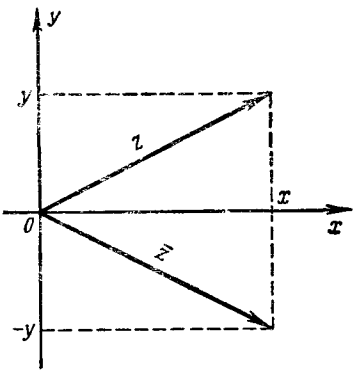


Рис. 81

Геометрически числа w_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса ρ с центром в начале координат. Это следует из того, что аргумент числа w_k отличается от аргумента числа w_{k-1} при всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$ на одно и то же число $\frac{2\pi}{n}$. На рис. 80 изображен случай $n = 5$.

Каждому комплексному числу $z = x + iy$ соответствует число $x - iy$, которое называется *сопряженным* к z и обозначается $\bar{z}$; $\bar{z} = x - iy$. Геометрически число $\bar{z}$ изображается вектором, симметричным с вектором z относительно оси Ox (рис. 81).

Свойства сопряженных комплексных чисел

1. $|\bar{z}| = |z|$, $\arg\bar{z} = -\arg z$.
2. $z\bar{z} = |z|^2$.
3. $\bar{\bar{z}} = z$.
4. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
5. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.
6. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$.

Свойство 1 очевидно (см. рис. 81).

Далее, согласно правилу умножения комплексных чисел,

$$z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2.$$

Свойство 2 доказано.

Свойство 3 также очевидно: если $z=x+iy$, то $\bar{z}=x-iy$ и $\overline{\bar{z}}=\overline{x-iy}=x+iy=z$.

В справедливости свойства 4 можно убедиться геометрически, взяв параллелограмм, симметричный относительно оси Ox, с параллелограммом, натянутым на векторы z_1 и z_2 (рис. 82), т. е. параллелограмм, натянутый на векторы $\bar{z}_1$ и $\bar{z}_2$. Диагонали этих параллелограммов будут также симметричны относительно оси и, следовательно, будут соответственно равны z_1+z_2 и $\bar{z}_1+\bar{z}_2$. С другой стороны, последняя диагональ, как сумма векторов $\bar{z}_1$ и $\bar{z}_2$, равна также и $\bar{z}_1+\bar{z}_2$. Свойство 4 доказано.

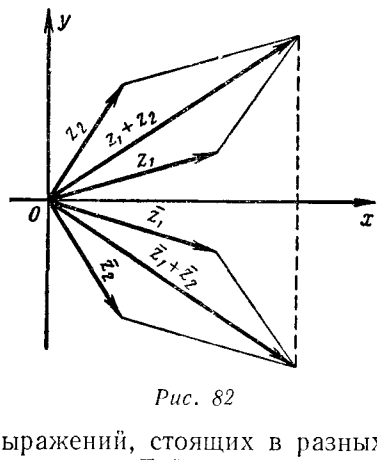


Рис. 82

Свойства 5 и 6 следуют из того, что модули и аргументы выражений, стоящих в разных частях соответствующих равенств, совпадают. Действительно, используя свойство 1, получим

$$|\overline{z_1z_2}|=|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|=|\bar{z}_1|\cdot|\bar{z}_2|=|\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2|,$$

$$\operatorname{Arg}\overline{z_1z_2}=-\operatorname{Arg}z_1z_2=-(\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2)=$$

$$=-\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2=\operatorname{Arg}\bar{z}_1+\operatorname{Arg}\bar{z}_2=\operatorname{Arg}\bar{z}_1\bar{z}_2.$$

Свойство 5 доказано.

Аналогично доказывается свойство 6.

23.2. Некоторые понятия анализа в области комплексных чисел

Понятие предела последовательности легко обобщается и на случай комплексных чисел.

Определение 1. *Пусть задана последовательность* *) *комплексных чисел* $z_n=x_n+iy_n$, $n=1,2,\ldots$. *Число* $\zeta=\xi+i\eta$ *называется*

*) Функция, определенная на множество натуральных чисел и имеющая своими значениями комплексные числа, называется последовательностью комплексных чисел.

ее пределом, если для любого вещественного числа $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* n_ε, *что при* $n \geqslant n_\varepsilon$ *выполняется неравенство*

$$|z_n - \zeta| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \zeta$ *и говорят, что последовательность* $\{z_n\}$ *сходится к числу* ζ.

Таким образом, по форме это определение совершенно такое же, как для предела последовательности вещественных чисел.

Геометрически, если обозначить через M_n конец радиус-вектора z_n, т. е. точку с координатами (x_n, y_n), а через N — точку с координатами (ξ, η), то равенство $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \zeta$ будет иметь место в том и только том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = N$ в смысле п. 18.1. Это непосредственно следует из того, что совокупность концов $M = (x, y)$ векторов $z = x + iy$, таких, что $|z - \zeta| < \varepsilon$, образует ε-окрестность точки $N = (\xi, \eta)$ (рис. 83).

Рис. 83

Из сказанного следует (см. п. 18.1), что последовательность $z_n = x_n + iy_n$ сходится к числу $\zeta = \xi + i\eta$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \eta.$$

Последовательность комплексных чисел, имеющая своим пределом ноль, называется *бесконечно малой*.

На последовательности комплексных чисел естественным образом переносится ряд теорем о пределах последовательностей вещественных чисел, например, теорема о единственности предела, об ограниченности последовательности, имеющей предел, критерий Коши и т. п.

В § 8 были введены обозначения «o» и «O» для сравнения функций. В дальнейшем понадобятся такие же обозначения и для последовательностей.

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность* $\{z_n\}$ *ограничена относительно последовательности* $\{w_n\}$, *и писать*

$$z_n = O(w_n)\ ^*),$$

если существует постоянная $c > 0$, *такая, что*

$$|z_n| \leqslant c\,|w_n|, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

*) Иногда к этому добавляют: при $n \to \infty$.

Это определение в случае $w_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, эквивалентно следующему: для двух данных последовательностей $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$ существует постоянная $c' > 0$ и номер n_0, такие, что

$$|z_n| \leqslant c' |w_n|, \quad n = n_0, n_0 + 1, \ldots.$$

Действительно, полагая в этом случае

$$c = \max \left\{ \left| \frac{z_1}{w_1} \right|, \left| \frac{z_2}{w_2} \right|, \ldots, \left| \frac{z_{n_0-1}}{w_{n_0-1}} \right|, c' \right\},$$

получим

$$|z_n| \leqslant c |w_n|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

т. е. первоначальное определение.

Определение 3. *Если*

$$z_n = O(w_n)$$

и

$$w_n = O(z_n),$$

то будем говорить, что последовательности $\{z_n\}$ *и* $\{w_n\}$ *одного порядка.*

Определение 4. *Будем говорить, что последовательность* $\{z_n\}$ *является бесконечно малой по сравнению с последовательностью* $\{w_n\}$ *и писать*

$$z_n = o(w_n),$$

если существует бесконечно малая последовательность $\{\alpha_n\}$, *такая, что*

$$z_n = \alpha_n w_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Определение 5. *Если последовательности* $\{z_n\}$ *и* $\{w_n\}$ *такие, что* $z_n \neq 0$, $w_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *и*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{z_n}{w_n} = 1,$$

то эти последовательности называются эквивалентными и пишется

$$z_n \sim w_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Упражнения. 2. Доказать, что если $z_n \neq 0$ и $w_n \neq 0$, то, для того чтобы $z_n \sim w_n$, необходимо и достаточно, чтобы $z_n = w_n + o(w_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

3. Доказать: если $z_n = cw_n + o(w_n)$, $c \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то $z_n = O(w_n)$.

Можно рассматривать функции комплексного аргумента и комплекснозначные функции.

Например, $f(z) = |z|$, $f(z) = z^2$. Обе эти функции определены на множестве всех комплексных чисел, первая из них принимает только

неотрицательные вещественные значения, вторая и существенно комплексные.

Геометрически, если функция $f(z)$ определена на некотором множестве E n-мерного евклидова пространства E^n и принимает комплексные значения, то она задает отображение этого n-мерного множества E в плоскость. Например, функция $w = |z|$ отображает плоскость на полупрямую, а функция $w = z^2$ всю плоскость на всю плоскость, как говорят, двукратным образом — в данном случае это означает, что при отображении $w = z^2$ каждая точка образа, кроме нуля, имеет прообраз, состоящий из двух точек.

Если множество E, на котором задана некоторая функция, лежит на плоскости E^2, то его можно рассматривать всегда при фиксированной системе координат как множество комплексных чисел, а заданную функцию как функцию комплексного аргумента.

Для комплекснозначных функций, определенных на множестве E n-мерного пространства E^n, можно ввести многие из понятий, введенных ранее для вещественнозначных функций (предел, непрерывность, частные производные, дифференцируемость, интеграл и др.). В дальнейшем нам придется встретиться лишь с понятием непрерывности комплекснозначных функций; сформулируем его.

Определение 6. *Пусть комплекснозначная функция f определена на множестве $E \subset E^n$ и пусть $P_0 \in E$. Функция f называется непрерывной в точке P_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$ для всех точек $P \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(P, P_0) < \varepsilon$.*

Мы видим, что по форме это определение полностью совпадает с определением непрерывности для вещественнозначных функций (ср. с п. 19.2).

В случае, когда E — плоское множество и, стало быть, его точки можно рассматривать как комплексные числа z, определение непрерывности примет вид: функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ для всех $z \in E$, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \delta$.

Переносятся на комплекснозначные функции и теоремы о том, что если две функции f и g, определенные на некотором множестве $E \subset E^n$, непрерывны в точке $P_0 \in E$, то и функции $f + g$, fg, а если $g(P_0) \neq 0$, то и $\frac{f}{g}$ непрерывны в этой точке.

Из этой теоремы следует, например, что любой многочлен $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ с комплексными коэффициентами a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, непрерывен в любой точке z_0 (ср. с п. 7.1).

23.3. Разложение многочленов на множители

Пусть

$$P_n(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 \qquad (23.6)$$

— многочлен с вещественными коэффициентами A_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Если $A_n \neq 0$, то число n называется *степенью многочлена*. Число z (вообще говоря, комплексное), такое, что

$$P_n(z) = 0,$$

называется *корнем многочлена* (23.6).

Из курса алгебры известно, что число z является корнем многочлена $P_n(x)$ тогда и только тогда, когда многочлен $P_n(x)$ делится без остатка на $x - z$ (*теорема Безу*).

Если многочлен $P_n(x)$ делится на $(x - z)^k$ (k — неотрицательное целое) и не делится на $(x - z)^{k+1}$, то число k называется *кратностью корня* z.

Если k равно кратности корня z многочлена $P_n(x)$, то

$$P_n(x) = (x - z)^k Q_{n-k}(x),$$

где $Q_{n-k}(x)$ — такой многочлен степени $n - k$, что $Q_{n-k}(z) \neq 0$.

Из курса алгебры известно также, что всякий многочлен (23.6) степени n можно представить, и притом единственным образом, в следующем виде:

$$P_n(x) = a_n (x - z_1)^{k_1} (x - z_2)^{k_2} \ldots (x - z_r)^{k_r}, \qquad (23.7)$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_r$ — различные корни многочлена (23.6), а числа k_i являются кратностями корней z_i, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Из формулы (23.7) видно, что всякий многочлен степени n имеет в точности n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Если число z является корнем многочлена (23.6) с вещественными коэффициентами, то сопряженное число z также является его корнем и притом той же кратности, что и z. Действительно, пусть $P_n(z) = 0$, т. е.

$$A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0,$$

тогда, замечая, что $\overline{0} = 0$, имеем

$$\overline{A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0} = 0.$$

Отсюда на основании свойств сопряженных комплексных чисел (см. их свойства 4 и 5 п. 23.1) и того, что $\overline{A}_i = A_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ (ибо A_i — вещественны), имеем

$$A_n \overline{z}^n + A_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \ldots + A_1 \overline{z}_1 + A_0 = 0,$$

т. е.

$$P_n(\bar{z}) = 0,$$

что и означает, что $\bar{z}$ — корень многочлена (23.6).

Покажем теперь, что кратность z и $\bar{z}$ совпадает. Если $z = \bar{z}$ (это условие означает, что z — вещественное число), то утверждение очевидно. Пусть $z \neq \bar{z}$ (z — существенно комплексное число) и пусть z является корнем многочлена (23.6) кратности k, тогда, как мы видели,

$$P_n(x) = (x - z) P_{n-1}(x), \tag{23.8}$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$. Согласно доказанному, $\bar{z}$ также корень $P_n(x)$, поэтому

$$(\bar{z} - z) P_{n-1}(\bar{z}) = 0,$$

и так как $\bar{z} - z \neq 0$, то $P_{n-1}(\bar{z}) = 0$; отсюда следует, что многочлен $P_{n-1}(x)$ делится на $(x - \bar{z})$, и поэтому

$$P_n(x) = (x - z)(x - \bar{z}) P_{n-2}(x)$$

($P_{n-2}(x)$ — многочлен степени $n-2$).

Поступая далее аналогичным образом с многочленом $P_{n-2}(x)$, через k шагов получим

$$P_n(x) = (x - z)^k (x - \bar{z})^k P_{n-2k}(x),$$

где $P_{n-2k}(z) \neq 0$, а значит, и $P_{n-2k}(\bar{z}) \neq 0$.

Таким образом, действительно кратность корня z равна k.

Отметим теперь, что произведение $(x - z)(x - \bar{z})$ является многочленом второй степени с вещественными коэффициентами. Действительно, пусть $z = a + bi$, где a и b — вещественны. Тогда $\bar{z} = a - bi$, и поэтому

$$\begin{aligned}(x - z)(x - \bar{z}) &= (x - a - bi)(x - a + bi) = (x - a)^2 + b^2 = \\ &= x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,\end{aligned} \tag{23.9}$$

где положено $p = -2a$ и $q = a^2 + b^2$; очевидно, p и q — вещественны. Отметим, что при $b \neq 0$ всегда $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Из сказанного следует, что если в разложении (23.7) многочлена $P_n(x)$ сгруппировать попарно множители с сопряженными корнями

и записать произведения типа $(x-z)(x-\bar{z})$ в виде (23.9), то, учитывая, что кратность корней z и $\bar{z}$ одинакова, мы получим в результате формулу

$$P_n(x) = \\ = A_n(x-a_1)^{\alpha_1}\dots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \tag{23.10}$$

где

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i+2\sum_{j=1}^{s}\beta_j=n,\quad \frac{p_j^2}{4}-q_j<0,\quad j=1,2,\dots,s,$$

и все коэффициенты A_n, a_1, ..., a_r; p_1, q_1, ..., p_s, q_s вещественны. При этом a_1, ..., a_n суть все вещественные корни многочлена $P_n(x)$, а каждому существенно комплексному корню z и ему сопряженному корню $\bar{z}$ соответствует множитель вида

$$x^2+px+q=(x-z)(x-\bar{z}).$$

Разложение многочлена на множители вида (23.10) единственно, ибо оно однозначно определяется корнями этого многочлена и их кратностями.

23.4. Общий наибольший делитель многочленов

Пусть дан многочлен $P(x)$. Всякий многочлен $R(x)$, на который делится многочлен $P(x)$,

$$P(x)=R(x)r(x), \tag{23.11}$$

где $r(x)$ — также многочлен, называется *делителем* многочлена $P(x)$.

Мы видели, что многочлен $P(x)$ можно записать в виде

$$P(x) = \\ = A(x-a_1)^{\alpha_1}\dots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \tag{23.12}$$

где $a_1, \dots, a_r$ — вещественные корни многочлена, а множители вида $x^2+p_jx+q_j$ соответствуют существенно комплексным корням этого многочлена,

$$\frac{p_j^2}{4}-q_j<0,\quad j=1,2,\dots,s;$$

коэффициенты A, p_j и q_j $(j=1,2,\dots,s)$ — вещественны.

Отсюда следует, что всякий делитель $R(x)$ многочлена $P(x)$ может быть записан в виде

$$R(x) = \\ = B(x-a_1)^{\lambda_1}\dots(x-a_r)^{\lambda_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s}, \tag{23.13}$$

где

$$\lambda_i \leqslant \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$
$$\mu_j \leqslant \beta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, s. \tag{23.14}$$

Действительно, никаких других множителей вида

$$x - a \quad \text{и} \quad x^2 + px + q, \tag{23.15}$$

где a, p и q — вещественны и $\frac{p^2}{4} - q < 0$, в разложении многочлена $R(x)$ быть не может, ибо, с одной стороны, многочлен $R(x)$, как всякий многочлен, может быть разложен на множители вида (23.15), с другой стороны, из формулы (23.11) следует, что если в разложении $R(x)$ на множители имеется множитель вида $x - a$, соответственно вида $x^2 + px + q$, то $x = a$, соответственно корни трехчлена $x^2 + px + q$, являются и корнями многочлена $P(x)$; поэтому указанные множители входят в разложение (23.12). Неравенства (23.14) также очевидны: из той же формулы (23.11) следует, что кратность корня многочлена $R(x)$ не может превышать кратности того же корня многочлена $P(x)$.

Пусть теперь даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$. Всякий многочлен, являющийся делителем как многочлена $P(x)$, так и многочлена $Q(x)$, называется их *общим делителем*.

Общий делитель двух многочленов, который делится на любой общий делитель этих многочленов, называется их *общим наибольшим делителем*.

Если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ записаны в виде (23.12):

$$P(x) = A'(x - a_1')^{\alpha_1'} \ldots (x - a_{r'}')^{\alpha_{r'}'} (x^2 + p_1' + q_1')^{\beta_1'} \ldots$$
$$\ldots (x^2 + p_{s'}' x + q_{s'}')^{\beta_{s'}'}, \tag{23.16}$$

$$Q(x) = A''(x - a_1'')^{\alpha_1''} \ldots (x - a_{r''}'')^{\alpha_{r''}''} (x^2 + p_1'' x + q_1'')^{\beta_1''} \ldots$$
$$\ldots (x^2 + p_{s''}'' x + q_{s''}'')^{\beta_{s''}''}, \tag{23.17}$$

то всякий их общий делитель $R(x)$ можно записать в виде (23.13), где множители

$$x - a_k \ (k = 1, 2, \ldots, r), \quad x^2 + p_l x + q_l \quad (l = 1, 2, \ldots, s) \tag{23.18}$$

входят как в разложение (23.16), так и в разложение (23.17).

Пусть индексы у коэффициентов множителей (23.18) в разложениях (23.16) и (23.17) равны соответственно i'_k, j'_l и i''_k, j''_l, тогда в силу неравенств (23.14) имеем

$$\begin{aligned} &\lambda_k \leqslant \alpha'_{i'_k}, \quad \lambda_k \leqslant \alpha''_{i''_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, r, \\ &\mu_l \leqslant \beta'_{j'_l}, \quad \mu_l \leqslant \beta''_{j''_l}, \quad l = 1, 2, \ldots, s. \end{aligned} \tag{23.19}$$

Для того чтобы многочлен (23.13) был общим наибольшим делителем многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, необходимо и достаточно, чтобы показатели степени λ_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, и μ_l, $l = 1, 2, \ldots, s$, были максимальными из возможных, т. е., чтобы

$$\begin{aligned} &\lambda_k = \min\left\{\alpha'_{i'_k}, \alpha''_{i''_k}\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, r, \\ &\mu_l = \min\left\{\beta'_{j'_l}, \beta''_{j''_l}\right\}, \quad l = 1, 2, \ldots, s. \end{aligned} \tag{23.20}$$

Действительно, при выполнении этих условий многочлен $R(x)$ будет общим делителем многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ и будет делиться на любой многочлен вида (23.13), для которого выполнены условия (23.19), т. е. $R(x)$ будет делиться на любой общий делитель многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

Из найденного вида общего делителя и, в частности, общего наибольшего делителя следует, во-первых, что общий наибольший делитель двух многочленов не единствен; однако два общих наибольших делителя двух данных многочленов могут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем (постоянную B в формуле (23.13) можно брать произвольной, не равной нулю); во-вторых, что общий наибольший делитель двух многочленов имеет степень, большую, чем любой их общий делитель, не являющийся общим наибольшим делителем.

В качестве примера, полезного для дальнейшего, найдем общий наибольший делитель многочлена $P(x)$ и его производной $P'(x)$.

Предварительно заметим, что если число a является вещественным корнем кратности α многочлена $P(x)$, т. е.

$$\begin{aligned} &P(x) = (x-a)^{\alpha} P_1(x), \\ &P_1(a) \neq 0, \end{aligned} \tag{23.21}$$

то a является корнем кратности $\alpha - 1$ для многочлена $P'(x)$.

Действительно, дифференцируя (23.21), имеем

$$P'(x) = \alpha (x-a)^{\alpha-1} P_1(x) + (x-a)^{\alpha} P'_1(x) = (x-a)^{\alpha-1} P_2(x),$$

где

$$P_2(x) = \alpha P_1(x) + (x-a)P_1'(x)$$

и

$$P_2(a) = \alpha P_1(a) \neq 0.$$

Подобным образом, если

$$P(x) = (x^2+px+q)^{\beta} P_3(x), \tag{23.22}$$

где

$$\frac{p^2}{4} - q < 0,$$

и, значит, корни z_1 и z_2 $(z_2 = \bar{z}_1)$ трехчлена x^2+px+q существенно комплексны, и если

$$P_3(z_1) \neq 0, \quad P_3(z_2) \neq 0,$$

то

$$P'(x) = (x^2+px+q)^{\beta-1} P_4(x),$$

где

$$P_4(z_1) \neq 0, \quad P_4(z_2) \neq 0,$$

т. е. $P_4(x)$ не делится на x^2+px+q.

Действительно, дифференцируя (23.22), получим

$$P'(x) = \beta(x^2+px+q)^{\beta-1}(2x+p)P_3(x) +$$

$$+ (x^2+px+q)^{\beta} P_3'(x) = (x^2+px+q)^{\beta-1} P_4(x),$$

где

$$P_4(x) = \beta(2x+p)P_3(x) + (x^2+px+q)P_3'(x),$$

откуда следует, что

$$P_4(z_1) = \beta(2z_1+p)P_3(z_1) \neq 0,$$

$$P_4(z_2) = \beta(2z_2+p)P_3(z_2) \neq 0,$$

ибо $z_1 \neq -\frac{p}{2}$ и $z_2 \neq -\frac{p}{2}$, так как они существенно комплексны.

Из доказанного следует, что если многочлен $P(x)$ записан в виде (23.12), то его производную $P'(x)$ можно представить в виде

$$P'(x) = c(x-a_1)^{\alpha_1-1} \ldots (x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1} \ldots$$

$$\ldots (x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1} P_s(x),$$

где многочлен $P_s(x)$ не делится ни на $x-a_i$, $i=1, 2, \ldots, r$, ни на $x^2+p_jx+q_j$, $j=1, 2, \ldots, s$, т. е. не имеет общих корней с многочленом $P(x)$.

Из формул (23.13) и (23.20) получаем, что общий наибольший делитель $R(x)$ многочлена $P(x)$ и его производной $P'(x)$ имеет вид

$$R(x) = \\ = (x-a_1)^{\alpha_1-1}\dots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}. \tag{23.23}$$

Изложенный метод получения общего наибольшего делителя двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ принципиально полностью решает вопрос о существовании и виде общего наибольшего делителя. Практическое же его применение может, однако, вызвать существенные затруднения: для использования этого метода надо знать разложения на множители вида (23.16) и (23.17) данных многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, которые далеко не всегда удается написать в явном виде.

Существует, однако, другой способ получения общего наибольшего делителя двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, называемый обычно *алгоритмом Евклида*. Опишем его.

Пусть для определенности степень многочлена $P(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$. Разделив $P(x)$ на $Q(x)$, получим в качестве частного некоторый многочлен $Q_1(x)$ и остаток $R_1(x)$, степень которого, очевидно, меньше степени многочлена $Q(x)$ (в противном случае процесс деления на $Q(x)$ можно было бы продолжить):

$$P(x) = Q(x)Q_1(x) + R_1(x).$$

Из этой формулы следует: 1) если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ делятся на некоторый многочлен $r(x)$, то и многочлен $R_1(x)$ делится на этот многочлен; 2) если многочлены $Q(x)$ и $R_1(x)$ делятся на какой-то многочлен $r(x)$, то и многочлен $P(x)$ делится на этот многочлен $r(x)$. Отсюда следует, что общие делители многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, в частности их общие наибольшие делители, совпадают с общими делителями, соответственно с общими наибольшими делителями, многочленов $Q(x)$ и $R_1(x)$.

Разделим далее многочлен $Q(x)$ на многочлен $R_1(x)$:

$$Q(x) = R_1(x)Q_2(x) + R_2(x),$$

продолжая процесс дальше, будем иметь

$$R_1(x) = R_2(x)Q_3(x) + R_3(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$R_{k-2}(x) = R_{k-1}(x)Q_k(x) + R_k(x).$$

Степени многочленов $R_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$ убывают, поэтому существует номер, мы его обозначим $m+1$, такой, что $R_{m+1}(x) = 0$, и, значит,

$$R_{m-1}(x) = R_m(x)Q_{m+1}(x).$$

Пары многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, $Q(x)$ и $R_1(x)$, $R_1(x)$ и $R_2(x)$, ..., $R_{m-1}(x)$ и $R_m(x)$ имеют одинаковые общие делители, а значит, и одинаковые общие наибольшие делители. Но $R_{m-1}(x)$ делится на $R_m(x)$, поэтому $R_m(x)$ является общим наибольшим делителем $R_{m-1}(x)$ и $R_m(x)$, а значит, и общим наибольшим делителем многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

23.5. Разложение правильных рациональных дробей на элементарные

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с вещественными коэффициентами.

Рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *называется правильной, если степень многочлена* $P(x)$ *меньше степени многочлена* $Q(x)$.

Если рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ не является правильной, то, произведя деление числителя на знаменатель по правилу деления многочленов, ее можно представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \tag{23.24}$$

где $R(x)$, $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ — некоторые многочлены, а $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ — правильная рациональная дробь.

Лемма 1. *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь. Если число* a *является вещественным корнем кратности* $\alpha \geqslant 1$ *многочлена* $Q(x)$, *т. е.*

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha} Q_1(x) \quad \text{и} \quad Q_1(a) \neq 0,$$

то существуют вещественные число A *и многочлен* $P_1(x)$ *с вещественными коэффициентами, такие, что*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} Q_1(x)},$$

где дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} Q_1(x)}$ *также является правильной.*

Доказательство. Каково бы ни было вещественное число A, прибавляя и вычитая из дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha} Q_1(x)}$$

выражение $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \left[\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha}\right] = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}. \tag{23.25}$$

По условию степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x) = (x-a)^\alpha Q_1(x)$. Очевидно, что и степень многочлена $Q_1(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$ (ибо $\alpha \geqslant 1$), поэтому при любом выборе числа A рациональная дробь $\frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}$ является правильной.

Выберем теперь число A таким образом, чтобы число a было корнем многочлена $P(x) - AQ_1(x)$ и, следовательно, чтобы этот многочлен делился на $x - a$. Иначе говоря, определим A из условия

$$P(a) - AQ_1(a) = 0;$$

поскольку по условию $Q_1(a) \neq 0$, то отсюда

$$A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}.$$

При таком выборе A второе слагаемое правой части в формуле (23.25) можно сократить на $x - a$, в результате получим дробь вида

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} Q_1(x)}.$$

Поскольку она получена сокращением правильной рациональной дроби с вещественными коэффициентами на множитель $x - a$, где a вещественно, то и сама она является также правильной рациональной дробью с вещественными коэффициентами.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь. Если комплексное число* $z_1 = a + bi$ (a *и* b *вещественны,* $b \neq 0$) *является корнем кратности* $\beta \geqslant 1$ *многочлена*

$$Q(x), \text{ т. е. } Q(x) = (x^2 + px + q)^\beta Q_1(x), \text{ где } Q_1(z_1) \neq 0,$$

и если $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)$, *то существуют вещественные числа* M *и* N *и многочлен* $P_1(x)$ *с вещественными коэффициентами, такие, что*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta-1} Q_1(x)},$$

где дробь $\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta-1} Q_1(x)}$ *также является правильной.*

Доказательство. Для любых вещественных M и N имеем

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta} + \left[\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^\beta Q_1(x)} - \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta}\right] =$$

$$= \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta} + \frac{P(x)-(Mx+N)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^\beta Q_1(x)}, \qquad (23.26)$$

причем второе слагаемое правой части равенства (23.26) является, как нетрудно видеть, правильной дробью. Постараемся теперь подобрать M и N так, чтобы числитель этой дроби делился на $x^2+px+q=(x-z_1)(x-\overline{z_1})$.

Для этого достаточно выбрать M и N так, чтобы z_1 было корнем многочлена $P(x)=(Mx+N)Q_1(x)$. Действительно, тогда, согласно сказанному в п. 23.3, число $\overline{z_1}$, сопряженное с z_1, также будет являться корнем указанного многочлена. Отсюда и следует, что этот многочлен в силу существования его разложения вида (23.10) делится на x^2+px+q. Итак, пусть

$$P(z_1)-(Mz_1+N)Q_1(z_1)=0. \qquad (23.27)$$

Если это имеет место, то

$$Mz_1+N=\frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)},$$

где по условию $Q_1(z_1)\neq 0$.

Пусть $z_1=a+bi$, $\frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}=A+iB$, тогда

$$A+iB=Mz_1+N=M(a+bi)+N.$$

Отсюда, приравнивая вещественные и мнимые части, получим

$$Ma+N=A \quad \text{и} \quad Mb=B$$

и, значит,

$$M=\frac{B}{b} \quad \text{и} \quad N=A-\frac{a}{b}B. \qquad (23.28)$$

При этих значениях M и N многочлен

$$P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$$

будет делиться на многочлен x^2+px+q. Сокращая второе слагаемое правой части равенства (23.26) на x^2+px+q, получим дробь вида

$$\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{\beta-1}Q_1(x)}.$$

Поскольку она получена сокращением правильной рациональной дроби с вещественными коэффициентами на многочлен с вещественными коэффициентами, то и сама она является также правильной рациональной дробью с вещественными коэффициентами.

Лемма доказана.

Сформулируем теперь основную теорему этого пункта.

Теорема 1. *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь**), $P(x)$ *и* $Q(x)$ *— многочлены с вещественными коэффициентами. Если*

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \dots (x-a_r)^{\alpha_r} (x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \quad (23.29)$$

где a_i *— попарно различные вещественные корни многочлена* $Q(x)$ *кратности* α_i, $i=1, 2, \dots, r$, *а* $x^2+p_jx+q_j=(x-z_j)(x-\bar{z}_j)$, *где* z_j *и* $\bar{z}_j$ *— попарно различные при разных* j *существенно комплексные корни многочлена* $Q(x)$ *кратности* β_j, $j=1, 2, \dots, s$, *то существуют вещественные числа* $A_i^{(\alpha)}$, $i=1, 2, \dots, r$, $\alpha=1, 2, \dots, \alpha_i$,

$$M_j^{(\beta)} \quad \text{и} \quad N_j^{(\beta)}, \quad j=1, 2, \dots, s, \quad \beta=1, 2, \dots, \beta_j,$$

такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-a_1} + \dots +$$

$$+ \frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}} + \dots + \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x-a_r} +$$

$$+ \frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \frac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}} + \dots + \frac{M_1^{(\beta_1)}x+N_1^{(\beta_1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots +$$

$$+ \frac{M_s^{(1)}x+N_s^{(1)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}} + \frac{M_s^{(2)}x+N_s^{(2)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}} + \dots + \frac{M_s^{(\beta_s)}x+N_s^{(\beta_s)}}{x^2+p_sx+q_s}. \quad (23.30)$$

---

*) Без ограничения общности можно считать, что коэффициент у старшего члена многочлена $Q(x)$ равен единице, так как в случае, когда он равен какому-то другому числу (отличному от нуля), можно разделить числитель и знаменатель дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на это число, после чего у получившегося в знаменателе многочлена коэффициент у старшего члена окажется равным единице.

Доказательство. Из разложения (23.29) имеем

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}Q_1(x),$$

где

$$Q_1(x)=(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}$$

и, следовательно,

$$Q_1(a_1)\neq 0,$$

поэтому, согласно лемме 1,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}Q_1(x)}.$$

Применяя в случае $\alpha_1>1$ подобным образом ту же лемму к рациональной дроби $\frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}Q_1(x)}$, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\frac{P_2(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-2}Q_2(x)}.$$

Продолжая этот процесс дальше, пока показатель степени у со множителя $x-a_1$ не станет равным нулю, а затем поступая аналогичным образом относительно множителей $x-a_i$, $i=2,\dots,r$, будем иметь

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\dots+\frac{A_1^{(\alpha_1)}}{(x-a_1)}+\dots+$$
$$+\frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}}+\frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}}+\dots+\frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x-a_r}+\frac{P^*(x)}{Q^*(x)},$$

где $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ — снова рациональная дробь, причем $P^*(x)$ и $Q^*(x)$ суть многочлены с вещественными коэффициентами и многочлен $Q^*(x)$ не имеет вещественных корней.

Применяя последовательно лемму 2 к дроби $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ и к получающимся при этом выражениям, в результате получим формулу (23.30).

Теорема доказана.

Рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}\quad\text{и}\quad\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\beta}},$$

где a, p, q, A, M и N — вещественные числа и $\frac{p^2}{4} - q < 0$ (корни трехчлена $x^2 + px + q$ существенно комплексные), называются *элементарными рациональными дробями*.

Таким образом, доказанная теорема утверждает, *что всякая правильная рациональная дробь может быть разложена в сумму элементарных рациональных дробей*.

При практическом получении разложения вида (23.30) для конкретно заданной дроби обычно оказывается удобным так называемый метод неопределенных коэффициентов. Он состоит в следующем. Для данной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ пишется разложение (23.30), в котором коэффициенты $A_i^{(\alpha)}$, $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ считаются неизвестными ($i = 1, 2, \ldots, r$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i$, $j = 1, 2, \ldots, s$, $\beta = 1, 2, \ldots, \beta_j$). После этого обе части равенства приводятся к общему знаменателю и у получившихся в числителе многочленов приравниваются коэффициенты. При этом если степень многочлена $Q(x)$ равна n, то, вообще говоря, в числителе правой части равенства (23.7) после приведения к общему знаменателю получается многочлен степени $n-1$, т. е. многочлен с n коэффициентами, число же неизвестных $A_i^{(\alpha)}$, $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ также равняется n (см. (23.10)):

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + 2 \sum_{j=1}^{s} \beta_j = n.$$

Таким образом, мы получаем систему n уравнений с n неизвестными. Существование у нее решения вытекает из доказанной теоремы.

Отметим, что после приведения выражения (23.30) к общему знаменателю и его отбрасывания, в случае, когда $Q(x)$ имеет вещественные корни, целесообразно подставить в обе части получившегося равенства последовательно эти корни; в результате получаются некоторые соотношения между искомыми коэффициентами, полезные для их окончательного определения.

Примеры. 1. Разложим на элементарные дроби дробь

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)}.$$

Согласно (22.30), искомое разложение имеет вид

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получим

$$x = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1). \quad (23.31)$$

Мы имеем случай, когда все корни знаменателя вещественны. Полагая в равенстве (23.31), согласно сказанному выше, последовательно $x = 1$, $x = -1$ и $x = 2$, получим

$$1 = -2A, \quad -1 = 6B, \quad 2 = 3C,$$

откуда

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{6}, \quad C = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}. \qquad (23.32)$$

2. Найдем разложение на элементарные дроби для

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}.$$

Общий вид разложения в этом случае

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получим

$$x^2-1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x + (Dx+E)(x^2+1)x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$-1 = A, \quad 0 = C+E, \quad 1 = 2A+B+D, \quad 0 = E, \quad 0 = A+D,$$

откуда

$$A = -1, \quad B = 2, \quad C = 0, \quad D = 1, \quad E = 0,$$

и, значит, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}. \qquad (23.33)$$

Следует заметить, что в отдельных случаях разложение на элементарные дроби можно получить быстрее и проще, не прибегая к методу неопределенных коэффициентов, а действуя каким-либо другим путем. Например, для разложения дроби

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}$$

на сумму элементарных проще всего дважды прибавить и вычесть в числителе x^2 и произвести деление так, как это указано ниже:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Полученное в результате разложение и является разложением данной дроби на сумму элементарных дробей.

Упражнение 3. Доказать, что разложение вида (23.30) правильной рациональной дроби единственно.

§ 24. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

В этом и следующем параграфах будут рассмотрены методы интегрирования некоторых классов элементарных функций. При этом каждый раз, не оговаривая этого специально, будем предполагать, что речь идет о вычислении интеграла на некотором промежутке, во всех точках которого определена подынтегральная элементарная функция (иначе говоря, на котором формула задающая подынтегральную функцию, имеет смысл, см. об этом в п. 4.3).

24.1. Интегрирование элементарных рациональных дробей

В предыдущем параграфе показано, что всякая рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и элементарных рациональных дробей (см. (23.24) и (23.30)). Интеграл от многочлена вычисляется, и притом очень просто (см. п. 22.2). Рассмотрим вопрос об интегрировании элементарных рациональных дробей.

Сначала рассмотрим вычисление интегралов от дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad n=1, 2, \ldots .$$

Если $n=1$, то

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+C, \tag{24.1}$$

а если $n\neq 1$, то

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C. \tag{24.2}$$

Рассмотрим теперь интегралы от дробей

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

где $\frac{p^2}{4}-q<0$, $n=1, 2, \ldots$.

Снова начнем со случая $n=1$. Замечая, что

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right),$$

и полагая

$$t = x + \frac{p}{2}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0,$$

получим

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\, dx = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + a^2}\, dt = M \int \frac{t\, dt}{t^2 + a^2} +$$

$$+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{M}{2} \ln (t^2 + a^2) + \frac{2N - Mp}{2a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2} \ln (x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{2a} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{2a} + C. \qquad (24.3)$$

В случае $n > 1$, полагая, как и выше,

$$t = x + \frac{p}{2}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4},$$

подобным же образом получаем

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}\, dx = M \int \frac{t\, dt}{(t^2 + a^2)^n} + \frac{2N - pM}{2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}. \qquad (24.4)$$

Рассмотрим в отдельности каждый из получившихся интегралов в правой части этого равенства. Что касается первого из них, то он вычисляется сразу:

$$\int \frac{t\, dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} + C. \qquad (24.5)$$

Второй же интеграл правой части равенства (24.4) вычисляется несколько сложнее. Пусть

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Проинтегрируем интеграл I_n по частям, положив

$$u = \frac{1}{(t^2 + a^2)^n}, \quad dv = dt,$$

и

$$du = -\frac{2nt\, dt}{(t^2 + a^2)^{n+1}}, \quad v = t,$$

а затем, добавив и вычтя a^2 в числителе получившейся под знаком интеграла функции и произведя деление так, как это указано ниже, получим

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\, dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\, dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n \left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} - a^2 \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}} \right],$$

т. е.

$$I_n = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1},$$

откуда

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{24.6}$$

Интеграл I_1 легко вычисляется (см. п. 22.2 формулу 12); формула (24.6) позволяет вычислить I_2; зная же I_2, по той же формуле можно найти значение и I_3, продолжая этот процесс дальше, можно найти и выражение для любого интеграла I_n ($n = 1, 2, \ldots$).

24.2. Общий случай

Из результатов п. 23.5 и предыдущего п. 24.1 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Неопределенный интеграл от любой рациональной дроби на всяком промежутке, на котором знаменатель дроби не обращается в ноль, существует и выражается через элементарные функции, а именно через суперпозиции рациональных дробей, арктангенсов и натуральных логарифмов.*

Эта теорема есть прямое следствие формул (23.24), (23.30), (22.6), (22.8), (24.1)—(24.6).

Эти формулы дают и конкретный способ вычисления интеграла от рациональной функции: сначала делением числителя на знаменатель выделяется «целая часть», т. е. данная рациональная дробь представляется в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби (23.1), затем получившаяся правильная рациональная дробь раскладывается на сумму элементарных дробей (23.30), после чего, используя аддитивность интеграла (22.6), можно вычислить интегралы от каждого слагаемого в отдельности, согласно формулам (22.8) и (24.1)—(24.6).

Примеры. 1. Вычислим

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x-2)}.$$

Уже известно (см. (23.32)), что

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)},$$

поэтому

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C.$$

2. Вычислим

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx.$$

Согласно общему правилу, выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель; получим

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}.$$

Для получившейся правильной рациональной дроби уже найдено ее разложение на элементарные дроби (см. формулу (23.33)):

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1},$$

поэтому

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} +$$

$$+ \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Следует иметь в виду, что указанный метод вычисления неопределенного интеграла от рациональной дроби является общим: с помощью его можно вычислить неопределенный интеграл от любой рациональной дроби, если можно получить конкретное разложение знаменателя на множители вида (23.10). Однако естественно, что в отдельных частных случаях бывает целесообразнее для существенного сокращения вычислений действовать иными путями.

Например, для вычисления интеграла

$$I=\int\frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^3}$$

проще не раскладывать подынтегральную функцию на элементарные дроби, а применять правило интегрирования по частям. Положив $u=x$, $dv=\frac{x\,dx}{(1-x^2)^3}$ и $du=dx$, $v=\frac{1}{4(1-x^2)^2}$, получим

$$I=-\frac{1}{2}\int x\frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^3}=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{1}{(1-x^2)^2}\,dx.$$

Прибавляя и вычитая к числителю получившейся подынтегральной функции x^2, производя деление, получим два интеграла, из которых первый табличный, а второй легко вычисляется интегрированием по частям:

$$I=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)^2}\,dx=$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1-x^2}-\frac{1}{4}\int\frac{x^2\,dx}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{8}\int x\frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^2}=$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{x}{8(1-x^2)}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{1-x^2}=$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{x}{8(1-x^2)}+C.$$

24.3. Метод Остроградского

В пункте (24.1) было показано, что всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы элементарных дробей. Но из п. 24.1 следует, что первообразные элементарных дробей $\frac{1}{x-a}$ и $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$ являются трансцендентными функциями вида $A\operatorname{arctg}(a_1x+a_2)+B\ln(b_1x+b_2)+C$ (см. (24.1) и (24.3)); первообразная элементарной дроби

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha},\quad \alpha=2,\ 3,\ldots,$$

является рациональной дробью; первообразная же элементарной дроби

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta}, \quad \beta=2, 3, \ldots,$$

в силу формул (24.4), (24.5), (24.6) и формулы 12 п. 22.2 может быть представлена в виде суммы правильной рациональной дроби и может быть трансцендентной функции вида $A\operatorname{arctg}(a_1x+a_2)+C$, являющейся первообразной от дроби вида $\frac{B}{x^2+px+q}\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$.

Поэтому всякая первообразная любой рациональной дроби представима, вообще говоря, в виде суммы рациональной дроби (алгебраическая часть) и трансцендентной функции, являющейся первообразной от суммы дробей вида

$$\frac{A}{x-a} \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \frac{p^2}{4}-q<0.$$

Таким образом, если $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь и $Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}$ — разложение ее знаменателя в виде (23.10), то

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{A_i}{x-a_i}+\sum_{j=1}^{s}\frac{M_jx+N_j}{x^2+p_jx+q_j}\right]dx,$$

отсюда, произведя под знаком интеграла сложение дробей, имеем

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx, \tag{24.7}$$

где $Q_2(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_sx+q_s)$; из формул (24.2) и (24.6) следует, что многочлен $Q_1(x)$ имеет вид

$$Q_1(x)=(x-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1},$$

и, значит, многочлен $Q_1(x)$ является общим наибольшим делителем многочлена $Q(x)$ и его производной $Q'(x)$ (см. (23.23)).

Формула (24.7) называется формулой *Остроградского**). Второе слагаемое правой части формулы (24.7) называется трансцендентной частью интеграла $\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$; это естественно, ибо из сказанного выше следует, что всякая первообразная дроби $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ с точностью до постоянного слагаемого представляет собой линейную комбина-

*) М. В. Остроградский (1801—1861) — русский математик.

цию логарифмов и арктангенсов от рациональных функций и, значит, как это можно показать, будет являться, вообще говоря, трансцендентной функцией. Первое же слагаемое, называемое алгебраической частью, может быть найдено чисто алгебраическим путем, если известны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ (а значит, и $Q'(x)$), т. е. без интегрирования каких-либо функций. В самом деле, многочлен $Q_1(x)$, являясь общим наибольшим делителем многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$, всегда может быть найден с помощью алгоритма Евклида (см. п. 23.4), тем самым для отыскания многочлена $Q_1(x)$ не требуется знания корней многочлена $Q(x)$; однако, если корни многочлена $Q(x)$ известны, а значит, известно и его разложение вида (23.17), то многочлен $Q_1(x)$ сразу выписывается по формуле (23.23). Многочлен $Q_2(x)$ находится как частное от деления $Q(x)$ на $Q_1(x)$.

Для отыскания же многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ можно применить метод неопределенных коэффициентов. Поясним его. Обозначим степень многочлена $Q_1(x)$ через n_1, степень многочлена $Q_2(x)$ — через n_2, тогда из равенства

$$Q(x) = Q_1(x)\,Q_2(x) \tag{24.8}$$

получим $n = n_1 + n_2$. В силу того что дроби $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ и $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ правильные, степени многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ соответственно не выше, чем $n_1 - 1$ и $n_2 - 1$, и, значит, в этих многочленах число отличных от нуля коэффициентов соответственно не превышает n_1 и n_2; таким образом, что число неизвестных коэффициентов равно $n_1 + n_2 = n$. Дифференцируя первообразные, входящие в обе части формулы (24.7), получим (опуская для краткости обозначение аргумента) соотношение

$$\frac{P}{Q} = \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)' + \frac{P_2}{Q_2}.$$

Производя дифференцирование, получим

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1' Q_1 - P_1 Q_1'}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2}.$$

Заметим, что

$$\frac{P_1' Q_1 - P_1 Q_1'}{Q_1^2} = \frac{P_1' Q_2 - P_1 R}{Q_1 Q_2}, \tag{24.9}$$

где

$$R = \frac{Q_1' Q_2}{Q_1}$$

является многочленом. Действительно, если z — корень многочлена Q_1 кратности λ, то, как мы знаем (см. п. 23.3), z является корнем кратности $\lambda - 1$ для производной Q_1' и однократным корнем многочлена Q_2, поэтому в этом случае z является и корнем кратности λ для многочлена $Q_1'Q_2$. Отсюда, согласно формуле (23.7), сразу следует, что многочлен $Q_1'Q_2$ нацело делится на многочлен Q_1, т. е. что R также является многочленом. Итак, из (24.9) и (24.8) имеем

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1' Q_2 - P_1 R}{Q} + \frac{P_2}{Q_2},$$

откуда

$$P = P_1' Q_2 - P_1 R + P_2 Q_1. \tag{24.10}$$

Многочлен P имеет степень не выше, чем $n - 1$ (ибо дробь $\frac{P}{Q}$ правильная). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, переменного x в обеих частях равенства (24.10), получим n линейных уравнений относительно n неизвестных. Выше было доказано (см. (24.7)), что многочлены P_1 и P_2 всегда (в частности, при некотором фиксированном многочлене Q и при любом многочлене P степени, не превышающей $n - 1$) существуют; поэтому полученная система линейных уравнений имеет решение при любой правой части*). Отсюда следует, что определитель этой системы не равен нулю, а значит, про рассматриваемую систему можно сказать, что она не только имеет решение, но и что оно единственно. Тем самым не только получен метод для определения неизвестных коэффициентов в формуле (24.7), но и доказана единственность этого представления.

Формула (24.7) сводит, вообще говоря, задачу интегрирования любой правильной рациональной дроби к задаче интегрирования правильной рациональной дроби, у которой знаменатель $Q(x)$ имеет только простые корни. С помощью этой формулы при интегрировании правильной рациональной дроби можно найти указанным выше путем алгебраическую часть интеграла $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, а затем проинтегрировать более простую рациональную дробь $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$, если, конечно, случайно, не окажется, что $P_2(x)$ — тождественный ноль: в этом случае задача будет уже решена.

Описанный здесь метод интегрирования рациональных дробей носит название *метода Остроградского.*

---

*) Как обычно, предполагаем, что все члены уравнений, содержащие неизвестные, перенесены в левую часть равенства.

Пример. Применим метод Остроградского для вычисления интеграла

$$\int \frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}\,dx.$$

Согласно формуле (24.7),

$$\int \frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}\,dx = \frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{(1-x)^2(1+x^2)} + \int \frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}\,dx,$$

поэтому

$$\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(x^2+1)^2} = \left[\frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{(1-x)^2(1+x^2)}\right]' + \frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

Произведя дифференцирование, получим

$$\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{(3Kx+2Lx+M)(1-x)(x^2+1)-(Kx^3+Lx^2+Mx+N)[-2(1+x^2)+(1-x)2x]}{(1-x)^3(1+x^2)^2} +$$

$$+ \frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

Отсюда

$$x^4+2x^3-2x^2+x = (3Kx^2+2Lx+M)(-x^3+x^2-x+1) -$$
$$-(Kx^3+Lx^2+Mx+N)(-4x^2+2x-2) +$$
$$+(kx^2+lx+m)(x^4-2x^3+2x^2+2x+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$M+2N+m=0,$$
$$-M+2L+2M-2N-2m+l=1,$$
$$3K-2L+M+2L-2M+4N+k-2l+2m=-2,$$
$$-M+2L-3K+2K-2L+4M-2K+2l-2m=2,$$
$$3K-2L-2K+4L+2k-2l+m=1,$$
$$-3K+4K-2k+l=0,$$
$$k=0,$$

или

$$M+2N+m=0,$$
$$2L+M-2N+l-2m=1,$$
$$3K-M+4N+k-2l+2m=-2,$$
$$-K+3M-2k+2l-2m=2,$$
$$K+2L+2k-2l+m=1,$$
$$K-2k+l=0,$$
$$k=0.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$K=\frac{1}{2},\quad L=-\frac{1}{2},\quad M=\frac{3}{2},\quad N=-1,$$

$$k=0,\quad l=-\frac{1}{2},\quad m=\frac{1}{2},$$

поэтому

$$\int\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{x^3-x^2+3x-2}{(1-x)^2(1+x^2)}+$$
$$+\frac{1}{2}\int\frac{-x+1}{(1-x)(1+x^2)}\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{x^3-x^2+3x-2}{(1-x)^2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

§ 25. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

Функция вида

$$R(u_1,\ldots,u_n)=\frac{P(u_1,\ldots,u_n)}{Q(u_1,\ldots,u_n)},\qquad(25.1)$$

где P и Q — многочлены от переменных $u_1,\ldots,u_n$, т. е. функции вида

$$\sum_{k_1+\ldots+k_n\leqslant k}a_{k_1,\ldots,k_n}u_1^{k_1}\ldots u_n^{k_n},$$

называется *рациональными функциями от* $u_1,\ldots,u_n$.

Если в формуле (25.1) переменные $u_1,\ldots,u_n$ в свою очередь являются функциями, выражающимися с помощью суперпозиций радикалов и рациональных функций от одного переменного x, то получающаяся сложная функция называется рациональной относительно радикалов.

Например, функция

$$f(x)=\frac{x+\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1}}$$

является функцией указанного вида, действительно, здесь

$$f(x)=R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x^2-1}, \sqrt{x^2+1}\right),$$

где

$$R(u_1, u_2, u_3, u_4)=\frac{u_1+u_3^2}{u_2-u_4},$$

$$u_1=x, \quad u_2=\sqrt{x}, \quad u_3=\sqrt[3]{x^2-1}, \quad u_4=\sqrt{x^2+1}.$$

Если же в формуле (25.1) переменные $u_1, \ldots, u_n$ являются элементарными тригонометрическими функциями, то получающаяся сложная функция называется рациональной относительно элементарных тригонометрических функций.

Примером такой функции является следующая:

$$\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\operatorname{tg}^3 x}=R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x).$$

Перейдем теперь к рассмотрению интегралов от функций подобного типа и покажем, что в ряде случаев они сводятся к рассмотренным выше интегралам от рациональных функций.

25.1. Интегралы вида $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx$

Рассмотрим интегралы, указанные в заглавии пункта, при условии, что постоянные $r_1, \ldots, r_s$ рациональны и определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (a, b, c, d — постоянные). Последнее предположение естественно, так как если бы $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, то коэффициенты a, b были бы пропорциональны коэффициентам c, d и потому отношение $\frac{ax+b}{cx+d}$ не зависело бы от x. Подынтегральная функция в этом случае была бы обыкновенной рациональной дробью от одного переменного, вопрос об интегрировании которой был рассмотрен выше.

Пусть m — общий знаменатель чисел $r_1, \ldots, r_s$:

$$r_i=\frac{p_i}{m}, \quad p_i \text{—целое}, \quad i=1, 2, \ldots, s.$$

Положим

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{25.2}$$

откуда

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t), \tag{25.3}$$

$\rho(t)$ является рациональной функцией, поэтому $\rho'(t)$ также рациональная функция; далее,

$$dx = \rho'(t)\,dt \tag{25.4}$$

и

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i} = t^{mr_i} = t^{p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{25.5}$$

Подставляя (25.3), (25.4) и (25.5) в подынтегральное выражение рассматриваемого интеграла, получим

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx =$$

$$= \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \ldots, t^{p_s}\right)\rho'(t)\,dt = \int R^*(t)\,dt,$$

где

$$R^*(t) = R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \ldots, t^{p_s}\right)\rho'(t),$$

очевидно, является рациональной функцией переменного t. Таким образом, вычисление интеграла

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx \tag{25.6}$$

сводится к интегрированию рациональных дробей.

Отметим, что, в частности, к рассмотренному типу интегралов относятся интегралы вида

$$\int R\left[x, (ax+b)^{r_1}, \ldots, (ax+b)^{r_s}\right]dx,$$

$$\int R\left(x, x^{r_1}, \ldots, x^{r_s}\right)dx.$$

Пример. Вычислим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

Полагая, согласно общему правилу,

$$x = t^6, \quad dx = 6t^5\,dt,$$

получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt = 6\left[\int (t^2 - t + 1)\,dt - \int \frac{dt}{t+1}\right] =$$

$$= 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right] + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + C.$$

К интегралам вида (25.6) сводятся иногда с помощью элементарных преобразований и интегралы других типов. Например, если требуется вычислить интеграл

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx, \tag{25.7}$$

то, вынося в подынтегральной функции множитель $(x - 1)$ за знак радикала, получим интеграл вида (25.6): именно при $x \geqslant 2$

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx = \int (x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\,dx,$$

а при $x < 1$

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx = \int (1-x)\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\,dx.$$

При $1 < x < 2$ подынтегральное выражение чисто мнимое.

Рассмотрим, например, случай $x \geqslant 2$. Полагая здесь (см. (25.2))

$$t^2 = \frac{x-2}{x-1},$$

получим

$$x = \frac{2 - t^2}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{2t\,dt}{(1-t^2)^2}.$$

Поэтому

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{2-t^2}{1-t^2} - 1\right)\frac{2t^2\cdot dt}{(1-t^2)^2} = 2\int \frac{t^2\,dt}{(1-t^2)^3},$$

получили интеграл от рациональной дроби, который был вычислен раньше (см. п. 24.2).

25.2. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$. Подстановки Эйлера.

Указанные интегралы могут быть сведены с помощью замены переменного к рациональным функциям. Рассмотрим три замены переменного, носящие название *подстановок Эйлера*. Итак, пусть дан интеграл

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \quad a \neq 0. \tag{25.8}$$

Первый случай: $a > 0$.

Сделаем замену x на t следующим образом:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t \tag{25.9}$$

(знаки можно брать в любой комбинации). Возведем обе части написанного равенства в квадрат:

$$ax^2+bx+c = ax^2 \pm 2xt\sqrt{a} + t^2,$$

отсюда

$$x = \frac{t^2-c}{b \mp 2t\sqrt{a}} = R_1(t),$$

$R_1(t)$ — рациональная функция от t, значит, $R_1'(t)$ — также рациональная функция.

Далее, $dx = R_1'(t)\,dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm R_1(t)\sqrt{a} \pm t = R_2(t)$, где, очевидно, $R_2(t)$ — рациональная функция.

Окончательно

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx =$$

$$= \int R\left(R_1(t), R_2(t)\right) R_1'(t)\,dt = \int R^*(t)\,dx,$$

где $R^*(t) = R\left(R_1(t), R_2(t)\right) R_1'(t)$ — рациональная дробь.

Второй случай: корни трехчлена ax^2+bx+c вещественные.

Пусть x_1 и x_2 вещественны и являются корнями трехчлена ax^2+bx+c.

Если $x_1 = x_2$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)^2} = |x-x_1|\sqrt{a}.$$

Отсюда следует, что в этом случае либо под корнем стоит отрицательная при всех значениях x величина, т. е. корень принимает

только чисто мнимые выражения,— этот случай имеет место при $a < 0$ и мы его не рассматриваем, либо при $a \geqslant 0$ после указанного элементарного преобразования получаем, что переменное x не входит под знак корня, т. е. под интегралом стоит просто рациональная функция от x, вообще говоря, разная для каждого из промежутков $(-\infty, x_1)$ и $(x_1, +\infty)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $x_1 \neq x_2$. Замечая, что $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, и вынося $x - x_1$ из-под знака корня, получим

$$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) = R\left(x, |x-x_1|\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right) = \\ = R_3\left(x, \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right), \tag{25.10}$$

где $R_3(u, v)$ — рациональная функция переменных u и v.

Как известно (см. п. 25.1), интеграл от функции (25.10) может быть вычислен с помощью подстановки (см. (25.2))

$$t^2 = \frac{a(x-x_2)}{x-x_1},$$

что в нашем случае дает

$$\pm(x-x_1)t = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)},$$

или, беря $t > 0$ при $x \geqslant x_1$ и $t < 0$ при $x \leqslant x_1$,

$$(x-x_1)t = \sqrt{ax^2+bx+c}.$$

Рассмотренный в предыдущем пункте интеграл (25.7) является примером случая 2; этот интеграл был сведен выше к рациональной дроби приемом, разобранным сейчас в общем случае.

Два изученных нами способа вычисления интеграла (25.8) позволяют всегда свести этот интеграл к интегралу от рациональной дроби, если только корень $\sqrt{ax^2+bx+c}$ не принимает чисто мнимые значения (естественно, изучая анализ в действительной области, исключить этот случай из рассмотрения). Действительно, допустим, что ни первый, ни второй случаи не имеют места, т. е. $a < 0$ и корни x_1 и x_2 трехчлена $ax^2 + bx + c$ существенно комплексны: $x_1 = g + hi$, $x_2 = g - hi$, $h \neq 0$. Тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = \\ = \sqrt{a(x-g-hi)(x-g+hi)} = \sqrt{a[(x-g)^2+h^2]},$$

и так как $a < 0$, а $h \neq 0$, то под корнем при любых x стоит отрицательное выражение.

Утверждение доказано.

Третий случай: $c > 0$.

В этом случае можно применить подстановку

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$$

(комбинация знаков произвольна). Возводя в квадрат, получим

$$ax^2+bx = \pm 2xt\sqrt{c} + x^2t^2,$$

откуда

$$x = \frac{b \pm 2t\sqrt{c}}{t^2-a} = R_4(t), \quad dx = R_4'(t)\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} \pm R_4(t)\,t = R_5(t),$$

где $R_4(t)$, $R_4'(t)$ и $R_5(t)$ суть рациональные функции t.

Поэтому

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx =$$

$$= \int R\left(R_4(t), R_5(t)\right)R_4'(t)\,dt = \int \widetilde{R}(t)\,dt,$$

где $\widetilde{R}(t) = R\left(R_4(t), R_5(t)\right)R_4'(t)$ — рациональная дробь.

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\right)dx$$

сводятся подстановкой

$$t^2 = ax+b \tag{25.11}$$

к рассмотренным интегралам вида (25.8).

В самом деле, из (25.11) имеем

$$x = \frac{t^2-b}{a}, \quad dx = \frac{2}{a}\,t\,dt,$$

$$\sqrt{cx+d} = \sqrt{\frac{c}{a}\,t^2 - \frac{cb}{a} + d} = \sqrt{At^2+B},$$

где

$$A = \frac{c}{a}, \quad B = -\frac{cb}{a} + d,$$

поэтому

$$\int R\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\right)dx = \int R_6\left(t, \sqrt{At^2+B}\right)dt,$$

где $R_6(u, v)$ — рациональная функция переменных u и v. В правой части последнего равенства стоит интеграл типа (25.8).

Вычисление интегралов с помощью подстановок Эйлера обычно приводит к громоздким выражениям, поэтому их следует применять,

вообще говоря, лишь тогда, когда рассматриваемый интеграл не удается вычислить другим более коротким способом. Например, замечая, что $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$, нетрудно убедиться, что интеграл (25.8) в случае, когда подкоренное выражение положительно на некотором интервале, с помощью линейной подстановки может быть приведен (ср. п. 22.3) к одному из трех интегралов:

$$\int R\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) dt,$$
$$\int R\left(t, \sqrt{t^2-1}\right) dt,$$
$$\int R\left(t, \sqrt{t^2+1}\right) dt$$

(конечно, здесь символом R обозначена, вообще говоря, другая, чем в формуле (25.8), рациональная функция). Для вычисления полученных интегралов часто оказывается очень удобными использовать тригонометрические подстановки

$$t = \sin u, \quad t = \cos u, \quad t = \operatorname{tg} u,$$

а также гиперболические подстановки

$$t = \operatorname{sh} u, \quad t = \operatorname{ch} u, \quad t = \operatorname{th} u.$$

25.3. Интегралы от дифференциального бинома

Выражение $x^m(a + bx^n)^p\,dx$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ называется *дифференциальным биномом*. Будем рассматривать случай, когда n, m и p — рациональные, а a и b — вещественные числа.

Положим

$$x = t^{\frac{1}{n}}, \tag{25.12}$$

тогда

$$dx = \frac{1}{n}\, t^{\frac{1}{n}-1}$$

и

$$\int x^m (a + bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int (a + bt)^p\, t^{\frac{m+1}{n}-1}\,dt.$$

Таким образом, интеграл

$$\int x^m (a + bx^n)^p\,dx \tag{25.13}$$

сводится подстановкой (25.12) к интегралу типа

$$\int (a+bt)^p t^q \, dt, \tag{25.14}$$

где p и q рациональны. В рассматриваемом случае

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

Первый случай: p — целое число.

Пусть $q = \frac{r}{s}$, где r и s — целые числа. Согласно результатам п. 25.1 в этом случае подстановка $z = t^{\frac{1}{s}}$ сводит интеграл (25.14) к интегралу от рациональной дроби.

Второй случай: q — целое число.

Пусть теперь $p = \frac{r}{s}$, r и s — целые числа. Согласно результатам пункта 25.1, интеграл (25.14) приводится в этом случае подстановкой $z = (a + bt)^{\frac{1}{s}}$ к интегралу от рациональной дроби.

Третий случай: $p + q$ — целое.

Пусть $p = \frac{r}{s}$, r и s — целые. Запишем для наглядности интеграл (25.14) несколько в другом виде:

$$\int (a+bt)^p t^q \, dt = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q} \, dt.$$

Снова имеем интеграл типа рассмотренного в том же пункте 25.1. На этот раз к интегралу от рациональной дроби его приводит подстановка

$$z = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Итак, в трех случаях, когда одно из чисел p, q или $p + q$ является целым, интеграл (25.14) при помощи указанных выше подстановок приводится к интегралу от рациональной дроби.

Применительно к интегралу (25.13) этот результат выглядит следующим образом: когда одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n} + p$ является целым, интеграл (25.13) может быть сведен к интегралу от рациональной дроби. При этом в случае, когда p целое, это сведение осуществляет подстановка

$$z = x^{\frac{n}{s}},$$

где число s является знаменателем дроби $\frac{m+1}{n}$, т. е. $\frac{m+1}{n}=\frac{r}{s}$; в случае, когда $\frac{m+1}{n}$ целое, — подстановка

$$z=(a+bx^n)^{\frac{1}{s}},$$

где число s является знаменателем дроби p, т. е. $p=\frac{r}{s}$; а в случае, когда $\frac{m+1}{n}+p$ целое, — подстановка

$$z=(ax^{-n}+b)^{\frac{1}{s}},$$

где число s также является знаменателем дроби p.

П. Л. Чебышев *) показал, что при показателях m, n и p не удовлетворяющих вышеуказанным условиям, интеграл (25.13) не выражается через элементарные функции.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I=\int \sqrt{x}\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{x^3}}}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}dx.$$

Здесь

$$m=\frac{1}{2},\quad n=-\frac{3}{2},\quad p=\frac{1}{4}\quad\text{и}\quad\frac{m+1}{n}=-1;$$

имеем второй случай.

Сделаем указанную выше подстановку:

$$z=\left(1-x^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}},\tag{25.15}$$

отсюда

$$x=(1-z^4)^{-\frac{2}{3}},$$

$$dx=\frac{8}{3}(1-z^4)^{-\frac{5}{3}}z^3\,dz,$$

и потому

$$I=\frac{8}{3}\int\frac{z^4}{(1-z^4)^2}dz=\frac{2}{3}\int z\,d\frac{1}{1-z^4}=\frac{2}{3}\left(\frac{z}{1-z^4}-\int\frac{dz}{1-z^4}\right)=$$

$$=\frac{2z}{3(1-z^4)}-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{1+z^2}\right)dz=$$

$$=\frac{2z}{3(1-z^4)}-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}z+C,$$

где z выражается через x, согласно формуле (25.15).

*) П. Л. Чебышев (1821—1894) — русский математик.

25.4. Интегралы вида $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \quad a \neq 0,$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$. С принципиальной точки зрения этот интеграл всегда можно свести к интегралу от рациональной дроби с помощью одной из подстановок Эйлера (см. п. 25.2). Однако в данном конкретном случае значительно быстрее к цели приводит обычно другой прием.

Именно покажем, что имеет место формула

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (25.16)$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени не выше, чем $n-1$, а α — некоторое число.

Итак, пусть многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \qquad (25.17)$$

задан. Если существует многочлен

$$P_{n-1}(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_0, \qquad (25.18)$$

удовлетворяющий условию (25.16), то, дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = P'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{P_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\alpha}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

или

$$2P_n(x) = 2P'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + P_{n-1}(x)(2ax+b) + 2\alpha. \qquad (25.19)$$

Здесь слева стоит многочлен степени n, а справа каждое слагаемое также является многочленом степени не больше n.

Замечая, что

$$P'_{n-1}(x) = (n-1)\,b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + k b_k x^{k-1} + \ldots + b_1, \qquad (25.20)$$

и подставляя (25.17), (25.18) и (25.20) в (25.19), имеем

$$2(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) =$$
$$= 2(ax^2 + bx + c)[(n-1) b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + k b_k x^{k-1} + \ldots + b_1] +$$
$$+ (2ax + b)(b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_k x^k + \ldots + b_0) + 2\alpha.$$

Приравнивая коэффициенты у одинаковых степеней x, получим следующую систему n линейных уравнений с n неизвестными $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, \alpha$:

$$\begin{aligned}
2a_0 &= 2cb_1 + bb_0 + 2\alpha,\\
2a_1 &= 2bb_1 + 4cb_2 + 2ab_0 + bb_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
2a_k &= 2(k-1) ab_{k-1} + 2kbb_k + 2(k+1) cb_{k+1} + \\
&\quad + 2ab_{k-1} + bb_k, \qquad (25.21)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
2a_{n-1} &= 2(n-2) ab_{n-2} + 2(n-1) bb_{n-1} + 2ab_{n-2} + bb_{n-1},\\
2a_n &= 2(n-1) ab_{n-1} + 2ab_{n-1}.
\end{aligned}$$

Из последнего уравнения сразу находится b_{n-1}:

$$b_{n-1} = \frac{a_n}{na}.$$

Подставляя это выражение в предпоследнее уравнение и замечая, что в этом уравнении коэффициент у неизвестного b_{n-2} равен $2a(n-1) \neq 0$, найдем значение b_{n-2}. Подставляя далее значения b_{n-1} и b_{n-2} в предыдущее уравнение, найдем значение b_{n-3}, и т. д. Последовательно получим все значения неизвестных b_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$). После этого из первого уравнения сразу находится неизвестное α.

Таким образом, система (25.21) имеет решение при любых значениях $a_0, a_1, \ldots, a_n$, поэтому определитель этой системы не равен нулю и указанное решение единственно.

При практическом применении формулы (25.16) многочлен $P_{n-1}(x)$ пишут с неопределенными коэффициентами, которые находят, решая систему (25.21). После этого вычисление данного интеграла сводится к вычислению интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

который в случае, когда подкоренное выражение положительно на некотором промежутке, легко сводится к табличному (см. **п. 22.3**).

Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x-\lambda)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

подстановкой

$$t=\frac{1}{x-\lambda}$$

сводятся к интегралам рассмотренного типа (25.16).

§ 26 ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

26.1. Интегралы вида $\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$

Подстановка

$$u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

сводит указанный в заглавии интеграл к интегралу от рациональной дроби. Действительно,

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$x=2\operatorname{arctg} u,\qquad dx=\frac{2du}{1+u^2}, \tag{26.1}$$

поэтому

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\ \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}.$$

Таким образом, получим интеграл от рациональной функции. Вычислим указанным методом интеграл

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}.$$

Используя формулы (26.1), получим

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}=2\int \frac{du}{(1+u)^2}=-\frac{2}{1+u}+C=-\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$$

Следует, однако, иметь в виду, что, хотя с принципиальной точки зрения рассматриваемые интегралы всегда можно привести к интегралу от рациональной дроби указанным методом, при практическом его применении он часто приводит к громоздким вычислениям; вместе с тем другие методы, в частности подстановки вида

$$u = \sin x, \quad u = \cos x, \quad u = \operatorname{tg} x, \tag{26.2}$$

иногда значительно быстрее позволяют вычислить нужный интеграл.

Примеры. 1. Рассмотрим интеграл $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. Представим его в виде

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x};$$

сразу видно, что в этом случае очень удобна подстановка $u = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\, d \operatorname{tg} x = \int (1 + u^2)\, du =$$

$$= u + \frac{u^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

2. Представляя интеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ в виде

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^4 x},$$

легко убеждаемся в целесообразности подстановки $u = \cos x$; действительно,

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\int \frac{d \cos x}{\sin^4 x} = -\int \frac{du}{(1 - u^2)^2} =$$

$$= -\int \frac{du}{1 - u^2} - \int \frac{u^2\, du}{(1 - u^2)^2} = -\int \frac{du}{1 - u^2} + \frac{1}{2} \int u \frac{d(1 - u^2)}{(1 - u^2)^2} =$$

$$= -\int \frac{du}{1 - u^2} - \frac{u}{2(1 - u^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{1 - u^2} = -\frac{u}{2(1 - u^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{1 - u^2} =$$

$$= -\frac{u}{2(1 - u^2)} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| + C = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{4} \ln \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + C.$$

3. Иногда при вычислении интегралов, подынтегральное выражение которых содержит $\sin x$ и $\cos x$, бывает полезно прибегать и к другим искусственным приемам, используя известные тригонометрические формулы, как, например, формулу $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Покажем на рассмотренном только что примере способ применения этой формулы:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} + \int \cos x \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{d\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\ \text{in}^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C.$$

Как и следовало ожидать, получился тот же результат, правда, записанный несколько иначе.

26.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Пусть m и n — рациональные числа. Интеграл $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ с помощью подстановок $u = \sin x$ или $u = \cos x$ сводится к интегралу от дифференциального бинома.

Действительно, полагая, например, $u = \sin x$, получим

$$\cos x = (1 - u^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$du = \cos x\,dx, \quad dx = (1 - u^2)^{-\frac{1}{2}}\,du,$$

и потому

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \int u^m (1 - u^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx.$$

Таким образом, интеграл $\int \sin^m x\ \cos^m x\,dx$ выражается или нет через элементарные функции в зависимости от того, обладает этим свойством или нет получающийся интеграл от дифференциального бинома.

В случае, когда m и n целые (не обязательно положительные) числа, интеграл

$$\int \sin^m x \cos^m x\,dx$$

относится к типу интегралов, рассмотренных в предыдущем пункте в частности, для их вычисления целесообразно применять подстановки (26.2).

Например, если $m = 2k + 1$ (соответственно $n = 2k + 1$) — нечетное число, то можно сделать подстановку $u = \cos x$ (соответственно $u = \sin x$):

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x\, d\cos x = \\ = -\int (1-u^2)^k u^n\, du,$$

рассматриваемый интеграл сведен к интегралу от рациональной дроби.

Аналогичный результат можно получить и для интеграла $\int \sin^m x \cos^{2k+1} x\, dx$ с помощью подстановки $u = \sin x$.

Если оба показателя степени m и n положительны и четны (или один из них нуль), то целесообразно применять формулы

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos^2 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

которые, очевидно, приводят рассматриваемый интеграл к интегралам того же типа, но с меньшими, также неотрицательными показателями. Например,

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

26.3. Интегралы вида $\int \sin \alpha x \cos \beta x\, dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x\, dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x\, dx$

Указанные в заглавии пункта интегралы непосредственно вычисляются, если в них подынтегральные функции преобразовать согласно формулам

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x],$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x],$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x].$$

Например,

$$\int \sin 2x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 3x + \sin x)\, dx = \\ = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

26.4. Интегралы от трансцендентных функций, вычисляющиеся с помощью интегрирования по частям

К числу интегралов, указанных в заглавии этого пункта, относятся, например, интегралы

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx,\quad \int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx,\quad \int x^n\cos\alpha x\,dx,$$

$$\int x^n\sin\alpha x\,dx,\quad \int x^n e^{\alpha x}\,dx,\quad \int x^n\arcsin x\,dx,$$

$$\int x^n\arccos x\,dx,\quad \int x^n\operatorname{arctg} x\,dx,\quad \int x^n\operatorname{arcctg} x\,dx,$$

$$\int x^n\ln x\,dx\ (n\text{—целое неотрицательное}).$$

Все эти интегралы вычисляются с помощью, вообще говоря, повторного интегрирования по частям.

Действительно,

$$I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\int e^{\alpha x}\,d\frac{\sin\beta x}{\beta}=$$

$$=\frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx=$$

$$=\frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\,d\left(-\frac{\cos\beta x}{\beta}\right)=$$

$$=\frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta}+\frac{\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta^2}-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=$$

$$=\frac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x)}{\beta^2}-\frac{\alpha^2}{\beta^2}I,$$

откуда

$$I=\frac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}+C. \tag{26.3}$$

Аналогично вычисляется и интеграл $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$.

В интегралах $\int x^n\cos\alpha x\,dx$, $\int x^n\sin\alpha x\,dx$, $\int x^n e^{\alpha x}\,dx$, положив $u=x^n$ и соответственно $dv=\cos\alpha x\,dx$, $dv=\sin\alpha x\,dx$, $dv=e^{\alpha x}\,dx$, после интегрирования по частям снова придем к интегралу одного из указанных видов, но уже с меньшим на единицу показателем степени. Применяя этот прием n раз, придем

к интегралу рассматриваемого типа с $n = 0$, который, очевидно, сразу берется. Например,

$$\int x^2 \sin x\,dx = \int x^2 d(-\cos x) = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx =$$
$$= -x^2\cos x + 2\int x\,d\sin x = -x^2\cos x + 2x\sin x -$$
$$-2\int \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Используя интегралы, рассмотренные выше, можно вычислять и более сложные интегралы, например, вычислим интеграл

$$\int x^n e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$

Интегрируя по частям и применяя (26.3), получим

$$\int x^n e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \int x^n d\left[\frac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\right] =$$
$$= x^n e^{\alpha x}\frac{\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{n\beta}{\alpha^2+\beta^2}\int x^{n-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx -$$
$$-\frac{n\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\int x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$

Полученные в правой части интегралы — того же типа, что и исходный, только степень у x на единицу меньше. Применяя последовательно указанный прием, мы придем к интегралам вида

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx \quad \text{и} \quad \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx,$$

которые были рассмотрены выше.

Наконец, интегралы $\int x^n \arcsin x\,dx$, $\int x^n \arccos x\,dx$, $\int x^n \operatorname{arctg} x\,dx$, $\int x^n \operatorname{arcctg} x\,dx$ и $\int x^n \ln x\,dx$ сводятся интегрированием по частям к интегралу от алгебраической функции, если в них положить $dv = x^n dx$, а за функцию u взять оставшуюся трансцендентную функцию, т. е. одну из функций: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\ln x$. Например,

$$\int x\ln x\,dx = \int \ln x\,d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

26.5. Интегралы вида $\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{ch} x)\,dx$

Подстановка

$$u = \operatorname{th}\frac{x}{2}$$

сводит указанный в заглавии интеграл к интегралу от рациональной дроби.

Действительно,

$$\operatorname{sh} x = \frac{2u}{1-u^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1-u^2},$$

поэтому

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1-u^2}, \frac{1+u^2}{1-u^2}\right)\frac{du}{1-u^2}.$$

В конкретных примерах иногда оказывается значительно удобнее использовать подстановки вида $u = \operatorname{sh} x$, $u = \operatorname{ch} x$ или $u = \operatorname{th} x$, позволяющие вычислить интеграл существенно проще (ср. п. 26.1).

Интегралы вида $\int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^n x\, dx$, где m и n — рациональные числа, с помощью подстановок $u = \operatorname{sh} x$ ($u = \operatorname{ch} x$) приводятся к интегралу от дифференциального бинома (ср. п. 26.2).

26.6. Замечания об интегралах, не выражающихся через элементарные функции

Мы рассмотрели различные классы элементарных функций и нашли их первообразные, которые также являются элементарными функциями.

Однако не всякая элементарная функция имеет в качестве своей первообразной элементарную же функцию.

С подобным обстоятельством мы уже встретились при рассмотрении интеграла от дифференциального бинома: в этом случае подынтегральная функция элементарная (алгебраическая функция), а интеграл от нее, как отмечалось, вычисляется далеко не всегда.

Можно показать, что интегралы

$$\int \frac{e^x}{x^n}\, dx, \quad \int \frac{\sin x}{x^n}\, dx, \quad \int \frac{\cos x}{x^n}\, dx$$

(n — натуральное число) также не выражаются через элементарные функции.

Имеется ряд интегралов от элементарных функций, не выражающихся через элементарные функции и играющих большую роль как в самом математическом анализе, так и в его разнообразных приложениях. К таким интегралам относится, например, интеграл

$$\int e^{-x^2}\, dx,$$

а также так называемые *эллиптические интегралы*

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\, dx,$$

где $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени. В общем случае эти интегралы не выражаются через элементарные функции. Особенно часто встречаются интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{и} \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0<k<1,$$

которые подстановкой $x=\sin\varphi$ приводятся к комбинациям интегралов

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{и} \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi;$$

они называются, соответственно *эллиптическими интегралами первого и второго рода в форме Лежандра**).

Упражнение 1. Вычислить интегралы:

1. $\int |x|\,dx.$
2. $\int (2x-5)^2\,dx.$
3. $\int \sin^2 x\,dx.$
4. $\int \left(2x^2-3x+\frac{1}{x}\right)dx.$
5. $\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$
6. $\int x^2\sqrt[5]{2x^3-1}\,dx.$
7. $\int \frac{dx}{\cos x}.$
8. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$
9. $\int xe^{-x}\,dx.$
10. $\int \ln x\,dx.$
11. $\int \operatorname{arctg} x\,dx.$
12. $\int \operatorname{arctg}^2 x\,dx.$
13. $\int \sqrt{x^2+3}\,dx.$
14. $\int \sqrt{x^2-1}\,dx.$
15. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}.$
16. $\int \frac{x^4+1}{x^2(x-1)(x+1)^2}\,dx.$
17. $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx.$
18. $\int \frac{dx}{(1-x)(1+x^3)}.$
19. $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx.$
20. $\int \frac{x^7\,dx}{x^{16}+1}.$
21. $\int \frac{dx}{x^2(x^3+1)^2}.$
22. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx.$
23. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}.$
24. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$
25. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx.$
26. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$
27. $\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+2x+4}}.$

*) А. Лежандр (1752—1853) — французский математик

28. $\int \sin^3 x \cos^8 x\, dx.$

29. $\int \sin^4 x\, dx.$

30. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx.$

31. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}.$

32. $\int \frac{dx}{2+\cos x}.$

33. $\int \sin 3x \cos 5x\, dx.$

34. $\int \arccos^2 x\, dx.$

35. $\int x^2 \arcsin^2 x\, dx.$

36. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x - 2\operatorname{ch} x}.$

37. $\int x^3 \ln^3 x\, dx.$

38. $\int xe^x \sin x\, dx.$

39. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx.$

40. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$

§ 27. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

27.1. Определение интеграла по Риману

Напомним (см. п. 16.3), что разбиением τ отрезка $[a, b]$ называется любая конечная система его точек x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, такая, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b.$$

При этом пишется $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$. Каждый из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, называется отрезком разбиения τ, его длина обозначается Δx_i; $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Величина

$$\delta_\tau = \max_{i=1, 2, \ldots, k} \Delta x_i$$

называется *мелкостью разбиения* τ.

Разбиение τ' отрезка $[a, b]$ называется следующим за разбиением τ того же отрезка или подразделением отрезка τ, если каждая точка разбиения τ является и точкой разбиения τ'; иначе говоря, если каждый отрезок разбиения τ' содержится в некотором отрезке разбиения τ. В этом случае пишут $\tau' \succ \tau$, или, что то же, $\tau \prec \tau'$.

Совокупность всех разбиений данного отрезка обладает следующими свойствами.

1. Если $\tau_1 \prec \tau_2$, а $\tau_2 \prec \tau_3$, то $\tau_1 \prec \tau_3$.

2. Для любых τ_1 и τ_2 существует такое τ, что $\tau \succ \tau_1$ и $\tau \succ \tau_2$.

В самом деле, первое свойство следует просто из того, что в силу условия $\tau_3 \succ \tau_2$ каждый отрезок разбиения τ_3 содержится в некотором отрезке разбиения τ_2, который в свою очередь, согласно условию $\tau_2 \succ \tau_1$, содержится в каком-то отрезке разбиения τ_1; таким образом, всякий отрезок разбиения τ_3 лежит на определенном отрезке разбиения τ_1 — это и означает, что $\tau_3 \succ \tau_1$.

Для доказательства второго свойства разбиений заметим лишь, что если заданы два разбиения τ_1 и τ_2, то разбиение τ, состоящее из всех точек, входящих как в разбиение τ_1, так и в разбиение τ_2, очевидно, будет следовать за τ_1 и за τ_2.

Пусть теперь на отрезке $[a, b]$ определена функция f и пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — некоторое разбиение этого отрезка:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

а δ_τ — мелкость этого разбиения.

Зафиксируем произвольным образом точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и составим сумму

$$\sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Суммы вида $\sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k)$ называются *интегральными суммами Римана**) функции f (см. рис. 84). Иногда для краткости мы будем их обозначать $\sigma_\tau(f)$, $\sigma_\tau(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ или даже просто σ_τ.

Определение 1. *Функция f называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a, b]$, если существует такое число A, что для любой последовательности разбиений отрезка $[a, b]$*

$$\tau_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^{i=k_n},\ n = 1, 2, \ldots,$$

у которой $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0$, и для любого выбора точек

$$\xi_i^{(n)} \in \left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right],\ i = 1, 2, \ldots, k_n,\ n = 1, 2, \ldots,$$

выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f\left(\xi_i^{(n)}\right) \Delta x_i^{(n)} = A, \tag{27.1}$$

где

$$\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)};\ i = 1, 2, \ldots, k_n;\ n = 1, 2, \ldots.$$

При выполнении этих условий число A называется (римановым) определенным интегралом функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n}\left(f; \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)}\right),$$

где

$$\lim_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0.$$

*) Г. Риман (1826—1866) — немецкий математик.

Для краткости записи будем в этом случае просто писать

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f).$$

Подобно тому как определение предела функции можно сформулировать двумя эквивалентными способами с помощью пределов последовательностей и с помощью «($\varepsilon - \delta$)-языка», так и определение интеграла можно сформулировать иначе.

Определение 2. *Число A называется определенным интегралом функции f на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что, каково бы ни было разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, мелкость которого меньше δ: $\delta_\tau < \delta$, и каковы бы ни были точки*

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i - A \right| < \varepsilon,$$

где

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Упражнение 1. Доказать, что два данных выше определения определенного интеграла эквивалентны.

Заметим, что рассмотренное здесь понятие предела интегральных сумм Римана является новым понятием, не укладывающимся ни в понятие предела последовательности, ни в понятие предела функции.

В дальнейшем придется использовать аналогичное понятие предела не только для интегральных сумм Римана, но и для других объектов. Поэтому сформулируем общее определение предела этого вида.

Определение 3. *Рассмотрим множество $\mathfrak{T} = \{\tau\}$ всех разбиений отрезка $[a, b]$. Пусть на этом множестве определена числовая, вообще говоря, многозначная функция $\Phi(\tau)$, $\tau \in \mathfrak{T}$. Будем говорить, что функция $\Phi(\tau)$ при $\delta_\tau \to 0$ имеет предел, равный A, и будем писать*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \Phi(\tau) = A,$$

если для любой последовательности разбиений $\tau_n \in \mathfrak{T}$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0$, при любом выборе значений $\Phi(\tau_n)$ числовая последовательность $\Phi(\tau_n)$ сходится к числу A, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\tau_n) = A.$$

Поскольку это понятие предела определено с помощью понятия предела последовательности, то для него оказываются справедливыми многие свойства, аналогичные соответствующим свойствам предела последовательности. С соответствующими примерами мы встретимся в дальнейшем.

Как и в случае предела интегральных сумм Римана, понятие этого предела можно сформулировать на «(ε — δ)-языке», что предоставляется читателю.

27.2. Ограниченность интегрируемой функции

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция f не ограничена на отрезке $[a, b]$ и пусть фиксировано некоторое разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ этого отрезка. В силу неограниченности функции f на всем отрезке $[a, b]$ она не ограничена по крайней мере на одном отрезке разбиения τ. Пусть для определенности функция f не ограничена на отрезке $[x_0, x_1]$, тогда на этом отрезке существует последовательность $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что *)

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\xi_1^{(n)}\right) = \infty. \tag{27.2}$$

Зафиксируем теперь каким-либо образом точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 2, 3, \ldots, k$, тогда сумма

$$\sum_{i=2}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

будет иметь вполне определенное значение. Поэтому в силу (27.2)

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_\tau\left(f;\ \xi_1^{(n)},\ \xi_2, \ldots,\ \xi_k\right) = \lim_{n\to 2}\left[f\left(\xi_1^{(n)}\right)\Delta x_1 + \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right] = \infty,$$

и, значит, каково бы ни было число $M > 0$, всегда можно подобрать такой номер n_0, что если на первом отрезке $[x_0, x_1]$ взять точку $\xi_1^{(n_0)}$, то

$$\left|\sigma_\tau\left(f;\ \xi_1^{(n_0)},\ \xi_2, \ldots,\ \xi_k\right)\right| > M.$$

Отсюда следует, что суммы σ_τ не могут стремиться ни к какому пределу при $\delta_\tau \to 0$.

Теорема доказана.

---

*) Действительно, в силу неограниченности функции f на отрезке $[x_0, x_1]$, например, для любого натурального $n = 1, 2, \ldots$ существует точка $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$, такая, что $\left|f\left(\xi_1^{(n)}\right)\right| > n$. Очевидно, что последовательность $\left\{\xi_1^{(n)}\right\}$ и удовлетворяет условию (27.2).

Условие ограниченности функции f, являясь необходимым условием интегрируемости функции, не является вместе с тем достаточным для интегрируемости. В качестве примера, доказывающего это утверждение, рассмотрим так называемую *функцию Дирихле* *).

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально,}\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.}\end{cases}$$

Рассмотрим эту функцию, например, на отрезке $[0, 1]$. Она, очевидно, ограничена на этом отрезке. Покажем, что она не интегрируема. Зафиксируем произвольное разбиение $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[0, 1]$. Если выбрать точки $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots, k$, рациональными, то получим

$$\sigma_\tau=\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\Delta x_i=1,$$

а если взять ξ_i иррациональными, то получим

$$\sigma_\tau=\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i=0.$$

Так как это верно для любого разбиения τ, то интегральные суммы σ_τ заведомо не стремятся ни к какому пределу при $\delta_\tau\to 0$.

27.3. Верхние и нижние интегральные суммы Дарбу. Верхний и нижний интегралы Дарбу

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$ и

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\quad i=1, 2, \ldots, k.$$

Положим (рис. 84)

$$M_i=\sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x),\quad m_i=\inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x),\quad i=1, 2, \ldots, k,$$

$$S_\tau=S_\tau(f)=\sum_{i=1}^{k} M_i\,\Delta x_i, \tag{27.3}$$

$$s_\tau=s_\tau(f)=\sum_{i=1}^{k} m_i\,\Delta x_i. \tag{27.4}$$

Очевидно,

$$s_\tau\leqslant S_\tau.$$

*) Л. Дирихле (1805—1859) — немецкий математик.

Сумма S_τ называется *верхней интегральной суммой Дарбу**), а сумма s_τ — *нижней*

Отметим следующие свойства интегральных сумм Дарбу.

1. *Если функция f ограничена, то при любом разбиении суммы S_τ и s_τ определены*, т. е. M_i и m_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, конечны, и потому выражения (27.3) имеют смысл.

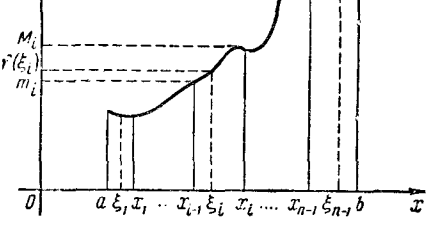


Рис. 84

2. *Если $\tau < \tau'$, то*

$$S_\tau \leqslant S_{\tau'} \text{ и } s_\tau \leqslant s_{\tau'}.$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ и $\tau' = \{x'_j\}_{j=0}^{j=k'}$ — два разбиения отрезка $[a, b]$, пусть $\tau < \tau'$ и пусть

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$m'_j = \inf_{x'_{j-1} \leqslant x \leqslant x'_j} f(x), \quad j = 1, 2, \ldots, k'.$$

Если $[x'_{j-1}, x'_j] \subset [x_{i-1}, x_i]$, то, очевидно,

$$m_i \leqslant m'_j. \tag{27.5}$$

В силу условия $\tau < \tau'$ каждый отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения τ является объединением каких-то отрезков разбиения τ'; будем обозначать эти отрезки $[x_{j_i-1}, x'_{j_i}]$.

Таким образом, если

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ и}$$

$$\Delta x'_{j_i} = x'_{j_i} - x'_{j_i-1},$$

то (рис. 85)

$$\Delta x_i = \sum_{j_i} \Delta x'_{j_i}.$$

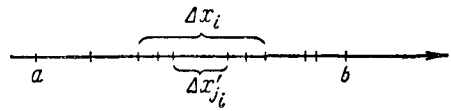


Рис. 85

Используя эти обозначения и неравенство (27.5), получим

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} m_i \sum_{j_i} \Delta x'_{j_i} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i} m_i \Delta x'_{j_i} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i} m'_{j_i} \Delta x'_{j_i} = \sum_{j=1}^{k'} m'_j \Delta x'_j = s_{\tau'}.$$

Мы доказали, что $s_\tau \leqslant s_{\tau'}$. Аналогично доказывается, что $S_\tau \geqslant S_{\tau'}$ при $\tau < \tau'$.

*) Г. Дарбу (1842—1917) — французский математик.

Следствие. *Для любых двух разбиений* τ_1 *и* τ_2 *отрезка* $[a, b]$ *выполняется неравенство*

$$s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}, \tag{27.6}$$

т. е. любая нижняя интегральная сумма Дарбу меньше любой верхней.

Действительно, если даны два разбиения τ_1 и τ_2 отрезка $[a, b]$, то существует разбиение τ этого отрезка, такое, что $\tau > \tau_1$ и $\tau > \tau_2$ (см. п 27.1). Применяя свойство 2, получим

$$s_{\tau_1} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant S_{\tau_2}.$$

Следствие доказано.

3. *Если* $\sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k)$*—какая-либо интегральная сумма Римана, соответствующая данному разбиению* τ, *то*

$$s_\tau = \inf_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant \sup_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau = S_\tau.$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ — разбиение отрезка $[a, b]$ и $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Если заданы какие-либо числовые множества X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, и постоянные $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то для множества

$$X = \left\{x : x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i,\ x_i \in X_i,\ i = 1, 2, \ldots, k\right\},$$

как легко видеть, справедливы равенства (почему?)

$$\sup X = \sum_{i=1}^{k} a_i \sup X_i, \quad \inf X = \sum_{i=1}^{k} a_i \inf X_i.$$

В силу этого имеем

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \inf_{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i} f(\xi_i) \Delta x_i =$$

$$= \inf_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i = 1, 2, \ldots, k}} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \Delta x_i =$$

$$= \inf_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i = 1, 2, \ldots, k}} \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k) \leqslant \sigma_\tau(f; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k).$$

Аналогично

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{\kappa} \sup_{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i} f(\xi_i) \Delta x_i =$$

$$= \sup_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ k}} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \Delta x_i = \sup_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ k}} \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k) \geqslant \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Свойство 3 доказано.

4. $S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{i} \omega_i(f)$,

где $\omega_i(f)$*—колебания функции* f *на отрезке* $[x_{i-1}, x_i]$ (см. п. 19.5), $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Отметим сначала, что если для двух данных числовых множеств X и Y положить $Z = \{z : z = x - y,\ x \in X,\ y \in Y\}$, то $\sup Z = \sup X - \inf Y$ (почему?).

Используя это, получим

$$M_i - m_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) = \sup_{\substack{x_{i-1} \leqslant x' \leqslant x_i \\ x_{i-1} \leqslant x'' \leqslant x_i}} [f(x'') - f(x')] =$$

$$= \omega_i(f),\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

поэтому

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f) \Delta x_i.$$

Положим теперь

$$\underline{I} = \sup_\tau s_\tau,\quad \overline{I} = \inf_\tau S_\tau,$$

$\underline{I}$ называется *нижним интегралом Дарбу*, а $\overline{I}$ — *верхним*.

Из свойств 1 и 2 интегральных сумму Дарбу следует, что если функция f ограничена, то как нижний ее интеграл Дарбу, так и верхний конечны. Из следствия свойства 2 следует также, что

$$\underline{I} \leqslant \overline{I}. \tag{27.7}$$

27.4. Необходимые и достаточные условия интегрируемости

Теорема 2. *Для того чтобы ограниченная на некотором отрезке функция была интегрируема на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{27.8}$$

Условие (27.8) означает (см. определение 3 в п. 27.1), что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что

$$|S_\tau - s_\tau| < \varepsilon \tag{27.9}$$

для любого разбиения τ мелкости $\delta_\tau < \delta$.

Поскольку $s_\tau \leqslant S_\tau$, то неравенство (27.9) равносильно неравенству

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Доказательство необходимости. Пусть ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция f интегрируема на этом отрезке и пусть

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

тогда

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = I.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что если $\delta_\tau < \delta$, то

$$|\sigma_\tau - I| < \varepsilon, \text{ или } I - \varepsilon < \sigma_\tau < I + \varepsilon.$$

Отсюда при $\delta_\tau < \delta$, согласно свойству 3 интегральных сумм Дарбу (см. п. 27.3), получаем неравенство

$$I - \varepsilon \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant I + \varepsilon.$$

Таким образом, если $\delta_\tau < \delta$, то

$$0 \leqslant S_\tau - s_\tau \leqslant 2\varepsilon,$$

а это и означает выполнение условия (27.8).

Доказательство достаточности. Пусть функция f ограничена и имеет место (27.8). Из определения нижнего и верхнего интегралов Дарбу и из неравенства (27.7) имеем

$$s_\tau \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S_\tau, \tag{27.10}$$

поэтому

$$0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} \leqslant S_\tau - s_\tau,$$

откуда в силу (27.8) следует, что $\underline{I} - \overline{I} = 0$. Обозначая их общее значение просто через I, т. е. $I = \underline{I} = \overline{I}$, из (27.10) получим

$$s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau,$$

и потому

$$0 \leqslant I - s_\tau \leqslant S_\tau - s_\tau,\ 0 \leqslant S_\tau - I \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

Отсюда в силу (27.8) следует, что

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (I - s_\tau) = \lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - I) = 0,$$

а значит,

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = I. \tag{27.11}$$

Но в силу свойства 3 интегральных сумм Дарбу (см. п. 27.3)

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau. \tag{27.12}$$

Из (27.11) и (27.12) следует (ср. аналогичные утверждения в п. 3.1 и 4.5), что

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = I,$$

это и означает интегрируемость функции f.

Теорема доказана.

Следствие. *Если функция f интегрируема, то не только ее интегральные суммы Римана, но также и интегральные суммы Дарбу стремятся к ее интегралу, когда мелкость разбиения стремится к нулю.*

Действительно, если функция f интегрируема, то выполняется условие (27.8), а из него, как мы видели, и следует условие (27.11).

Задача 14. Доказать, что, для того чтобы функция была интегрируема на отрезке, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и чтобы ее нижний и верхний интегралы Дарбу совпадали; при этом общее значение этих интегралов и является ее интегралом.

27.5. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций

Теорема 3. *Функция, определенная и непрерывная на некотором отрезке, интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Из непрерывности функции на отрезке, во-первых, следует ее ограниченность (см. п. 6.1), а во-вторых, ее равномерная непрерывность (см. п. 19.5) на этом отрезке, т. е.

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta; f) = 0, \tag{27.13}$$

где $\omega(\delta; f)$ — модуль непрерывности функции f.

Согласно свойству 4 интегральных сумм Дарбу (см. п. 27.2), для любого разбиения $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$

$$S_\tau(f)-s_\tau(f)=\sum_{i=1}^{k}\omega_i(f)\,\Delta x_i,$$

где $\omega_i(f)$ — колебания функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots, k$. Замечая, что

$$\omega_i(f)=\sup_{\substack{x_{i-1}\leqslant x'\leqslant x_i\\ x_{i-1}\leqslant x''\leqslant x_i}}|f(x'')-f(x')|\leqslant\sup_{\substack{|x''-x'|\leqslant\delta_\tau\\ a\leqslant x'\leqslant b\\ a\leqslant x''\leqslant b}}|f(x'')-f(x')|=\omega(\delta_\tau; f),$$

имеем

$$S_\tau(f)-s_\tau(f)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\omega_i(f)\,\Delta x_i\leqslant\omega(\delta_\tau; f)\sum_{i=1}^{k}\Delta x_i=(b-a)\,\omega(\delta_\tau; f).$$

Отсюда в силу (27.13) следует, что

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}[S_\tau(f)-s_\tau(f)]=0,$$

поэтому (см. п. 27.4) функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Функция, определенная и монотонная на отрезке* $[a, b]$, *интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$, например, монотонно возрастает на этом отрезке. Тогда

$$f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b),\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Таким образом, функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Далее, для любого разбиения $\tau=\{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, очевидно, имеем

$$m_i=f(x_{i-1}),\ M_i=f(x_i),\ i=1, 2, \ldots, k,$$

поэтому

$$S_\tau(f)-s_\tau(f)=\sum_{i=1}^{k}(M_i-m_i)\,\Delta x_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\,\Delta x_i\leqslant\delta_\tau\sum_{i=1}^{k}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=$$

$$=|f(b)-f(a)|\,\delta_\tau,$$

ибо в сумме $\sum_{i=1}^{k}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ взаимно уничтожаются все слагаемые, кроме $f(b)$ и $f(a)$.

Из полученного неравенства следует, что

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [S_\tau(f) - s_\tau(f)] = 0.$$

Поэтому (см. п. 27.4) функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Теорема доказана.

Упражнение 2. Если функция f ограничена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, кроме, быть может, конечного числа точек, то она интегрируема на этом отрезке.

Задача 15. Для того чтобы ограниченная на некотором отрезке функция была интегрируема на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала конечная, или счетная, система интервалов, которые содержали бы все точки разрыва заданной функции и сумма длин которых была бы меньше заданного ε.

§ 28. СВОЙСТВА ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

28.1. Свойства определенного интеграла

Будем систематически, не делая специальных ссылок, употреблять обозначения и терминологию, введенную в предыдущем параграфе.

1. $\int_a^b dx = b - a.$

Действительно, здесь подынтегральная функция равна единице, а поэтому для любой интегральной суммы Римана σ_τ имеем

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = b - a.$$

2. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке*

$$[a^*, b^*] \subset [a, b].$$

Доказательство. Прежде всего, если функция f ограничена на отрезке $[a, b]$, то она, очевидно, ограничена и на отрезке $[a^*, b^*]$. Далее, каково бы ни было разбиение $\tau^* = \{x_i^*\}_{i=0}^{i=k^*}$ отрезка $[a^*, b^*]$ мелкости δ_{τ^*}, его всегда можно продолжить в разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ такой же мелкости $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$; для этого добавим к точкам x_i^*, $i = 1, 2, \ldots, k^*$, конечное число соответствующим образом выбранных точек, принадлежащих отрезку $[a, b]$, но не принадлежащих отрезку $[a^*, b^*]$.

Полагая

$$m_i^* = \inf_{x_{i-1}^* \leqslant x \leqslant x_i^*} f(x), \quad M_i^* = \sup_{x_{i-1}^* \leqslant x \leqslant x_i^*} f(x),$$

$$\Delta x_i^* = x_i^* - x_{i-1}^*, \quad i = 1, 2, \ldots, k^*,$$

и замечая, что каждое слагаемое суммы $\sum_{i=1}^{k^*} (M_i^* - m_i^*)\,\Delta x_i^*$ является и слагаемым суммы $\sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\,\Delta x_i$ и что все слагаемые обеих сумм неотрицательны, имеем

$$0 \leqslant S_{\tau^*} - s_{\tau^*} = \sum_{i=1}^{k^*} (M_i^* - m_i^*)\,\Delta x_i^* \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\,\Delta x_i = S_\tau - s_\tau. \tag{28.1}$$

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то, как мы знаем (см. п. 27.4),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0, \tag{28.2}$$

поскольку $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$, то из (28.2) и из неравенства (28.1) следует, что

$$\lim_{\delta_{\tau^*} \to 0} (S_{\tau^*} - s_{\tau^*}) = 0, \tag{28.3}$$

т. е. (см. п. 27.4) функция f интегрируема на отрезке $[a^*, b^*]$.

3. *Пусть $a < c < b$. Если функция f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то функция f интегрируема и на отрезке $[a, b]$, причем*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{28.4}$$

Доказательство. Если функция f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, d]$, то она ограничена на каждом из этих отрезков, а значит, и на всем отрезке $[a, b]$, т. е. существует постоянная $A > 0$, такая, что

$$|f(x)| \leqslant A, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{28.5}$$

Пусть τ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Если точка c не входит в разбиение τ, то обозначим через τ' разбиение отрезка $[a, b]$, получающееся из τ добавлением точки c; очевидно,

$$\tau' < \tau. \tag{28.6}$$

Если же точка c входит в разбиение τ, то положим $\tau = \tau'$.

В первом случае обозначим через Δ' и Δ'' длины двух отрезков разбиения τ', примыкающих к точке c с двух сторон. Очевидно, что $\Delta = \Delta' + \Delta''$ является длиной отрезка разбиения τ, содержащего точку c (рис. 86). Верхние интегральные суммы Дарбу S_τ и $S_{\tau'}$ функции f на отрезке $[a, b]$ отличаются только лишь слагаемыми, соответствующими отрезкам разбиения τ и τ', которые содержат точку c.

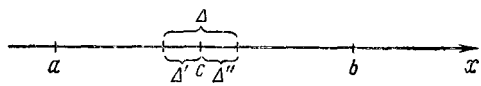


Рис. 86

Обозначая через M', M'' и M верхнюю грань функции $|f|$ на рассматриваемых отрезках, длины которых обозначены соответственно Δ', Δ'' и Δ, получим (см. также (28.5))

$$0 \leqslant S_\tau - S_{\tau'} \leqslant M'\Delta' + M''\Delta'' + M\Delta \leqslant A(\Delta' + \Delta'' + \Delta) =$$

$$= 2A\Delta \leqslant 2A\delta_\tau,$$

поэтому

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - S_{\tau'}) = 0. \tag{28.7}$$

Аналогично

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (s_\tau - s_{\tau'}) = 0. \tag{28.8}$$

Во втором случае при $\tau' = \tau$ просто

$$S_{\tau'} = S_\tau, \quad s_{\tau'} = s_\tau,$$

и условия (28.7) и (28.8) также выполняются очевидным образом.

Совокупность точек разбиения τ', принадлежащих отрезку $[a, c]$, образует разбиение этого отрезка, которое обозначим $\tau'[a, c]$; совокупность же точек разбиения τ', принадлежащих отрезку $[c, b]$, образует разбиение этого отрезка, которое обозначим через $\tau'[c, b]$.

Очевидно,

$$S_{\tau'} = S_{\tau'[a, c]} + S_{\tau'[c, b]}, \quad s_{\tau'} = s_{\tau'[a, c]} + s_{\tau'[c, b]}, \tag{28.9}$$

поэтому

$$S_{\tau'} - s_{\tau'} = (S_{\tau'[a, c]} - s_{\tau'[a, c]}) + (S_{\tau'[c, b]} - s_{\tau'[c, b]}), \tag{28.10}$$

и так как функция f по предположению интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то

$$\lim_{\delta_{\tau'[a, c]}\to 0}(S_{\tau'[a, c]}-s_{\tau'[a, c]})=0, \quad \lim_{\delta_{\tau'[c, b]}\to 0}(S_{\tau'[c, b]}-s_{\tau'[c, b]})=0.$$

Замечая, что $\delta_{\tau'[a, c]}\leqslant\delta_{\tau'}$, $\delta_{\tau'[c, b]}\leqslant\delta_{\tau'}$, отсюда и из (28.10) имеем

$$\lim_{\delta_{\tau'}\to 0}(S_{\tau'}-s_{\tau'})=\lim_{\delta_{\tau'}\to 0}(S_{\tau'[a, c]}-s_{\tau'[a, c]})+\lim_{\delta_{\tau'}\to 0}(S_{\tau'[c, b]}-s_{\tau'[c, b]})=0. \tag{28.11}$$

Мы видели выше, что выполнение подобного условия для любых разбиений τ влечет за собой интегрируемость функции. Здесь же рассматриваемые разбиения τ' имеют специальный вид: они обязательно содержат точку c. Для того чтобы перейти к произвольному разбиению τ, представим разность $S_\tau - s_\tau$ в виде

$$S_\tau-s_\tau=(S_\tau-S_{\tau'})+(S_{\tau'}-s_{\tau'})+(s_{\tau'}-s_\tau).$$

Теперь из (28.7), (28.8) и (28.11) имеем

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}(S_\tau-s_\tau)=0, \tag{28.12}$$

и так как τ было произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, то из ограниченности функции f на отрезке $[a, b]$ и выполнения условия (28.12) следует ее интегрируемость на этом отрезке.

Из интегрируемости функции f на отрезках $[a, c]$, $[c, b]$ и $[a, b]$ следует (см. п. 27.4), что

$$\lim_{\delta_{\tau'[a, c]}\to 0}S_{\tau'[a, c]}=\int_a^b f(x)\,dx, \quad \lim_{\delta_{\tau'[b, c]}\to 0}S_{\tau'[b, c]}=\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{\delta_{\tau'}\to 0}S_{\tau'}=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Поэтому, переходя к пределу при $\delta_{\tau'}\to 0$ в первом равенстве (28.9), мы и получим формулу (28.4).

4. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то их сумма $f+g$ также интегрируема на этом отрезке и*

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.13}$$

Доказательство. В самом деле, каково бы ни было разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, имеем

$$\sigma_\tau(f+g) = \sum_{i=1}^{k} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\,\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{k} g(\xi_i)\,\Delta x_i = \sigma_\tau(f) + \sigma_\tau(g). \qquad (28.14)$$

Поскольку в силу интегрируемости функций f и g существуют пределы интегральных сумм $\sigma_\tau(f)$ и $\sigma_\tau(g)$ при $\delta_\tau \to 0$, то из (28.14) следует, что существует и предел (почему?)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f+g) = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) + \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(g), \qquad (28.15)$$

что и означает интегрируемость функции $f + g$ на отрезке $[a, b]$.

Согласно же определению интеграла,

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f+g) = \int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx,$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(g) = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Подставляя эти выражения в формулу (28.15), получим (28.13).

5. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и c — постоянная, тогда функция cf также интегрируема на этом отрезке и*

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Каковы бы ни были разбиения $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, имеем

$$\sigma_\tau(cf) = \sum_{i=1}^{k} cf(\xi_i)\,\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i = c\sigma_\tau(f),$$

отсюда, проводя рассуждения по той же схеме, как и при доказательстве предыдущего свойства, получаем

$$\int_a^b c f(x)\,dx = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(cf) = \lim_{\delta_\tau \to 0} c\,\sigma_\tau(f) = c \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) = c \int_a^b f(x)\,dx.$$

6. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, тогда и их произведение $f(x)g(x)$ также интегрируемо на этом отрезке.*

Доказательство. В силу интегрируемости функций f и g на отрезке $[a, b]$ они ограничены на этом отрезке, т. е. существуют постоянные $M > 0$ и $N > 0$, такие, что

$$|f(x)| \leqslant M, \quad |g(x)| \leqslant N \tag{28.16}$$

для всех $x \in [a, b]$.

Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — какое-либо разбиение отрезка $[a, b]$. Оценим теперь выражение $f(x'')g(x'') - f(x')g(x')$; для этого добавим и вычтем из него $f(x')g(x'')$, тогда

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') =$$
$$= [f(x'') - f(x')]\,g(x'') + [g(x'') - g(x')]\,f(x'). \tag{28.17}$$

Для точек $x' \in [x_{i-1}, x_i]$ и $x'' \in [x_{i-1}, x_i]$ из (28.16) и (28.17) следует, что

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leqslant N\omega_i(f) + M\omega_i(g), \tag{28.18}$$

где $\omega_i(f)$ и $\omega_i(g)$ суть колебания функций f и g на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Из неравенства (28.18) для колебания $\omega_i(fg)$ произведения fg на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ имеем оценку

$$\omega_i(fg) \leqslant N\omega_i(f) + M\omega_i(g). \tag{28.19}$$

Отсюда

$$S_\tau(fg) - s_\tau(fg) = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(fg)\,\Delta x_i \leqslant$$
$$\leqslant N \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\,\Delta x_i + M \sum_{i=1}^{k} \omega_i(g)\,\Delta x_i =$$
$$= N[S_\tau(f) - s_\tau(f)] + M[S_\tau(g) - s_\tau(g)]. \tag{28.20}$$

В силу интегрируемости функций f и g

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [S_\tau(f) - s_\tau(f)] = \lim_{\delta_\tau \to 0} [S_\tau(g) - s_\tau(g)] = 0.$$

Поэтому из оценки (28.20) следует

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [S_\tau(fg) - s_\tau(fg)] = 0,$$

что и влечет за собой интегрируемость произведения fg на отрезке $[a, b]$.

7. *Если функция f неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a, b]$*, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0. \tag{28.21}$$

Доказательство. В самом деле, каковы бы ни были разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, для функции $f \geqslant 0$ имеем

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i \geqslant 0. \tag{28.22}$$

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то, переходя к пределу в неравенстве (28.22), мы и получим неравенство (28.21).

Следствие. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и*

$$f(x) \geqslant g(x) \tag{28.23}$$

для всех $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.24}$$

Если интегрируемые функции f и g удовлетворяют неравенству (28.23), то

$$f(x) - g(x) \geqslant 0, \quad x \in [a, b],$$

поэтому, замечая, что функция $f - g$ интегрируема, в силу неравенства (28.21) имеем

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geqslant 0.$$

Но (см. выше свойства 4 и 5)

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx,$$

и, значит,

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0.$$

8. Нами было введено понятие определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от функции f по отрезку $[a, b]$, где, согласно принятым обозначениям, $a < b$.

Для любой функции f положим по определению

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{28.25}$$

а для функции f, интегрируемой на отрезке $[a, b]$,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad a < b. \tag{28.26}$$

Эти определения в известной мере естественны. В первом случае можно себе интуитивно представлять, что все отрезки «разбиения отрезка $[a, b]$» являются точками, а их длины Δx_i равны нулю. Поэтому все «интегральные суммы» $\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$ — в этом случае также нули, а значит и «интеграл» — также ноль.

Во втором случае можно себе представить, что длины отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ «измеряются в отрицательном направлении» оси Ox, и поэтому все их длины отрицательны. Отсюда все «интегральные суммы» интеграла $\int_b^a f(x)\,dx$ отличаются знаком от соответствующих интегральных сумм интеграла $\int_a^b f(x)\,d$, что и делает естественной формулу (28.26).

Этим интуитивным соображениям можно, конечно, придать и строгую логическую форму, введя соответствующие математические определения, однако гораздо проще и короче ввести равенства (28.25) и (28.26) просто по определению.

9. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то и функция $|f|$ также интегрируема на этом отрезке и*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad a < b. \tag{28.27}$$

Действительно, во-первых, из ограниченности функции f, очевидно, следует и ограниченность функции $|f|$, а во-вторых, для любых двух точек $\xi \in [a, b]$ и $\eta \in [a, b]$ имеет место

$$\big||f(\xi)|-|f(\eta)|\big| \leqslant |f(\xi)-f(\eta)|,$$

откуда следует, что, каково бы ни было разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, обозначая через $\omega_i(f)$ и $\omega_i(|f|)$ соответственно колебания функций f и $|f|$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, получим

$$\omega_i(|f|) \leqslant \omega_i(f);$$

поэтому (см. п. 27.4)

$$0 \leqslant S_\tau(|f|)-s_\tau(|f|) = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(|f|)\,\Delta x_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\,\Delta x_i = S_\tau(f)-s_\tau(f).$$

Отсюда, если

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [S_\tau(f)-s_\tau(f)] = 0,$$

то и

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [S_\tau(|f|)-s_\tau(|f|)] = 0.$$

Это и означает, что из интегрируемости функции f следует интегрируемость функции $|f|$.

Пусть теперь $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$|\sigma_\tau(f)| = \left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |f(\xi_i)|\,\Delta x_i = \sigma_\tau(|f|).$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $\delta_\tau \to 0$ и замечая, что

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} |\sigma_\tau(f)| = \left|\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f)\right| = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|,$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(|f|) = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

мы и получим неравенство (28.27).

Если отказаться от ограничения $a < b$, т. е. допускать случаи $a = b$ и $a > b$, то неравенство, подобное неравенству (28.27) имеет вид

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|. \tag{28.28}$$

В самом деле, если $a < b$, то поскольку (см. свойство 7)

$$\left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

то это неравенство то же самое, что и неравенство (28.27). А если $a > b$, то, используя свойство (28.26) и неравенство (28.27), получим

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_b^a f(x)\,dx\right| \leqslant \int_b^a |f(x)|\,dx =$$

$$= \left|\int_b^a |f(x)|\,dx\right| = \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|.$$

Наконец, при $a = b$ неравенство (28.28) очевидно.

28.2. Теорема о среднем для определенного интеграла

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [a, b], \tag{28.29}$$

то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{28.30}$$

Доказательство. Из неравенства (28.29), согласно следствию из свойства 7 (п. 28.1), имеем

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx. \tag{28.31}$$

Из свойств 5 и 1 п. 28.1 следует, что

$$\int_a^b m\,dx = m\int_a^b dx = m(b-a),$$

$$\int_a^b M\,dx = M\int_a^b dx = M(b-a).$$

Подставляя эти выражения в неравенства (28.32), мы и получим неравенства (28.30).

Следствие. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что* (рис. 87)

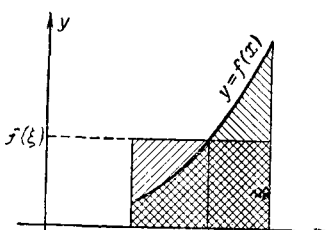


Рис. 87

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \qquad (28.32)$$

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть

$$m = \min_{a\leqslant x\leqslant b} f(x),$$

$$M = \max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x), \qquad (28.33)$$

тогда для этих m и M, очевидно, выполняются неравенства (28.29), и потому справедливы неравенства (28.30). Из них получаем

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Таким образом, число

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

находится между наибольшим и наименьшим значениями функции f. Согласно теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной функции, отсюда следует, что существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

т. е. существует точка ξ, для которой справедливо (28.32).

Тем же методом, который был применен при доказательстве теоремы 1 и ее следствия, может быть доказана и более общая теорема.

Теорема 1′. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *определены функции* f *и* g. *Если*

1) *функции* f *и* g *интегрируемы на отрезке* $[a, b]$;

2) $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in [a, b]$;

3) *функция* $g(x)$ *не меняет знака на отрезке* $[a, b]$, *т. е. либо неотрицательна, либо неположительна на этом отрезке, то существует такое число* μ, $m < \mu < M$, *что*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \mu \int_a^b g(x)\, dx. \tag{28.34}$$

Доказательство. Пусть функция g неотрицательна на отрезке $[a, b]$, тогда из условия 2 теоремы получим

$$mg(x) \leqslant f(x)\, g(x) \leqslant Mg(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{28.35}$$

если же функция g неположительна на $[a, b]$, то

$$mg(x) \geqslant f(x)\, g(x) \geqslant Mg(x), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

В обоих случаях во всех точках отрезка имеем неравенства одного знака. Пусть для определенности $g(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a, b]$, тогда (см. свойство 6 и следствие из свойства 7) из (28.35) следует, что

$$\int_a^b mg(x)\, dx \leqslant \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leqslant \int_a^b Mg(x)\, dx,$$

или

$$m \int_a^b g(x)\, dx \leqslant \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leqslant M \int_a^b g(x)\, dx.$$

Если $\int_a^b g(x)\, dx = 0$, то в силу полученного неравенства $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0$ и, следовательно, равенство (28.34) справедливо при любом μ. Если же $\int_a^b g(x)\, dx \neq 0$, тогда в силу предположения $g(x) \geqslant 0$ будем иметь

$$\int_a^b g(x)\, dx > 0;$$

поэтому

$$m \leqslant \frac{\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx} \leqslant M. \tag{28.36}$$

Полагая

$$\mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx},$$

мы и получим (28.34). Аналогично подобное неравенство доказывается и при $g \leqslant 0$ на отрезке $[a, b]$.

Следствие. *При дополнительном предположении непрерывности функции f на отрезке $[a, b]$ существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{28.37}$$

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то в силу равенства (28.34) получим, что $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$ и, следовательно, формула (28.37) справедлива при любом выборе точки $\xi \in [a, b]$.

Если же $\int\limits_a^b g(x)\,dx \neq 0$, тогда из формулы (28.36) и из теоремы о промежуточном значении функции, непрерывной на отрезке (см. п. 6.2), следует, что найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$f(\xi) = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx},$$

т. е. что на отрезке $[a, b]$ существует точка ξ, для которой имеет место формула (28.37) (см. рис. 87).

Теорема 1 получается из теоремы 1′, если положить $g(x) = 1$, $x \in [a, b]$.

Следствие из теоремы 1 обычно называется *интегральной теоремой о среднем*. Это название объясняется тем, что в нем утверждается существование некоторой точки на отрезке, «средней точки», обла-

дающей определенным свойством, связанным с интегралом от функции.

Следствие из теоремы 1′ обычно называется *обобщенной теоремой о среднем*. Формула (28.34), а значит, и формула (28.37), остается очевидным образом справедливой и при $a \geqslant b$.

Упражнение 1. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на интервале (a, b) существует точка ξ, для которой имеет место формула (28.37).

28.3. Интегрируемость кусочно-непрерывных функций

Обобщим теперь теорему 3 предыдущего параграфа об интегрируемости непрерывных функций на так называемые кусочно-непрерывные функции.

Определение 1. *Функция f называется кусочно-непрерывной на отрезке $[a, b]$, если существует такое разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ этого отрезка, что функция f непрерывна на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) и существуют конечные пределы*

$$f(x_{i-1}+0) = \lim_{x \to x_{i-1}+0} f(x)$$

и

$$f(x_i-0) = \lim_{x \to x_i-0} f(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Лемма. *Пусть функции f и φ определены на отрезке $[a, b]$ и $f(x) = \varphi(x)$ на интервале (a, b). Тогда если функция f интегрируема на $[a, b]$, то и функция φ интегрируема на $[a, b]$ и*

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Иначе говоря, изменение значения функции на концах отрезка не влияет ни на интегрируемость функции, ни на значение интеграла, если функция интегрируема. Аналогичное утверждение, конечно, справедливо при изменении значений функции в любом конечном числе точек.

Доказательство леммы. Функция f интегрируема и, следовательно, ограничена: $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in [a, b]$. Пусть $M_0 = \max\{M, \varphi(a), \varphi(b)\}$. Возьмем какое-либо разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и составим интегральные суммы Римана $\sigma_\tau(f)$ и $\sigma_\tau(\varphi)$, выбирая одни и те же точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Пусть, как всегда, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Поскольку

$$|f(\xi_1)\,\Delta x_1| \leqslant M_0\delta_\tau, \quad |f(\xi_k)\,\Delta x_k| \leqslant M_0\,\delta_\tau,$$

$$|\varphi(\xi_1)\,\Delta x_1| \leqslant M_0\delta_\tau \text{ и } |\varphi(\xi_k)\,\Delta x_k| \leqslant M_0\delta_\tau,$$

то

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} f(\xi_1)\,\Delta x_1 = \lim_{\delta_\tau \to 0} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \lim_{\delta_\tau \to 0} \varphi(\xi_1)\,\Delta x_1 = \lim_{\delta_\tau \to 0} \varphi(\xi_k)\,\Delta x_k = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(\varphi) = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \varphi(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=2}^{k-1} \varphi(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=2}^{k-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Следовательно, интеграл $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ существует и равен интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$.

Лемма доказана.

Упражнение 2. Доказать, что изменение значения функции в конечном числе точек не влияет ни на интегрируемость функции, ни на значение интеграла, если он существует.

Теорема 2. *Функция f, кусочно-непрерывная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция f кусочно-непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, указанное в определении 1. Пусть

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x_{i-1} < x_i < x_i, \\ f(x_{i-1}+0) & \text{при} \quad x = x_{i-1}, \\ f(x_i-0) & \text{при} \quad x = x_i. \end{cases}$$

Функция f на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ отличается от непрерывной функции f_i, быть может, только на концах этого отрезка, и, следовательно, по лемме функция f интегрируема на $[x_{i-1}, x_i]$ и

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Применяя свойство 3 интегралов, получим, что функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx. \tag{28.38}$$

Теорема доказана.

§ 29. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

29.1. Непрерывность интеграла по верхнему пределу

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, тогда она интегрируема и на любом отрезке $[a, x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$, т. е. для любого $x \in [a, b]$ имеет смысл интеграл $\int_a^x f(t)dt$. Положим

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{29.1}$$

Функция F определена на отрезке $[a, b]$ и называется *интегралом с переменным верхним пределом*. Изучим некоторые свойства этой функции.

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция* [29.1] *непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть $x \in [a, b]$, $x + \Delta x \in [a, b]$, тогда из формулы (29.1) следует, что

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt =$$

$$= F(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

поэтому (рис. 88)

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt. \tag{29.2}$$

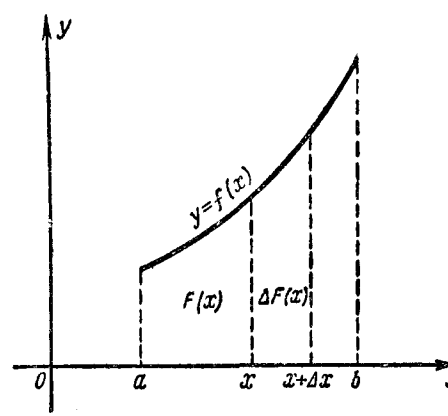


Рис. 88

Поскольку функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, она ограничена на этом отрезке, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in [a, b]$.

Применяя это неравенство для оценки выражения $|\Delta F|$, получим (см. п. 28.1)

$$|\Delta F| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dt\right| \leqslant \left|\int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt\right| \leqslant \left|\int_x^{x+\Delta x} M dt\right| \leqslant M|\Delta x|.$$

Из этой оценки следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0$ для любого $x \in [a, b]$, а это означает непрерывность функции F в каждой точке $x \in [a, b]$.

29.2. Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу. Существование первообразной у непрерывной функции

Теорема 2. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, тогда функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

дифференцируема в точке x_0 и

$$\frac{dF(x_0)}{dx} = f(x_0).$$

Доказательство. Покажем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0),$$

где $\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$, $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Для этого оценим модуль разности $\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)$:

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt}{\Delta x}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt\right|. \quad (29.3)$$

Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции f в точке x_0 существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что если $|x - x_0| < \delta$ и $x \in [a, b]$, то

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (29.4)$$

Выбирая теперь Δx так что $|\Delta x| < \delta$, из неравенств (29.3) и (29.4) получим

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt\right| = \varepsilon.$$

А это и означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0)$.

Теорема доказана.

Теперь мы можем решить вопрос о существовании первообразной функции для непрерывной функции.

Теорема 3. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке у функции f существует первообразная.*

Действительно, согласно теореме 2, такой первообразной является, например, функция

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\ a\leqslant x\leqslant b.$$

Таким образом, операция интегрирования с переменным верхним пределом, примененная к непрерывной функции, приводит к первообразной функции, т. е. является операцией, обратной для операции дифференцирования:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x),\ a\leqslant x\leqslant b. \tag{29.5}$$

Доказанные теоремы показывают, что операция интегрирования с переменным верхним пределом приводит «к улучшению» свойств функции: из интегрируемой функции получается непрерывная функция, а из непрерывной функции получается дифференцируемая.

Заметим, что операция дифференцирования в определенном смысле «ухудшает» свойства функции: например, производная непрерывной функции, если она существует, может быть уже разрывной функцией.

Из формулы дифференцирования по верхнему пределу (29.5) можно легко получить и формулу дифференцирования по нижнему пределу.

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, тогда на этом отрезке определена и функция

$$G(x)=\int_x^b f(t)\,dt,\ a\leqslant x\leqslant b,$$

причем из тождества

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^b f(t)\,dt$$

имеем

$$G(x)=\int_a^b f(t)\,dt-F(x). \tag{29.6}$$

Если функция f в точке $x \in [a, b]$ непрерывна, то, как было доказано, функция F в этой точке дифференцируема. Из формулы (29.6) следует, что в этом случае функция $G(x)$ в точке x также дифференцируема и

$$\frac{dG(x)}{dx} = -\frac{dF(x)}{dx}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x).$$

29.3. Формула Ньютона — Лейбница

Теорема 4. (основная теорема интегрального исчисления). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть функция Φ является какой-либо ее первообразной на этом отрезке, тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{29.7}$$

Эта формула называется *формулой Ньютона—Лейбница.*

Доказательство. Положим

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Поскольку F и Φ — две первообразные одной и той же функции f, то

$$F(x) = \Phi(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

т. е.

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

При $x = a$ отсюда следует, что $C = -\Phi(a)$.

Таким образом,

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Полагая здесь $x = b$, получим формулу (25.7).

Теорема доказана.

Для краткости записи часто употребляется обозначение

$$\Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a),$$

или

$$[\Phi(x)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Примеры. 1 Найти $\int_0^1 x^2 dx$.

Известно, что

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

поэтому

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Найти $\int_0^{\pi} \sin x dx$.

Имеем

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \,|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

§ 30. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

30.1. Замена переменного

Теорема 1. *Пусть*

1) *функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$,

2) *функция* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной* $\varphi'(t)$ *на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *причем* $a = \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(\beta) = b$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$,

тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \tag{30.1}$$

или, что то же,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\,d\varphi(t). \tag{30.2}$$

Эта формула называется *формулой замены переменного в определенном интеграле.*

Формула (30.2) показывает, что с символом dx под знаком определенного интеграла в случае, когда x является функцией $x(t)$, можно формально обращаться, как с дифференциалом, т. е. писать $dx = x'(t)dt$.

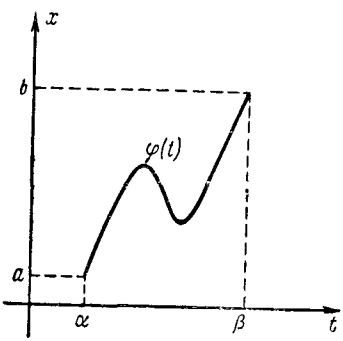


Рис. 89

Доказательство. Прежде всего заметим, что по условию функция f определена на области значений функции φ (рис. 89), поэтому имеет смысл сложная функция $f[\varphi(t)]$. В силу сделанных предположений подынтегральные функции в обеих частях формулы (30.1) непрерывны, поэтому оба интеграла в этой формуле существуют.

Пусть $\Phi(x)$ — какая-либо первообразная на отрезке $[a, b]$ для функции f, тогда имеет смысл сложная функция $\Phi[\varphi(t)]$, которая является первообразной для функции $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. По формуле Ньютона — Лейбница (см. п. 29.3)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \Phi[\varphi(\beta)] - \Phi[\varphi(\alpha)] = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Из этих равенств и следует формула (30.1).

Теорема доказана.

Пример. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx.$$

Положим $y = \sqrt{e^x - 1}$, тогда $x = \ln(1 + y^2)$, $dx = \dfrac{2y\,dy}{1+y^2}$, и, кроме того, если $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$, то $0 \leqslant y \leqslant 1$, поэтому

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx = 2\int_0^1 \frac{y^2\,dy}{1+y^2} = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) dy =$$

$$= 2[y - \operatorname{arctg} y]_0^1 = \frac{4-\pi}{2}.$$

30.2. Интегрирование по частям

Теорема 2. *Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a, b]$, то*

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{30.3}$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Доказательство. Имеем

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b (uv' + u'v)\,dx = \int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du. \tag{30.4}$$

Все эти интегралы существуют, ибо подынтегральные функции непрерывны. Но, согласно формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b (uv)'dx = [uv]_a^b. \tag{30.5}$$

Сравнивая (30.4) и (30.5), получим

$$\int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du = [uv]_a^b,$$

откуда и следует формула (30.3).

Теорема доказана.

Пример. Найти значение интеграла $\int_1^2 \ln x\,dx$.

Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_1^2 \ln x\,dx = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - 1.$$

Теорема 2 легко обобщается на случай так называемых кусочно-непрерывно дифференцируемых функций. Определим эти функции.

Определение 1. *Функция f называется кусочно-непрерывно дифференцируемой на отрезке, если ее производная кусочно-непрерывна на этом отрезке.*

Теорема 2′. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, тогда для них справедлива формула (30.3) интегрирования по частям.*

Доказательство. Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — такое разбиение отрезка $[a, b]$, что на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ этого разбиения функции

$$u_i(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } x_{i-1} < x < x_i, \\ u(x_{i-1}+0), & \text{если } x = x_{i-1}, \\ u(x_i-0), & \text{если } x = x_i, \end{cases}$$

и

$$v_i(x) = \begin{cases} v(x), & \text{если } x_{i-1} < x < x_i, \\ v(x_{i-1}+0), & \text{если } x = x_{i-1}, \\ v(x_i-0), & \text{если } x = x_i, \end{cases}$$

являются непрерывно дифференцируемыми функциями. Существование такого разбиения τ следует (почему?) из кусочно-непрерывной дифференцируемости функций $u(x)$ и $v(x)$ (см. определение 1 из п. 28.3 и определение в настоящем пункте).

Согласно формуле (28.38), имеем

$$\int_a^b u dv = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_i dv_i. \tag{30.6}$$

В силу же формулы (30.3) интегрирования по частям непрерывно дифференцируемых функций получаем

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} u_i dv_i = u_i v_i \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_i du_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Подставляя это выражение в (30.6) и снова используя формулу (28.38), имеем

$$\int_a^b u dv = \sum_{i=1}^{k} u_i v_i \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_i du_i = \sum_{i=1}^{k} u_i v_i \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_a^b v du. \tag{30.7}$$

Из непрерывности функций $u(x)$ и $v(x)$ вытекает, что

$$u(x_j - 0)\, v(x_j - 0) = u(x_j + 0)\, v(x_j + 0), \quad j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{k} u_i v_i \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = uv \Big|_a^b,$$

и, следовательно, из (30.7) получается формула (30.3) для рассматриваемого случая.

§ 31. МЕРА ПЛОСКИХ ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

31.1. Определение меры (площади) открытых множеств

Рассмотрим плоскость, на которой зафиксирована некоторая прямоугольная система координат. Обозначим через T_0 разбиение этой плоскости на замкнутые квадраты, получающиеся при проведении всевозможных прямых $x = p$, $y = q$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Такое разбиение назовем *квадрильяжем плоскости ранга* 0, а указанные квадраты — *квадратами нулевого ранга*. Разобьем каждый из квадратов нулевого ранга на 100 равных квадратов прямыми, параллельными осям координат и отстоящими друг от друга на расстояние $\frac{1}{10}$. Совокупность получившихся квадратов обозначим T_1. Продолжая этот процесс дальше, будем получать квадрильяжи плоскости T_m, $m = 1, 2, \ldots$, состоящие из квадратов, полученных в результате разбиения плоскости всевозможными прямыми вида

$$x = \frac{p}{10^m}, \quad y = \frac{q}{10^m},$$

$$p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

и, следовательно, со сторонами длины $\frac{1}{10^m}$. Квадраты, принадлежащие квадрильяжу T_m, будем называть *квадратами ранга* m, $m = 1, 2 \ldots$.

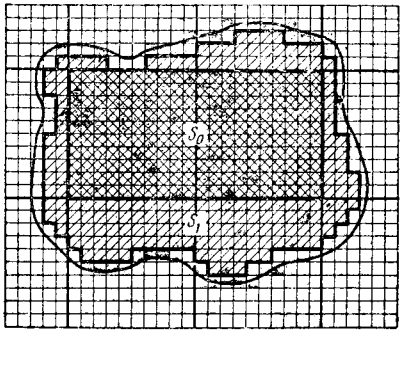


Рис. 90

Пусть G — плоское открытое множество. Обозначим через $S_0 = S_0(G)$ совокупность точек всех квадратов нулевого ранга, лежащих вместе с границей в множестве G, через $S_1 = S_1(G)$ — совокупность точек всех квадратов первого ранга, лежащих в G вместе с границей.

Вообще через $S_m = S_m(G)$ обозначим совокупность всех квадратов ранга m, лежащих вместе с границей в множестве G, $m = 0, 1, \ldots$. Очевидно, что (рис. 90)

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_m \subset \ldots \subset G. \tag{31.1}$$

Множества $S_0, S_1, \ldots, S_m, \ldots$ представляют собой «многоугольники», составленные из конечного или бесконечного числа квадра-

тов соответствующего ранга. В случае, если S_m состоит из конечного числа квадратов, обозначим площадь многоугольника S_m через пл. S_m, если же S_m состоит из бесконечного числа квадратов, положим пл. $S_m = +\infty$. Если какое-то S_{m_0} состоит из бесконечного числа квадратов, то и все следующие S_m, $m \geqslant m_0$, также состоят из бесконечного числа квадратов.

Из включений (31.1) в силу соглашения об использовании символа $+\infty$ (см. п. 1.2) следует, что всегда

$$\text{пл. } S_0 \leqslant \text{пл. } S_1 \leqslant \ldots \leqslant \text{пл. } S_m \leqslant \ldots . \tag{31.2}$$

Возможны два случая.

1. Все пл. S_m конечны, тогда (31.2) является монотонно возрастающей последовательностью, и поэтому она имеет либо конечный предел, либо стремится к $+\infty$. Этот предел в этом случае и называется *площадью, или мерой, открытого множества* G и обозначается mes G*).

2. Если же существует такой номер m_0, что пл. $S_{m_0} = +\infty$, то пл. $S_m = +\infty$ для всех номеров $m \geqslant m_0$. В этом случае положим

$$\text{mes } G = +\infty.$$

Для удобства будем считать по определению, что последовательность элементов a_n, $n = 1, 2, \ldots$, таких, что начиная с некоторого номера, они все равны $+\infty$, имеет своим пределом $+\infty$, и будем писать $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Используя это соглашение, оба рассмотренных выше случая можно объединить в один. Сформулируем окончательное определение.

Определение 1. *Предел* $\lim\limits_{m\to\infty}$ пл. $S_m(G)$ (*конечный или бесконечный*) *называется площадью, или мерой, открытого множества* G *и обозначается* mes G:

$$\text{mes } G = \lim_{m\to\infty} \text{пл. } S_m(G). \tag{31.3}$$

Такое определение меры открытого множества естественно, так как последовательность множеств S_m, $m = 0, 1, \ldots$, исчерпывает открытое множество, т. е.

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} S_m = G,$$

иначе говоря, для любой точки $P \in G$ существует такой многоугольник S_{m_0}, что

$$P \in S_{m_0}.$$

*) От французского слова mesur — мера, размер.

Действительно, какова бы ни была точка $P \in G$, в силу открытости множества G существует сферическая окрестность $O(P; \varepsilon) \subset G$, $\varepsilon > 0$. Заметив теперь, что диаметр квадрата ранга m равен $\frac{\sqrt{2}}{10^m}$, выберем m_0 так, чтобы

$$\frac{1}{10^{m_0}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}. \tag{31.4}$$

Для всякой точки плоскости существует по крайней мере один квадрат каждого ранга, содержащий эту точку. Пусть Q_{m_0} — квадрат ранга m_0, содержащий точку P. В силу неравенства (31.4) $Q_{m_0} \subset O(P; \varepsilon)$ и, значит, $Q_{m_0} \subset G$, но $P \in Q_{m_0}$, поэтому $P \in S_{m_0}$ (рис. 91).

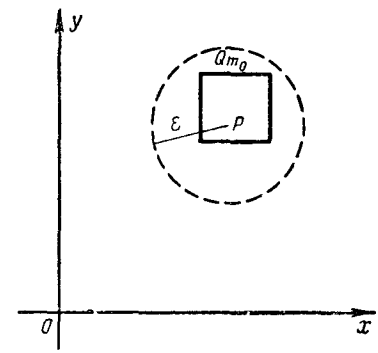


Рис. 91

Утверждение доказано.

Из курса элементарной математики известно, что в случае, если открытое множество S является многоугольником, то его площадь, являющаяся по определению и площадью замкнутого многоугольника $\overline{S}$, совпадает с определенной нами мерой:

$$\text{пл. } \overline{S} = \text{пл. } S = \text{mes } S^{*)}.$$

Если открытое множество G ограничено, то всегда

$$\text{mes } G < +\infty.$$

В самом деле, если G ограничено, то существует замкнутый квадрат Q, содержащий множество G: $G \subset Q$, и являющийся объединением квадратов нулевого ранга, тогда $S_m(G) \subset Q$ при любом $m = 0, 1, \ldots,$ и, значит, пл. $S_m(G) \leqslant$ пл. Q.

Таким образом, последовательность (31.2) ограничена сверху, и, значит, предел (31.3) конечен.

Задача 16. Доказать, что мера открытого множества не зависит от выбора прямоугольной системы координат на плоскости.

31.2. Монотонность меры открытых множеств

Теорема 1. *Если G и Γ плоские открытые множества и*

$$G \subset \Gamma, \tag{31.5}$$

то

$$\text{mes } G \leqslant \text{mes } \Gamma. \tag{31.6}$$

*) См. также п. 44.1 (квадрируемые множества).

Доказательство. Обозначим, как и выше, через $S_m(G)$ и $S_m(\Gamma)$ совокупности квадратов ранга m, лежащих вместе со своей границей соответственно в множествах G и Γ, $m = 1, 2, \ldots$. Тогда из условия (31.5) следует, что

$$S_m(G) \subset S_m(\Gamma),$$

откуда

$$\text{пл. } S_m(G) \leqslant \text{пл. } S_m(\Gamma). \tag{31.7}$$

В случае, когда оба множества $S_m(G)$ и $S_m(\Gamma)$ состоят из конечного числа квадратов, это следует из того, что площадь объемлющего многоугольника не превышает площади объемлемого, а в случае, когда хоть одно из множеств $S_m(G)$ и $S_m(\Gamma)$ содержит бесконечно много квадратов, — из соглашения об употреблении символа $+\infty$.

Переходя к пределу в равенстве (31.7) при $m \to \infty$, в силу (31.3) получим неравенство (31.6).

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть G и G_k, $k = 1, 2, \ldots$, — плоские открытые множества:*

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset \ldots \text{ и } G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k,$$

тогда

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G. \tag{31.8}$$

Заметим, что если при некотором k_0 имеет место $\operatorname{mes} G_{k_0} = +\infty$, то, согласно теореме 1, и для всех $k \geqslant k_0$ также $\operatorname{mes} G_k = +\infty$; в этом случае равенство (31.8) означает, что $\operatorname{mes} G = +\infty$ (подобное соглашение было сделано перед равенством (31.3). Прежде чем доказывать теорему, докажем несколько геометрических лемм. Введем следующее определение.

Определение 2. *Последовательность квадратов $\{Q_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, называется последовательностью вложенных квадратов, если*

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_k \supset Q_{k+1} \supset \ldots.$$

Лемма 1. *Для всякой последовательности замкнутых вложенных квадратов $\{Q_k\}$, длина ребер которых стремится к нулю при $k \to \infty$, существует, и притом единственная, точка плоскости, принадлежащая всем квадратам рассматриваемой системы.*

Доказательство. Пусть квадраты

$$Q_k = \{(x, y) : a_k \leqslant x \leqslant a_k + d_k,\ b_k \leqslant y \leqslant b_k + d_k\}$$

образуют последовательность вложенных квадратов и пусть

$$\lim_{k \to \infty} d_k = 0.$$

Тогда системы отрезков $[a_k,\ a_k+d_k]$ и $[b_k,\ b_k+d_k]$, $k=1, 2, \ldots$, являются вложенными системами отрезков, длины d_k которых стремятся к нулю при $k\to\infty$. Поэтому существуют, и притом единственные, числа ξ и η, такие, что

$$\xi\in[a_k,\ a_k+d_k],$$
$$\eta\in[b_k,\ b_k+d_k],$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots.$$

Отсюда следует, что $(\xi,\ \eta)\in Q_k$, $k=1, 2, \ldots$, и что такая точка единственна.

Лемма доказана.

Определение 3. *Пусть E — плоское множество. Система*

$$\Omega=\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \tag{31.9}$$

открытых плоских множеств ($\mathfrak{A}=\{\alpha\}$ — некоторая совокупность индексов) называется открытым покрытием множества E, если

$$E\subset\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}}G_\alpha.$$

Иначе говоря, система (31.9) называется открытым покрытием множества E, если каждая точка этого множества принадлежит хотя бы одному множеству G_α из системы Ω.

Определение 4. *Открытое покрытие (31.9) множества E, состоящее из конечного числа открытых множеств G_α, называется конечным открытым покрытием.*

Лемма 2 (Борель*). *Из всякого открытого покрытия плоского ограниченного замкнутого множества можно выделить конечное покрытие этого множества.*

Доказательство. Пусть (31.9) образует открытое покрытие плоского ограниченного замкнутого множества E. Будем доказывать лемму от противного. Пусть из покрытия (31.9) нельзя выделить конечного покрытия множества E.

Поскольку множество E ограничено, то существует замкнутый квадрат Q, содержащий множество E. Разобьем квадрат Q на четыре равных замкнутых квадрата Q_i, $i=1, 2, 3, 4$. Система (31.9) образует открытое покрытие каждого из четырех множеств $E\cap Q_i$, $i=1, 2, 3, 4$. Среди этих множеств существует такое непустое множество $E\cap Q_{i_1}$ ($i_1=1, 2, 3, 4$), что из покрытия (31.9) нельзя выделить конечное покрытие указанного множества (в противном случае из системы (31.9) можно было бы выделить конечное покры-

*) Э. Борель (1871—1956) — французский математик.

тие и всего множества E, что противоречило бы сделанному предположению). Разобьем квадрат Q_{i_1} снова на четыре равных замкнутых квадрата $Q_{i_1 i}$, $i = 1, 2, 3, 4$ и т. д. В результате получим последовательность вложенных замкнутых квадратов

$$Q_{i_1} \supset Q_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset Q_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset \ldots, \tag{31.10}$$

длины ребер которых стремятся к нулю при $k \to \infty$ и каждый из которых обладает тем свойством, что из системы Ω нельзя выделить конечное покрытие множества $E \cap Q_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ (i_k принимает одно из значений 1, 2, 3 или 4).

Согласно лемме 1, существует и притом единственная точка (ξ, η), принадлежащая всем квадратам системы (31.10).

Поскольку ребра квадратов этой системы стремятся к нулю и каждый из квадратов этой системы имеет непустое пересечение с множеством E, то в любой окрестности точки (ξ, η) имеются точки множества E. Действительно, обозначим через d_k, $k = 1, 2, \ldots$, длину ребра квадрата $Q_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Пусть $\varepsilon > 0$; выберем k_0 так, чтобы

$$d_{k_0} \sqrt{2} < \varepsilon. \tag{31.11}$$

Это возможно в силу условия $\lim\limits_{k \to \infty} d_k = 0$. Теперь, если

$$(x, y) \in Q_{i_1 i_2 \ldots i_{k_0}},$$

то

$$\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} < d_{k_0} \sqrt{2} < \varepsilon.$$

Поэтому точка (x, y) лежит в ε-окрестности точки (ξ, η) и, следовательно, весь квадрат $Q_{i_1 i_2 \ldots i_{k_0}}$, в том числе и его точки, принадлежащие множеству E, содержатся в рассматриваемой ε-окрестности точки (ξ, η). Таким образом, точка (ξ, η) является точкой прикосновения множества E. Но множество E замкнуто, поэтому $(\xi, \eta) \in E$.

Поскольку система (31.9) является покрытием множества E, то существует такой индекс $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, что $(\xi, \eta) \in G_{\alpha_0}$.

Множество G_{α_0} открыто, поэтому найдется такой номер k_0, что

$$Q_{i_1 i_2 \ldots i_{k_0}} \subset G_{\alpha_0}. \tag{31.12}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно взять какую-либо ε-окрестность точки (ξ, η), содержащуюся в G_{α_0}, и выбрать k_0, удовлетворяющее неравенству (31.11).

Из условия (31.12) следует, что

$$E \cap Q_{i_1 i_2 \ldots i_{k_0}} \subset G_{\alpha_0},$$

и, следовательно, из системы (31.9) можно выделить конечное покрытие множества $E \cap Q_{i_1 i_2 \ldots i_{k_0}}$, а именно покрытие, состоящее

только из одного множества G_{α_0}. Это противоречит выбору множеств $Q_{i_1 i_2 \ldots i_k}$.

Лемма доказана.

Упражнения. 1. Доказать аналог леммы 2 для ограниченного замкнутого множества n-мерного евклидова пространства E^n, $n > 2$.

2. Доказать, что, каково бы ни было конечное открытое покрытие $\Omega = \{G_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, ограниченного замкнутого множества $E \subset E^n$, существует такое число $l > 0$, что, каково бы ни было множество $D \subset E$ диаметра меньшего чем l, существует множество $G_{k_0} \in \Omega$, такое, что $D \subset G_{k_0}$.

3. Доказать теорему Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на ограниченном замкнутом множестве, с помощью леммы Бореля.

Лемма 3. *Пусть G_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — открытые плоские множества, пусть*

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset G_{k+1} \subset \ldots \tag{31.13}$$

и пусть

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k. \tag{31.14}$$

Тогда если E — ограниченное замкнутое множество и

$$E \subset G, \tag{31.15}$$

то существует номер k_0, такой, что

$$E \subset G_{k_0}. \tag{31.16}$$

Доказательство. Из (31.14) и (31.15) следует, что система $\{G_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, образует открытое покрытие множества E. Поэтому, согласно лемме 2, существует конечное покрытие $\{G_{k_1}, \ldots, G_{k_m}\}$ множества E:

$$E \subset \bigcup_{l=1}^{m} G_{k_l}.$$

Обозначим через k_0 наибольший из номеров $k_1, \ldots, k_m$. В силу условия (31.13) имеем

$$\bigcup_{l=1}^{m} G_{k_l} = G_{k_0}.$$

Следовательно, $E \subset G_{k_0}$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Предварительно заметим, что из условия $G_1 \subset G_2 \subset \ldots G_k \subset \ldots$ следует (см. теорему 1), что

$$\operatorname{mes} G_1 \leqslant \operatorname{mes} G_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{mes} G_k \leqslant \ldots, \tag{31.17}$$

поэтому последовательность $\operatorname{mes} G_k$, $k = 1, 2, \ldots$, всегда имеет предел, конечный или равный $+\infty$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть все множества $S_m(G)$, $m = 0, 1, \ldots$, состоят из конечного числа квадратов. В этом случае каждое из множеств $S_m(G)$ является ограниченным замкнутым множеством и, согласно лемме, для всякого номера m существует такой номер k_m, что

$$S_m(G) \subset G_{k_m}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{31.18}$$

При этом выберем k_m так, что $k_{m'} > k_m$ при $m' > m$. Это всегда можно сделать, например, следующим образом. Если выбраны номера $k_1 < k_2 < \ldots < k_{m-1}$ и для множества $S_m(G)$, согласно лемме, найдено множество G_{k_0}, такое, что

$$S_m(G) \subset G_{k_0}, \tag{31.19}$$

то обозначим через k_m какое-либо натуральное число, такое, что $k_m > k_{m-1}$ и $k_m \geqslant k_0$, тогда $G_{k_0} \subset G_{k_m}$, и, значит, $S_m(G) \subset G_{k_m}$. Таким образом, последовательность k_m, $m = 1, 2, \ldots$, является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел.

Обозначим теперь через $\widetilde{S}_m(G)$ совокупность всех внутренних точек множества $S_m(G)$. Очевидно, $\widetilde{S}_m(G)$ — открытое множество и

$$\widetilde{S}_m(G) \subset S_m(G) \subset G_{k_m},$$

поэтому в силу теоремы 1

$$\operatorname{mes} \widetilde{S}(G) \leqslant \operatorname{mes} G_{k_m}. \tag{31.20}$$

Поскольку $G_k \subset G$, $k = 1, 2, \ldots$, то в силу той же теоремы 1

$$\operatorname{mes} G_{k_m} \leqslant \operatorname{mes} G. \tag{31.21}$$

Объединяя неравенства (31.20) и (31.21), получим

$$\text{пл. } \widetilde{S}_m(G) = \text{пл. } S_m(G) \leqslant \operatorname{mes} G_{k_m} \leqslant \operatorname{mes} G.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, в силу (31.3) имеем

$$\lim_{m \to \infty} \operatorname{mes} G_{k_m} = \operatorname{mes} G.$$

Последовательность $\{\operatorname{mes} G_k\}$, как отмечалось выше, имеет конечный или бесконечный предел, поэтому он совпадает с пределом любой ее подпоследовательности, т. е.

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G.$$

Теорема в первом случае доказана.

2. Пусть существует множество $S_m(G)$, содержащее бесконечно много квадратов, тогда пл. $S_m(G) = +\infty$, а потому и $\operatorname{mes} G = +\infty$. Покажем, что в этом случае и

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mes} G_k = +\infty. \tag{31.22}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$ и пусть $S_m(G)$ состоит из бесконечного множества квадратов. Площадь каждого квадрата ранга m равна $\frac{1}{10^{2m}}$. Зафиксируем натуральное число n так, чтобы

$$\frac{n}{10^{2m}} > \varepsilon, \tag{31.23}$$

и выберем из $S_m(G)$ n каких-либо квадратов. Обозначим множество их точек через D. Множество D является многоугольником (оно является объединением конечного числа квадратов) и, следовательно, ограниченным замкнутым множеством, причем

$$\text{пл. } D = \frac{n}{10^{2m}} \tag{31.24}$$

В силу леммы существует такой номер k, что

$$D \subset G_k. \tag{31.25}$$

Обозначим через $\tilde{D}$ множество внутренних точек многоугольника D. Согласно теореме 1 и формулам (31.23), (31.24), получаем

$$\operatorname{mes} G_k \geqslant \text{пл. } \tilde{D} = \text{пл. } D > \varepsilon.$$

В силу же (31.17) для всех $k' \geqslant k$

$$\operatorname{mes} G_{k'} > \varepsilon.$$

Это и означает выполнение условия (31.22).

Теорема доказана.

Примером неограниченной плоской области, имеющей бесконечную меру, является полоса

$$G = \{(x,\ y):\ 0 < y < 1\}.$$

Она содержит в себе бесконечное множество, например, квадратов первого ранга и потому

$$\operatorname{mes} G = +\infty.$$

Для того чтобы построить пример неограниченной области с конечной площадью, поступим следующим образом.

Пусть Q — единичный квадрат:

$$Q=\{(x,\ y):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

Положим

$$G_1=\left\{(x,\ y):\ 0<x<1,\ 0<y<\frac{1}{2}\right\},$$

$$G_2=G_1\cup\left\{(x,\ y):\ 1\leqslant x<2,\ 0<y<\frac{1}{4}\right\}.$$

Вообще

$$G_{k+1}=G_k\cup\left\{(x,\ y):k\leqslant x<k+1,\ 0<y<\frac{1}{2^{k+1}}\right\},\quad k=1,\ 2,\ \ldots.$$

Каждое множество G_k открыто (почему?).

Наглядно образование множеств G_k можно представить себе следующим образом: G_1 — половина квадрата Q; для получения G_2 берется половина оставшейся половины квадрата Q и прикладывается соответствующим образом к G_1, получается G_2; далее, половина оставшейся части квадрата Q прикладывается уже к G_2 (рис. 92), и т. д.

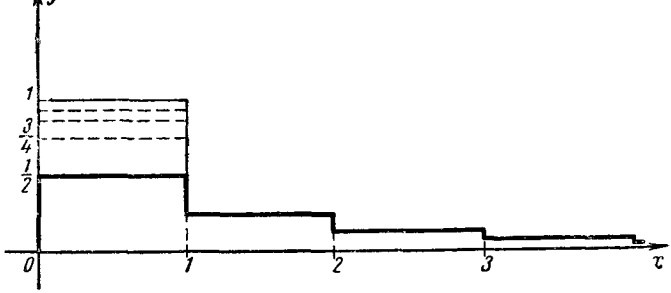


Рис. 92

Очевидно, имеем

$$G_1\subset G_2\subset\ldots\subset G_k\subset\ldots$$

и

$$\text{пл. } G_k=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^k}.$$

Положим

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Множество G открыто и не ограничено, согласно теореме 2:

$$\operatorname{mes} G = \lim_{k\to\infty} \operatorname{mes} G_k = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = 1.$$

Мера (объем) открытых множеств в трехмерном и вообще n-мерном пространстве ($n = 1, 2, 3, 4,\ldots$) определяется с помощью аналогичной конструкции, следует только, естественно, исходить не из разбиений плоскости на квадраты (квадрильяжей), а из разбиений пространства на соответствующие n-мерные кубы (кубильяжей). На n-мерный случай переносятся и теоремы, доказанные в этом параграфе. Мы вернемся еще к изучению меры множеств в дальнейших главах, см. п. 44.1. В этом пункте будут излагаться дальнейшие свойства меры (например, ее поведение при объединении множеств — так называемая аддитивность меры); его можно читать непосредственно вслед за настоящим параграфом.

Упражнения. 4. Доказать, что площадь прямоугольника равна произведению его сторон.

5. Пусть G — прямой круговой цилиндр, основанием которого является круг K, а высота которого имеет длину h. Доказать, что

$$\operatorname{mes} G = h \operatorname{mes} K,$$

где $\operatorname{mes} G$ есть мера G в пространстве, а $\operatorname{mes} K$ — мера на плоскости.

§ 32. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

32.1. Вычисление площадей

В этом пункте будут выведены формулы для вычисления площадей некоторых плоских областей. При этом считаются известными из элементарной математики свойства площади простейших плоских фигур (многоугольников, секторов), например, что при объединении таких элементарных фигур, не имеющих общих внутренних точек, их площади складываются. Впрочем, независимо от этого это утверждение будет доказано в п. 44.1.

Теорема 1. *Пусть функция f определена, неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда площадь S множества*

$$G = \{(x, y) : a < x < b,\ 0 < y < f(x)\},$$

выражается формулой

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{32.1}$$

Множество G является открытым ограниченным множеством (почему?). Его граница содержится в объединении графика функции $f(x)$, отрезка $[a, b]$ оси Ox и отрезков $[0, f(a)]$ и $[0, f(b)]$ соответственно прямых $x=a$ и $x=b$. Оно обычно называется *криволинейной трапецией* (рис. 93), порожденной графиком функции f.

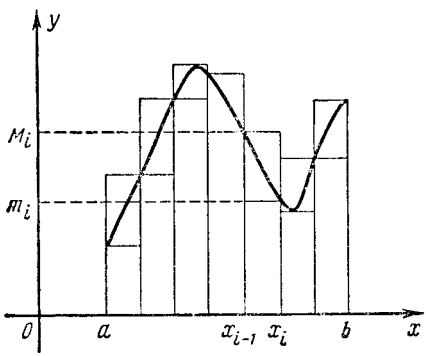


Рис. 93

Доказательство. Пусть $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, а S_τ и s_τ — соответственно верхняя и нижняя интегральные суммы Дарбу функции f, тогда, как мы знаем (см. п. 27.4),

$$S_\tau \geqslant \int_a^b f(x)\,dx \geqslant s_\tau. \tag{32.2}$$

Обозначим через G_τ и g_τ замкнутые многоугольники, составленные из всех прямоугольников вида

$$G_{\tau,\,i}=\{(x,\ y): x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\ 0\leqslant y\leqslant M_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ k\},$$

$$g_{\tau,\,i}=\{(x,\ y): x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\ 0\leqslant y\leqslant m_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ k\},$$

т. е.

$$G_\tau=\bigcup_{i=1}^{k} G_{\tau,\,i},\quad g_\tau=\bigcup_{i=1}^{k} g_{\tau,\,i}.$$

Если обозначить через $\widetilde{G}_\tau$ и $\widetilde{g}_\tau$ множество внутренних точек многоугольников G_τ и g_τ, то

$$\widetilde{g}_\tau\subset G\subset\widetilde{G}_\tau. \tag{32.3}$$

При этом очевидно, что

$$\text{пл. } \widetilde{g}_\tau=s_\tau,\ \text{пл. } \widetilde{G}_\tau=S_\tau.$$

Поэтому из (32.3) в силу монотонности меры следует, что

$$s_\tau\leqslant \operatorname{mes} G\leqslant S_\tau. \tag{32.4}$$

Вычитая неравенство (32.4) из неравенства (32.2), получим

$$s_\tau - S_\tau \leqslant \int_a^b f(x)\,dx - \operatorname{mes} G \leqslant S_\tau - s_\tau. \tag{32.5}$$

Поскольку (см. п. 27.4)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0,$$

то, переходя к пределу в неравенстве (32.5), получим

$$\operatorname{mes} G = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, формула (32.1) доказана.

Как известно (см. п. 27.4),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \int_a^b f(x)\,dx,$$

поэтому в силу формулы (32.1)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \operatorname{mes} G.$$

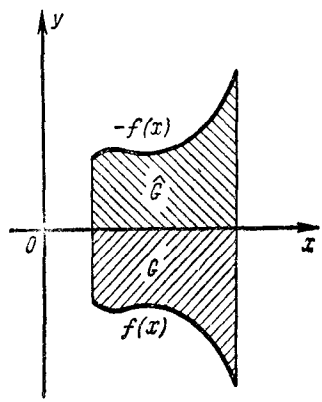


Рис. 94

Таким образом, геометрически интегральные суммы Римана и Дарбу равны приближенному значению площади рассматриваемой криволинейной трапеции, притом, с тем большей точностью, чем больше мелкость разбиения τ, а предел интегральных сумм равен истинному значению указанной площади.

Пусть теперь функция f непрерывна и неположительна на отрезке $[a, b]$. Положим в этом случае

$$G = \{(x, y) : a < x < b,\ f(x) < y < 0\}.$$

Пусть $\hat{G}$ — множество, симметричное с множеством G относительно оси Ox (рис. 94), тогда

$$\operatorname{mes} \hat{G} = \operatorname{mes} G. \tag{32.6}$$

В рассматриваемом случае функция $-f$ неотрицательна на отрезке $[a, b]$, поэтому

$$\operatorname{mes} \hat{G} = \int_a^b |-f(x)|\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{32.7}$$

Сравнивая (32.6) и (32.7), получим

$$\operatorname{mes} G = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

т. е. здесь значение интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ дает значение площади криволинейной трапеции с точностью до знака. Если же функция f меняет знак на отрезке $[a, b]$ в конечном числе точек, то значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ дает алгебраическую сумму площадей соответствующих криволинейных трапеций, ограниченных частями графика функции f, отрезками оси Ox и, быть может, отрезками, параллельными оси Oy (рис. 95).

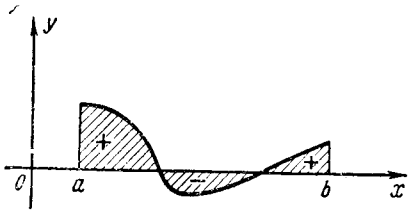


Рис. 95

Как видно, одной из задач, естественным образом приводящих к понятию определенного интеграла, является задача вычисления площадей. Развитый аппарат интегрального исчисления дает общий и единый метод вычисления площадей разнообразных плоских фигур.

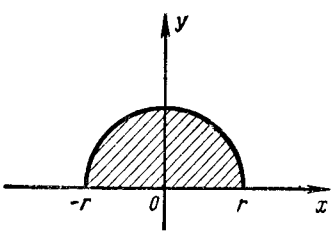


Рис. 96

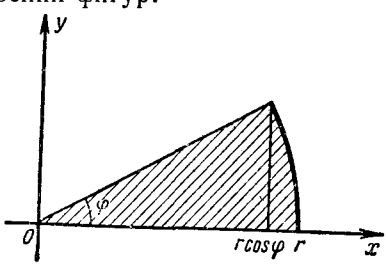


Рис. 97

Примеры. 1. Найдем площадь S круга радиуса r.

Поместим начало координат в центр указанного круга, тогда уравнение полуокружности, лежащей в верхней полуплоскости, имеет вид $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ (рис. 96). Поэтому площадь полукруга радиуса r вычисляется, согласно теореме 1, по формуле (32.1):

$$S = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = r^2 \int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt = r^2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2}\,dt = \frac{\pi r^2}{2}$$

(при вычислении интеграла сделана замена переменного $x = r\cos t$), откуда искомая площадь круга равна πr^2.

Подобным же образом находится и площадь S_φ сектора круга радиуса r, соответствующего углу φ. Считая для простоты, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, имеем (рис. 97)

$$S_\varphi = \int_0^{r\cos\varphi} x \operatorname{tg}\varphi\, dx + \int_{r\cos\varphi}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{x^2 \operatorname{tg}\varphi}{2}\Big|_0^{r\cos\varphi} +$$

$$+ r^2 \int_0^{\varphi} \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt = \frac{r^2 \sin\varphi\cos\varphi}{2} + \frac{r^2\varphi}{2} - \frac{r^2 \sin 2\varphi}{4} = \frac{r^2\varphi}{2}.$$

Упражнение 1. Доказать с помощью определенного интеграла, но не используя инвариантность площади относительно систем координат, что площадь любого круга радиуса r равна πr^2.

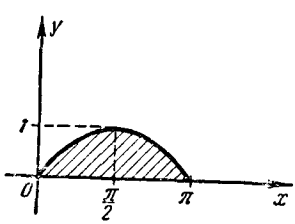


Рис. 98

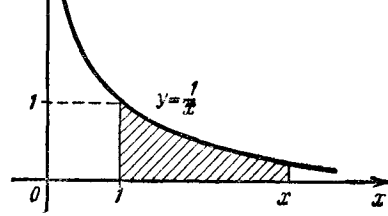


Рис. 99

2. Найдем площадь S, ограниченную осью Ox и одной аркой синусоиды (рис. 98):

$$S = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 2.$$

3. Найдем площадь S, ограниченную гиперболой $y = \frac{1}{x}$, осью Ox, отрезком прямой $x = 1$ и отрезком прямой, проходящей через точку оси Ox с абсциссой, равной x и параллельной оси ординат (рис. 99):

$$S = \int_1^{x} \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^{x} = \ln x.$$

Найдем теперь формулу для площади сектора кривой, заданной представлением в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi)$.

Пусть $\rho = \rho(\varphi)$ — неотрицательная, непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция, $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2\pi$. Пусть G — открытое множество, ограниченное кривой AB, для которой $\rho = \rho(\varphi)$ является представлением в полярных координатах, и, быть может, отрезками OA и OB лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (рис. 100): $G = \{(\rho, \varphi) : \alpha < \varphi < \beta,\ 0 < \rho < \rho(\varphi)\}$.

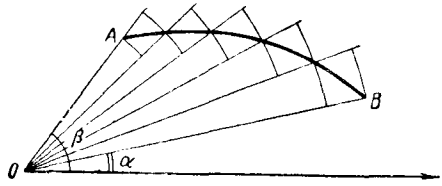


Рис. 100

Пусть $\tau = \{\varphi_i\}_{i=0}^{i=k}$ — некоторое разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ и пусть

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1},$$

$$m_i = \inf_{\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i} \rho(\varphi), \quad M_i = \sup_{\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i} \rho(\varphi),$$

$$g_{i,\tau} = \{(\rho, \varphi) : \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i,\ \ 0 \leqslant \rho \leqslant m_i\},$$

$$G_{i,\tau} = \{(\rho, \varphi) : \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i,\ \ 0 \leqslant \rho \leqslant M_i\}.$$

Впишем и опишем в множество G ступенчатые фигуры g_τ и G_τ, составленные из круговых секторов $g_{i,\tau}$ и $G_{i,\tau}$, $i = 1, 2, \ldots, k$:

$$g_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} g_{i,\tau}, \quad G_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} G_{i,\tau}.$$

Обозначим через $\tilde{g}_\tau$ и $\tilde{G}_\tau$ множества внутренних точек множеств g_τ и G_τ. Очевидно, $\tilde{g}_\tau$ и $\tilde{G}_\tau$ — открытые множества и

$$\tilde{g}_\tau \subset G \subset \tilde{G}_\tau,$$

поэтому, согласно определению площади,

$$\text{пл. } g_\tau \leqslant \operatorname{mes} G \leqslant \text{пл. } G_\tau. \tag{32.8}$$

Площади круговых секторов $g_{i,\tau}$ и $G_{i,\tau}$ равны соответственно $\frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i$ и $\frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i$; из элементарной математики известно, что при сложении фигур их площади складываются (см. об этом также в п. 44.1), отсюда

$$\text{пл. } g_\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} m_i^2 \Delta\varphi_i,$$

$$\text{пл. } G_\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Из этих равенств видно, что пл. g_τ и пл. G_τ являются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу для функции

$\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$:

$$s_\tau = \text{пл. } g_\tau, \quad S_\tau = \text{пл. } G_\tau,$$

откуда

$$s_\tau \leqslant \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi \leqslant S_\tau. \tag{32.9}$$

Вычитая это неравенство из неравенства (32.8), переписанного в виде

$$S_\tau \geqslant \operatorname{mes} G \geqslant s_\tau,$$

получим

$$s_\tau - S_\tau \leqslant \operatorname{mes} G - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi \leqslant S_\tau - s_\tau,$$

отсюда в пределе при $\delta_\tau \to 0$ имеем

$$\operatorname{mes} G = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

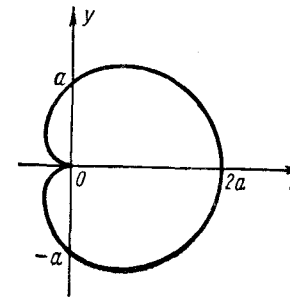


Рис. 101

Это и есть искомая формула.

В качестве примера найдем площадь S фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (см. п. 17.5), которая изображена на рис. 101. По формуле (32.8) получим

$$S = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi + a^2\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi +$$

$$+ \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

32.2. Объем тел вращения

В конце п. 31.2 отмечалось, что понятие объема в пространстве вводится аналогично понятию площади на плоскости. Выведем формулу для вычисления объемов тел вращения.

Пусть функция f непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Сохраним обозначения, введенные в теореме 1 п. 32.1 и ее доказательстве. Пусть Q — тело, образованное вращением криволинейной трапеции G вокруг оси Ox. Покажем, что

$$\operatorname{mes} Q = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{32.10}$$

Пусть τ — какое-либо разбиение отрезка $[a, b]$. Обозначим через q_τ и Q_τ тела вращения, образованные вращением «ступенчатых фигур» $\widetilde{g}_\tau$ и $\widetilde{G}_\tau$ вокруг оси Ox. Из включения (32.3) следует, что

$$q_\tau \subset Q \subset Q_\tau,$$

а потому и

$$\operatorname{mes} q_\tau \leqslant \operatorname{mes} Q \leqslant \operatorname{mes} Q_\tau. \tag{32.11}$$

Объемы v_τ и V_τ множеств q_τ и Q_τ равны суммам объемов цилиндров, образованных вращением прямоугольников $g_{\tau,i}$ и $G_{\tau,i}$ (рис. 102):

$$v_\tau = \operatorname{mes} q_\tau = \sum_{i=1}^{k} \pi m_i^2 \Delta x_i,$$

$$V_\tau = \operatorname{mes} Q_\tau = \sum_{i=1}^{k} \pi M_i^2 \Delta x_i.$$

Из этих равенств видно, что v_τ и V_τ являются нижними и верхними суммами Дарбу функции $\pi f^2(x)$, поэтому

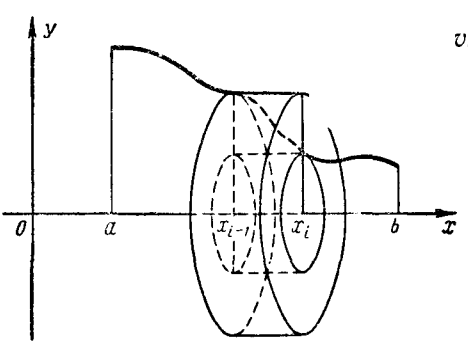


Рис. 102

$$v_\tau \leqslant \pi \int_a^b f^2(x)\,dx \leqslant V_\tau, \tag{32.12}$$

и так как функция f^2 интегрируема, то

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [V_\tau - v_\tau] = 0. \tag{32.13}$$

Из неравенств (32.11) и (32.12) следует, что

$$v_\tau - V_\tau \leqslant \pi \int_a^b f^2(x)\,dx - \operatorname{mes} Q \leqslant V_\tau - v_\tau,$$

откуда в силу (32.13) и вытекает формула (32.10).

Примеры. 1. Найдем объем V шара радиуса r.

Рассматривая этот шар как результат вращения полуокружности $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$ вокруг оси Ox (см. рис. 96), по формуле (32.10) получим

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi r^2 x \Big|_{-r}^{r} - \frac{\pi x^3}{3}\Big|_{-r}^{r} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2. Найдем объем V прямого кругового конуса с высотой, равной h, и радиусом основания r.

Рассматривая указанный конус как тело, полученное вращением треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(h, 0)$ и (h, r) вокруг оси Ox (рис. 103), получим, согласно формуле (32.10),

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2\,dx = \frac{\pi r^2 x^3}{3h^2}\Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

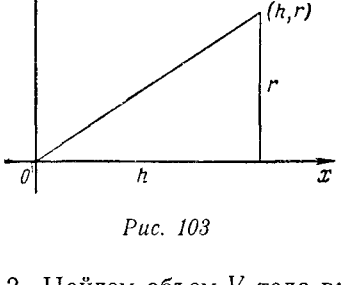


Рис. 103

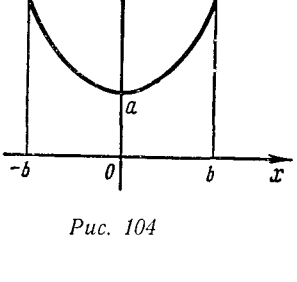


Рис. 104

3. Найдем объем V тела вращения, полученного вращением вокруг оси Ox графика функции $y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $-b \leqslant x \leqslant b$. Этот график называется *цепной линией* (рис. 104).

По формуле (32.10) получаем

$$V = \pi a^2 \int_{-b}^{b} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}\,dx = \frac{\pi a^2}{2} \int_{-b}^{b} \left(1 + \operatorname{ch}\frac{2x}{a}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{\pi a^2 x}{2} + \frac{\pi a^3}{4} \operatorname{sh}\frac{2x}{a}\right]_{-b}^{b} = \pi a^2 b + \frac{\pi a^3}{2} \operatorname{sh}\frac{2b}{a}.$$

Из рассмотренных в этом параграфе примеров уже отчетливо видна сила и общность методов интегрального исчисления: единым методом быстро и просто получаются формулы для площадей и объемов, как известные ранее из курса элементарной математики, так и совершенно новые. В ближайших пунктах мы рассмотрим еще ряд задач, также легко решаемых методами интегрального исчисления.

32.3. Вычисление длины кривой

Мы рассмотрели ряд задач, приводящих к понятию определенного интеграла. Все они имеют то общее, что в них определение значения какой-то величины приводилось к определению

предела некоторой интегральной суммы при стремлении мелкости разбиения к нулю, т. е. к определенному интегралу.

Существует, однако, другой круг задач, также приводящих к понятию определенного интеграла. Именно, если известна скорость одной величины относительно другой и требуется найти первую величину или, говоря точнее, если дана производная, а требуется найти саму функцию, то эта задача также решается с помощью определенного интеграла, так как такой первообразной является например, определенный интеграл с переменным верхним пределом. В качестве примера подобной задачи рассмотрим вычисление длины дуги кривой.

Пусть кривая Γ задана параметрическим векторным представлением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b$$

и пусть функция $\boldsymbol{r}(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда, как мы знаем, кривая Γ спрямляема и переменная длина дуги $s(t)$, отсчитываемая от начала $r(a)$ кривой Γ, является также непрерывно дифференцируемой функцией параметра t на отрезке $[a, b]$, причем (см. п. 16.3)

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|.$$

Поэтому в силу формулы Ньютона — Лейбница (замечая, что $s(a) = 0$) для длины $S = s(b)$ кривой Γ получим

$$S = s(b) - s(a) = \int_a^b \frac{ds}{dt}\,dt.$$

Таким образом,

$$S = \int_a^b \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt.$$

Если $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$, то

$$S = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt. \tag{32.14}$$

В случае, если кривая Γ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, то формула (32.14) принимает вид

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx. \tag{32.15}$$

Примеры. 1. Найти длину S дуги параболы $y = ax^2$, $0 \leqslant x \leqslant b$

Замечая, что $y' = 2ax$, согласно формуле (32.15), имеем

$$S = \int_0^b \sqrt{1 + 4a^2x^2}\,dx. \qquad (32.16)$$

Неопределенный интеграл

$$I = \int \sqrt{1 + 4a^2x^2}\,dx$$

вычислим следующим образом: проинтегрируем его сначала по частям; затем к числителю дроби, получившейся под знаком интеграла, прибавим и вычтем единицу, произведем деление и проинтегрируем одну из получившихся дробей:

$$I = \int \sqrt{1 + 4a^2x^2}\,dx = x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - \int \frac{4a^2x^2}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - \int \sqrt{1 + 4a^2x^2}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - I + \frac{1}{2a} \ln\left|2ax + \sqrt{1 + 4a^2x^2}\right|.$$

Из получившегося относительно I уравнения найдем его значение:

$$I = \frac{1}{2}\,x\sqrt{1 + 4a^2x^2} + \frac{1}{4a} \ln\left|2ax + \sqrt{1 + 4a^2x^2}\right| + C.$$

Теперь легко получаем величину интеграла (32.16):

$$S = \frac{1}{2}\,b\sqrt{1 + 4a^2b^2} + \frac{1}{4a} \ln\left|2ab + \sqrt{1 + 4a^2b^2}\right|.$$

2. Найти длину кривой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. Эта кривая называется астроидой, и с ней мы встречались раньше (см. рис. 61).

Астроида симметрична относительно начала координат. Ее части, лежащей в первой четверти, соответствует изменение параметра t от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Вычислим длину S этой части (равной, очевидно, одной четвертой длины всей астроиды). Замечая, что

$$x' = -3a\cos^2 t \sin t, \quad y' = 3a\sin^2 t \cos t,$$

по формуле (32.14) (в которой следует положить $z' = 0$) получим

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t \sin^2 t + 9a^2\sin^4 t \cos^2 t}\,dt = \frac{3a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = \frac{3a}{2}.$$

3. Найти длину S дуги эллипса

$$x = a\sin t,\ y = b\cos t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

от верхнего конца малой полуоси до его точки, соответствующей значению параметра $t \in [0, 2\pi]$.

Полагая

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

(ε — эксцентриситет эллипса), имеем

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t},$$

поэтому

$$S = a\int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t}\,dt,\ 0 \leqslant \varepsilon < 1. \qquad (32.17)$$

Мы получили эллиптический интеграл второго рода, который, как известно (см. п. 26.6), не вычисляется в конечном виде, т. е. формула (32.17) в данном случае является окончательным ответом. Приближенные значения длин дуг эллипса можно получить, либо непосредственно вычислив приближенно интеграл (32.17), либо воспользовавшись имеющимися таблицами значений эллиптических интегралов.

Упражнения. 2. Доказать, что если плоская кривая задана в полярных координатах непрерывно дифференцируемым представлением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то для ее длины s имеет место формула

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi. \qquad (32.18)$$

3. Найти длину дуги логарифмической спирали $r = ae^{b\varphi}$ от точки (φ_0, r_0) до точки (φ, r).

32.4. Площадь поверхности вращения

Пусть функция f определена и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Возьмем какое-либо разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и впишем в график функции f ломаную, соответствующую разбиению τ, т. е. ломаную с вершинами (x_i, y_i), где $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$ (рис. 105). Ее звено с вершинами (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i) при вращении около оси Ox описывает поверхность, вообще говоря, усеченного конуса, площадь которого равна

$$\pi(y_{i-1} + y_i)\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2},\ \text{где}\ \Delta y_i = y_i - y_{i-1},\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$
$$i = 0, 1, \ldots, k.$$

Поэтому для площади L_τ поверхности, получающейся от вращения всей рассматриваемой ломаной вокруг оси Ox, справедлива формула

$$L_\tau = \sum_{i=1}^{n} \pi (y_{i-1} + y_i) \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}.$$

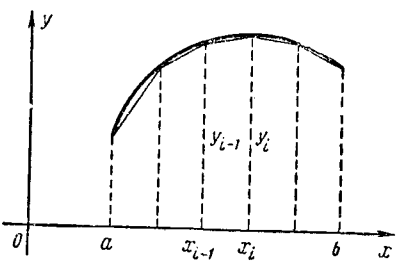


Рис. 105

Определение 1. *Предел*

$$L = \lim_{\delta_\tau \to 0} L_\tau \qquad (32.19)$$

называется площадью поверхности вращения, образованной вращением графика функции f вокруг оси Ox.

Пусть функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Покажем, что в этом случае предел (32.19) всегда существует, и найдем формулу для его вычисления.

Положим

$$L_\tau' = \pi \sum_{i=1}^{k} y_{i-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i,$$

$$L_\tau'' = \pi \sum_{i=1}^{k} y_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i,$$

тогда

$$L_\tau = L_\tau' + L_\tau''. \qquad (32.20)$$

Пусть $f'(x_i) = y_i'$, $i = 0, 1, \ldots, k$, и пусть

$$\sigma_\tau' = \pi \sum_{i=1}^{k} y_{i-1} \sqrt{1 + y_{i-1}'^2} \Delta x_i;$$

$$\sigma_\tau'' = \pi \sum_{i=1}^{k} y_i \sqrt{1 + y_i'^2} \Delta x_i.$$

Суммы σ_τ' и σ_τ'' являются суммами Римана для функции $y\sqrt{1 + y'^2}$, которая непрерывна, а значит, и интегрируема на отрезке $[a, b]$; поэтому

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau' = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau'' = \pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \qquad (32.21)$$

Оценим теперь отклонение сумм σ_τ' и σ_τ'' соответственно от сумм L_τ' и L_τ''.

Прежде всего, по теореме Лагранжа имеем

$$\Delta y_i = f'(\xi_i)\,\Delta x_i,\quad x_{i-1} < \xi_i < x_i,\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Далее обозначим через $\omega(\delta)$ модуль непрерывности функции $\sqrt{1+y'^2}$; в силу непрерывности этой функции

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0. \tag{32.22}$$

Имеем следующие оценки:

$$\left| \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} - \sqrt{1+y_{i-1}'^2} \right| =$$

$$= \left| \sqrt{1+f'^2(\xi_i)} - \sqrt{1+f'^2(y_{i-1})} \right| \leqslant \omega(\delta_\tau),$$

$$\left| \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} - \sqrt{1+y_i'^2} \right| =$$

$$= \left| \sqrt{1+f'^2(\xi_i)} - \sqrt{1+f'^2(y_i)} \right| \leqslant \omega(\delta_\tau).$$

Наконец, замечая, что функция f при сделанных предположениях ограничена на отрезке $[a, b]$ (почему?) и что поэтому существует постоянная $M > 0$, такая, что

$$|f(x)| \leqslant M,\quad x \in [a,\ b],$$

получим

$$|L_\tau' - \sigma_\tau'| \leqslant \pi \sum_{i=1}^{k} |y_{i-1}|\,\omega(\delta_\tau)\,\Delta x_i \leqslant$$

$$\leqslant \pi M \omega(\delta_\tau) \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = \pi M (b-a)\,\omega(\delta_\tau),$$

$$|L_\tau'' - \sigma_\tau''| \leqslant \pi \sum_{i=1}^{k} |y_i|\,\omega(\delta_\tau)\,\Delta x_i \leqslant \pi M (b-a)\,\omega(\delta_\tau).$$

Отсюда в силу (32.22)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (L_\tau' - \sigma_\tau') = \lim_{\delta_\tau \to 0} (L_\tau'' - \sigma_\tau'') = 0,$$

и так как суммы σ_τ' и σ_τ'' стремятся при $\delta_\tau \to 0$ к пределу (32.21), то и суммы L_τ' и L_τ'' стремятся при $\delta_\tau \to 0$ к тому же пределу:

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} L_\tau' = \lim_{\delta_\tau \to 0} L_\tau'' = \pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Поэтому (см. (32.20)) предел (32.19) существует и

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} L_\tau = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

Таким образом, для площади L поверхности вращения, образованной вращением графика функции f вокруг оси Ox, мы получили формулу

$$L = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2}\, dx. \tag{32.23}$$

Вспоминая, что (см. п. 16.4)

$$\sqrt{1+y'^2}\, dx = ds,$$

можем переписать формулу (32.23) в виде

$$L = 2\pi \int_a^b y\, ds.$$

Предложенный вывод этой формулы имеет некоторый методический недостаток, так как в этом выводе по ходу дела уже использовалось понятие площади поверхности и ее аддитивность, правда, лишь в простейшем случае — для поверхностей усеченного конуса и их объединений. Можно ввести общее понятие площади поверхности, не используя понятие площади поверхности для каких-либо элементарных поверхностей, и получить ее необходимые свойства. Эти вопросы будут рассмотрены в дальнейшем в п. 50.5.

Примеры. 1. Найдем площадь S сферы радиуса r.

Указанная сфера может быть получена вращением графика функции $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ вокруг оси Ox. Замечая, что в этом случае

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

и, значит,

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

получим, согласно формуле (32.23),

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} y \sqrt{1+y'^2}\, dx = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 4\pi r^2.$$

2. Найдем площадь S поверхности, образованной вращением дуги цепной линии (см. рис. 104):

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad -b \leqslant x \leqslant b.$$

По формуле (32.23) имеем

$$S = 2\pi a \int_{-b}^{b} \operatorname{ch} \frac{x}{a} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}\, dx =$$

$$= 2\pi a \int_{-b}^{b} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}\, dx = \pi a \int_{-b}^{b} \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a}\right) dx =$$

$$= \pi a \left(2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a}\right).$$

32.5. Работа силы

Пусть материальная точка M движется по непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{r = r(s)\}$, где s — переменная длина дуги, $0 \leqslant s \leqslant S$. Пусть на рассматриваемую материальную точку, находящуюся в положении $r(s)$ действует сила $F(s)$, направленная по касательной к траектории в направлении движения.

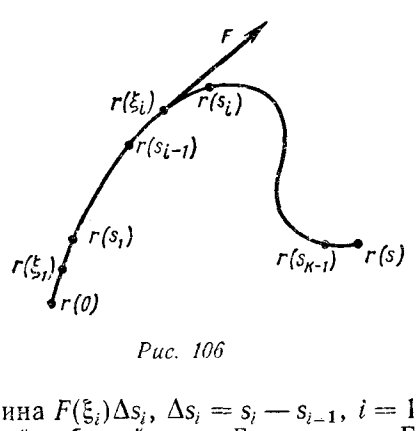


Рис. 106

Возьмем какое-либо разбиение $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[0, S]$. Ему соответствует разбиение траектории Γ на части

$$\Gamma_i = \{r(s), \quad s_{i-1} \leqslant s \leqslant s_i\},$$
$$i = 1, 2, \ldots, k.$$

Выберем произвольно по точке $\xi_i \leqslant [s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$ (рис. 106). Величина $F(\xi_i)\Delta s_i$, $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, называется *элементарной работой* силы F на участке Γ_i и принимается за приближенное значение работы, которую производит сила F, воздействующая на материальную точку, когда последняя проходит кривую Γ_i. Сумма всех элементарных работ $\sum_{i=1}^{k} F(\xi_i)\Delta s_i$ является интегральной суммой Римана функции $F(s)$.

Определение 2. *Предел, к которому стремится сумма*

$$\sum_{i=1}^{k} F(\xi_i)\,\Delta s_i$$

всех элементарных работ, когда мелкость разбиения τ *стремится к нулю, называется работой силы* F *вдоль кривой* Γ.

Таким образом, если обозначить эту работу буквой W, то в силу данного определения

$$W = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} F(\xi_i)\,\Delta s_i$$

имеем

$$W = \int_0^S F(s)\,ds. \tag{32.24}$$

Если положение точки на траектории ее движения описывается с помощью какого-либо другого параметра t (например, времени) и если величина пройденного пути $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, является непрерывно дифференцируемой функцией, то из формулы (32.24) получим

$$W = \int_a^b F[s(t)]\,s'(t)\,dt.$$

32.6. Вычисление статических моментов и центра тяжести кривой

Пусть M — материальная точка массы m с координатами x и y. Произведения my и mx называются ее *моментами* соответственно *относительно осей* Ox и Oy.

Пусть $\Gamma = \{r(s),\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ — спрямляемая кривая, где s — переменная длина дуги. Будем считать, что кривая Γ имеет массу и что масса ее дуги прямо пропорциональна длине дуги; если Δm — масса дуги длиной Δs, то $\Delta m = \rho \Delta s$, где ρ — некоторая постоянная, называемая *линейной плотностью* кривой Γ. Такие кривые в механике называются *однородными*. Поскольку $\rho = \dfrac{\Delta m}{\Delta s}$, то плотность равна массе длины дуги кривой, приходящейся на единицу длины дуги. Будем считать для простоты, что $\rho = 1$, т. е. что масса части кривой длины Δs также равна Δs, в частности, что масса всей кривой численно равна S.

Пусть теперь $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ — какое-либо разбиение отрезка $[0, S]$, $\Delta s = s_i - s_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Разбиению τ соответствует разбиение кривой Γ на части $\Gamma_i = \{r(s),\ s_{i-1} \leqslant s \leqslant s_i\}$. Выберем по какой-либо точке $\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$ и положим $x_i = x(\xi_i)$, $y_i = y(\xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Величины $y_i \Delta s_i$ при любом выборе указанных точек ξ_i называются *элементарными статическими моментами* части Γ_i кривой Γ относительно оси Ox. Очевидно, элементарный статический момент Γ_i численно равен моменту материальной точки массы Δs с ординатой y_i, т. е. мы как бы заменяем данную непрерывную кривую Γ k материальными точками.

Определение 3. *Предел, к которому стремится сумма*

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \Delta s_i \tag{32.25}$$

всех элементарных моментов, когда мелкость разбиения τ стремится к нулю, называется моментом M_x кривой Γ относительно оси Ox.

Этот предел всегда существует, ибо по определению кривой функция $r = r(s)$, а значит, и координатные функции $x = x(s)$, $y = y(s)$ непрерывны на отрезке $[0, S]$; сумма же (32.25) является интегральной суммой Римана функции $x(s)$ и потому при $\delta_\tau \to 0$ стремится к интегралу $\int_0^S y(s)\, ds$.

Таким образом,

$$M_x = \int_0^S y\, ds. \tag{32.26}$$

Аналогично определяется и вычисляется момент M_y кривой Γ относительно оси Oy:

$$M_y = \int_0^S x\, ds. \tag{32.27}$$

Из формулы (32.26) видно, что в случае, если кривая Γ является графиком однозначной неотрицательной функции $y = f(x)$, то момент M_x только множителем 2π отличается от площади L_x поверхности, образованной вращением графика функции f вокруг оси Ox, т. е.

$$2\pi M_x = L_x.$$

Подобное утверждение имеет место, как это следует из формулы (32.27), и для момента M_y.

Определение 4. *Точка плоскости* $P = (x_0, y_0)$, *обладающая тем свойством, что если в нее поместить материальную точку массы, равной массе кривой* (*т. е. в рассматриваемом нами случае массы* S), *то эта точка относительно любой координатной оси имеет статический момент, численно равный статическому моменту кривой относительно той же оси, называется центром тяжести данной кривой.*

Таким образом,

$$Sx_0 = M_y, \quad Sy_0 = M_x,$$

откуда в силу формул (32.26) и (32.27) для координат центра тяжести получаем формулы

$$x_0 = \frac{1}{S}\int_0^S x\,ds, \quad y_0 = \frac{1}{S}\int_0^S y\,ds. \tag{32.28}$$

В качестве примера найдем центр тяжести цепной линии $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $-b \leqslant x \leqslant b$. В силу симметрии цепной линии относительно оси Oy имеем

$$M_y = 0.$$

Действительно, выбирая за начало отсчета дуг точку цепной линии, лежащую на оси Oy, и обозначая длину всей цепной линии через $2S$, получим

$$M_y = \int_{-S}^{S} x(s)\,ds = 0,$$

ибо $x(s)$ — нечетная функция. Поэтому $x_0 = 0$. Далее,

$$M_x = \int_{-S}^{S} y\,ds.$$

Как отмечалось выше, $2\pi M_x = L_x$, где L_x — площадь поверхности, образованной вращением цепной линии вокруг оси Ox, и следовательно (см. п. 32.4),

$$L_x = \pi a\left(2b + a\operatorname{sh}\frac{b}{a}\right),$$

поэтому

$$M_x = \frac{a}{2}\left(2b + a\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right).$$

С другой стороны, длина $2S$ цепной линии легко вычисляется по формуле (32.15):

$$S = \int_{-b}^{b} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{-b}^{b} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx =$$

$$= \int_{-b}^{b} \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = a \operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_{-b}^{b} = 2a \operatorname{sh}\frac{b}{a}.$$

Поэтому в силу формулы (32.28) имеем

$$y_0 = \frac{2b + a \operatorname{sh}\dfrac{2b}{a}}{4 \operatorname{sh}\dfrac{b}{a}}.$$

Упражнения. 4. Найти площадь конечной области, ограниченной параболой $y^2 = 2x + 1$, и прямой $y = x - 1$.

5. Найти площадь области, ограниченной циклоидой $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, и прямой $y = 0$.

6. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (*лемнискатой*).

7. Найти объем тела вращения, образованного вращением одной арки синусоиды $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, вокруг оси Ox.

8. Найти длину дуги кривой $y = \ln \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant a < \dfrac{\pi}{2}$.

9. Найти длину дуги спирали Архимеда $\rho = a\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

10. Найти площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ вокруг оси Ox.

11. Найти координаты центра тяжести дуги круга $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $|\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

§ 33. ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

33.1. Определение интеграла от неограниченной функции

Известно, что если функция неограничена на отрезке $[a, b]$, то она не интегрируема по Риману. Поэтому, если мы хотим, чтобы хотя бы некоторые неограниченные функции интегрировались в каком-то смысле, нам необходимо обобщить понятие интеграла.

Определение 1. *Пусть функция f определена и не ограничена на полуинтервале $[a, b)$, причем она ограничена и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$. Тогда, если существует конечный предел*

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_a^{\eta} f(x)\,dx,$$

то он называется несобственным интегралом от функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x)\,dx. \tag{33.1}$$

Это определение можно записать также в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

В отличие от несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ обычный интеграл Римана $\int_a^b f(x)\,dx$ будем иногда называть также собственным интегралом.

Существование несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ эквивалентно существованию несобственного интеграла $\int_c^b f(x)\,dx$ при любом $c \in (a, b)$.

В самом деле, интеграл $\int_a^\eta f(x)\,dx$ отличается от интеграла $\int_c^\eta f(x)\,dx$ (при $c < \eta < b$) на конечную, не зависящую от η величину $\int_a^c f(x)\,dx$:

$$\int_a^\eta f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\eta f(x)\,dx,$$

поэтому при $\eta \to b-0$ оба указанных интеграла одновременно имеют предел или не имеют его.

Если $f>0$ на $[a,\ b)$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ численно равен площади неограниченной области

$$G=\{(x,\ y): a<x<b,\quad 0<y<f(x)\}:$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\operatorname{mes} G. \tag{33.2}$$

Действительно (см. рис. 107), если

$$G_k=\left\{(x,\ y): a<x<b-\frac{1}{k},\ 0<y<f(x)\right\},$$

то, согласно доказанному в п. 32.1,

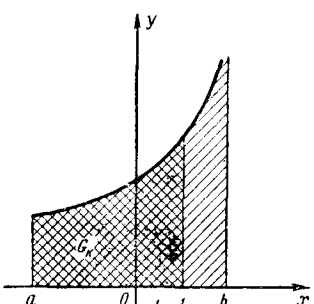


Рис. 107

$$\operatorname{mes} G_k=\int\limits_a^{b-\frac{1}{k}} f(x)\,dx. \tag{33.3}$$

Поскольку

$$G_1\subset G_2\subset\ldots\subset G_k\subset\ldots$$

и

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k=G,$$

то в силу теоремы 2 п. 31.2

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{mes} G_k=\operatorname{mes} G.$$

Согласно же определению несобственного интеграла

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_a^{b-\frac{1}{k}} f(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx;$$

поэтому, переходя к пределу в равенстве (33.3), мы и получим (33.2).

Упражнение 1. Пусть функция f определена и ограничена на $[a,\ b)$, причем она интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,\ b-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<b-a$. Доказать, что в этом случае предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ существует тогда и только тогда, когда функция f, будучи произвольным образом доопределенной в точке $x=b$, является интегрируемой по Риману на отрезке $[a,\ b]$ и в этом случае указанный предел равен $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Утверждение этого упражнения показывает, что если в определении несобственного интеграла (33.1) условие неограниченности функции f на $[a, b)$, заменить условием ее ограниченности, то в случае существования предела (33.1) мы не придем к новому понятию, а придем к старому понятию интеграла Римана. Определение 1, конечно, можно сформулировать и без требования неограниченности функции на $[a, b)$.

Для справедливости нижедоказанных теорем несущественна ограниченность или неограниченность подынтегральных функций. Поэтому мы не будем накладывать этого ограничения, но следует иметь в виду, что все эти теоремы будут содержательны только в случае неограниченных подынтегральных функций, содержательны в том смысле, что для ограниченных подынтегральных функций они либо тривиальны, либо доказаны ранее.

Итак, в дальнейшем под несобственным интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$ будем понимать интеграл, определенный формулой (33.1), однако без предположения неограниченности функции f на $[a, b)$. Тем самым (см. упражнение 1) теперь у нас собственный интеграл является частным случаем несобственного; этим оправдывается применение одного и того же символа $\int_a^b f(x)\,dx$ для обозначения как римановского, так и несобственного интегралов.

Аналогично определяется и несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ от функции f, определенной на полуинтервале $(a, b]$ и интегрируемой на всех отрезках $[\xi, b]$, $a < \xi \leqslant b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to a+0} \int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{33.4}$$

Если же функция f определена на интервале (a, b) и если при некотором выборе точки $c \in (a, b)$ существуют несобственные интегралы $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$, то по определению положим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{33.5}$$

При этом в рассматриваемом случае существование и величина интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ не зависят от выбора точки $c \in (a, b)$. Действительно, в этом случае функция f, очевидно, интегрируема

по Риману на любом отрезке $[\xi, \eta]$, где $a < \xi < \eta < b$, и определение (33.5) в силу определений (33.1) и (33.4) равносильно определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\xi \to a+0 \\ \eta \to b-0}} \int_\xi^\eta f(x)\,dx.$$

Здесь предел в правой части понимается в смысле предела функции двух переменных; образно говоря, переменные ξ и η стремятся к своим пределам независимо друг от друга.

Пусть теперь существует конечное число точек

$$x_i,\ i = 0,\ 1, \ldots,\ k,\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b,$$

таких, что все несобственные интегралы

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ k,$$

существуют, тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ определяется согласно формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx. \tag{33.6}$$

Из этого определения и определения (33.5) следует, что несобственный интеграл в общем случае сводится к интегралам вида (33.1) и (33.4). Поэтому при дальнейших рассмотрениях мы ограничимся лишь изучением несобственных интегралов двух указанных видов.

Упражнение 2. Доказать, что существование и значение несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ в определении (33.6) не зависит от выбора точек x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, удовлетворяющих сформулированным выше условиям.

Иногда вместо выражения «несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ существует» (и, следовательно, конечен) употребляется равнозначное выражение «интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится». Если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ не существует, то говорят также, что он расходится.

Примеры. 1. Функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $0<x\leqslant 1$, неограничена и, следовательно, не интегрируема по Риману, как бы ее ни доопределять в точке $x=0$. Несобственный же интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ существует:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\xi\to+0}\int_\xi^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\xi\to+0} 2\sqrt{x}\Big|_\xi^1=2.$$

2. Пусть $f(x)=\frac{1}{x}$, $0<x\leqslant 1$, тогда несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ не существует. Действительно,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\xi\to+0}\int_\xi^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\xi\to+0}\ln x\Big|_\xi^1=-\lim_{\xi\to+0}\ln\xi=+\infty.$$

33.2. Формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов на конечном промежутке

На несобственные интегралы легко переносятся многие свойства интеграла Римана (см. § 28 и § 30). Рассмотрим некоторые из них.

1. *Пусть функция f непрерывна на полуинтервале $[a, b)$ и пусть F — какая-либо первообразная функции f на $[a, b)$, тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b-0)-F(a), \tag{33.7}$$

где

$$F(b-0)=\lim_{x\to b-0}F(x).$$

Равенство (33.7) понимается в том смысле, что либо обе части равенства одновременно имеют смысл и тогда они равны, либо они одновременно не имеют смысла.

Действительно, согласно формуле Ньютона—Лейбница (см. п. 29.3),

$$\int_a^\eta f(x)\,dx=F(\eta)-F(a).$$

Переходя в этой формуле к пределу при $\eta \to b - 0$, получим формулу (33.7).

Аналогично утверждение имеет место и для несобственных интегралов вида (33.4).

2. *Если существуют несобственные интегралы* $\int_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int_a^b g(x)\,dx$, *то существует и несобственный интеграл* $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx$, *причем*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Действительно, например, для несобственных интегралов вида (33.1) имеем

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta [f(x)+g(x)]\,dx =$$

$$= \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x)\,dx + \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Подобным же образом доказываются и другие формулы для несобственных интегралов типа (33.1), например,

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^{b-0} - \int_a^b v\,du,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

и т. п

Конечно, аналогичные формулы справедливы и для несобственных интегралов вида (33.4). В дальнейшем для простоты изложения, как правило, будем ограничиваться лишь рассмотрением несобственных интегралов вида (33.1). К тому же интеграл вида (33.4) всегда можно заменой переменного свести к интегралу вида (33.1).

В качестве примера вычислим интеграл

$$I_n = \int_0^1 (\ln x)^n\,dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_n = \int_0^1 (\ln x)^n \, dx = x (\ln x)^n \Big|_0^1 - n \int_0^1 (\ln x)^{n-1} dx =$$

$$= -nI_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ибо

$$\lim_{x \to +0} x (\ln x)^n = 0.$$

Замечая, что

$$I_0 = \int_0^1 dx = 1,$$

получим

$$I_n = (-1)^n n!$$

33.3. Несобственные интегралы от неотрицательных функций на конечном промежутке

Теорема 1. *Пусть функция f определена и неотрицательна на полуинтервале $[a, b)$. Для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы интегралы*

$$\int_a^\eta f(x)\,dx, \quad a < \eta < b,$$

были ограничены в совокупности, т. е. чтобы существовала постоянная $M > 0$, такая, что

$$\int_a^\eta f(x)\,dx \leqslant M \tag{33.8}$$

для всех $\eta \in [a, b)$, причем в этом случае

$$\sup_{a \leqslant \eta < b} \int_a^\eta f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{33.9}$$

Доказательство. Положим

$$\varphi(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx, \quad a \leqslant \eta < b.$$

Если $a<\eta<\eta'<b$, то в силу неотрицательности функции f

$$\int_{\eta}^{\eta'} f(x)\,dx \geqslant 0,$$

поэтому

$$\varphi(\eta')=\int_{a}^{\eta'} f(x)\,dx=\int_{a}^{\eta} f(x)\,dx+\int_{\eta}^{\eta'} f(x)\,dx \geqslant \int_{a}^{\eta} f(a)\,dx=\varphi(\eta),$$

т. е. φ является монотонно возрастающей функцией. Поэтому предел $\lim\limits_{\eta\to b-0}\varphi(\eta)$ конечный или бесконечный всегда существует (см. п. 4.8); при этом этот предел конечен тогда и только тогда, когда функция φ ограничена сверху, т. е. когда выполняется условие (33.8).

Наконец (см. п. 4.8),

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx=\lim_{\eta\to b-0}\varphi(\eta)=\sup_{a\leqslant\eta<b}\varphi(\eta),$$

т. е. имеет место формула (33.9).

Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует также, что, для того чтобы несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ расходился, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(\eta)$ была не ограничена сверху, но тогда в силу ее монотонности

$$\lim_{\eta\to b-0}\varphi(\eta)=\lim_{\eta\to b-0}\int_{a}^{\eta} f(x)\,dx=+\infty.$$

Поэтому, если несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ от неотрицательной функции f расходится, то пишут

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx=+\infty. \tag{33.10}$$

В дальнейшем в настоящем пункте мы будем всегда предполагать, что

1) *функции f и g определены и неотрицательны $f\geqslant 0$, $g\geqslant 0$ на $[a, b)$;*

2) *интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a, b-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$.*

Нижесформулированные и доказанные теоремы называются обычно *признаками сравнения сходимости несобственных интегралов*.

Теорема 2. *Пусть*

$$f(x)=O(g(x)), \quad x\to b-0^{*}), \tag{33.11}$$

тогда:

1) *если интеграл* $\int_a^b g(x)\,dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$;

2) *если интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *расходится, то расходится и интеграл* $\int_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится. Из условия (33.11) следует существование такого $\eta_0\in[a, b)$ и такого $c>0$, что для всех $x\in[\eta_0, b)$ выполняется неравенство

$$f(x)\leqslant cg(x) \tag{33.12}$$

(см. п. 8.2). Из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ следует и сходимость интеграла $\int_{\eta_0}^b g(x)\,dx$. В силу же необходимости условий теоремы 1 для сходимости интеграла, существует такое число $M>0$, что для любого $\eta\in[\eta_0, b)$ справедливо неравенство

$$\int_{\eta_0}^{\eta} g(x)\,dx\leqslant M.$$

Отсюда и из неравенства (33.12) имеем

$$\int_{\eta_0}^{\eta} f(x)\,dx\leqslant c\int_{\eta_0}^{\eta} g(x)\,dx\leqslant cM.$$

*) В частности, если $f(x)\leqslant g(x)$.

Из этого неравенства, в силу достаточности условий теоремы 1 для сходимости интеграла от неотрицательной функции, получаем, что интеграл $\int_{\eta_0}^{b} f(x)\,dx$, а следовательно, и интеграл $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ сходится.

Утверждение 1 теоремы доказано. Докажем второе.

Если интеграл $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ расходится, то интеграл $\int_{a}^{b} g(x)\,dx$ не может сходиться: если бы он сходился, то в силу уже доказанного сходился бы и интеграл $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$. Таким образом, интеграл $\int_{a}^{b} g(x)\,dx$ расходится.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $g(x) \neq 0$, $a \leqslant x < b$, *и*

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \tag{33.13}$$

тогда:

1) *если интеграл*

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

сходится и $0 \leqslant k < +\infty$, *то и интеграл*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

также сходится;

2) *если интеграл*

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

расходится и $0 < k \leqslant \infty$, *то и интеграл*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

также расходится.

В частности, если $f \sim g$ (*см. п. 8.3*), *то интегралы*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Из выполнения условия (33.13) для $0 \leqslant k < +\infty$ следует, что существует такое $\delta > 0$, что если $b - \delta < x < b$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} < k+1, \text{ т. е. } f(x) < (k+1)\,g(x),$$

а это означает, что

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to b-0.$$

Поэтому утверждение 1 следствия непосредственно вытекает из утверждения 1 теоремы 2.

Из выполнения условия (33.13) для $0 < k \leqslant +\infty$ следует, что для любого $k' \in (0, k)$ существует такое $\delta = \delta(k') > 0$, что если $b - \delta < x < b$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} > k', \quad g(x) < \frac{1}{k'} f(x),$$

а это и означает, что

$$g(x) = O(f(x)), \quad x \to b-0.$$

Поэтому утверждение 2 следствия непосредственно вытекает из утверждения 2 теоремы 2.

Функция g в теореме 2 и ее следствии, с помощью которой устанавливается сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, называется *функцией сравнения*.

Эффективность использования критерия сравнения для определения сходимости интеграла зависит, конечно, от запаса функций сравнения, о которых известно, сходится от них интеграл или расходится, и которые тем самым можно пытаться использовать для исследования сходимости данного интеграла с помощью признака сравнения.

В качестве простой функции сравнения часто бывает достаточно брать функции вида

$$g(x) = \frac{1}{(b-x)^{\alpha}} \tag{33.14}$$

при различных показателях $\alpha > 0$.

Сходимость интегралов $\int_a^b g(x)\,dx$ для функций указанного вида проверяется непосредственно:

при $\alpha \neq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= -\frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to +0} [\varepsilon^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}] = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{если } \alpha > 1; \end{cases}$$

при $\alpha = 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = -\lim_{\varepsilon \to +0} \ln(b-x) \Big|_a^{b-\varepsilon} = +\infty.$$

Таким образом,

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится при } 0 < \alpha < 1, \\ \text{расходится при } \alpha \geqslant 1. \end{cases} \tag{33.15}$$

Если в качестве функции сравнения $g(x)$ взять функцию (33.14), то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (b-x)^\alpha f(x),$$

и теорема 2 и ее следствие перефразируются следующим образом.

Теорема 3. *Пусть* $f(x) \geqslant 0$ *при* $a \leqslant x < b$. *Тогда, если*

$$f(x) = O\left(\frac{1}{(b-x)^\alpha}\right), \quad x \to b-0, \quad \alpha < 1,$$

то интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{33.16}$$

сходится, если же

$$\frac{1}{(b-x)^\alpha} = O(f(x)), \quad x \to b-0, \quad \alpha \geqslant 1,$$

то интеграл (33.16) *расходится.*

Следствие. *Пусть*

$$\lim_{x \to b-0} (b-x)^\alpha f(x) = k,$$

тогда:

1) *если* $\alpha < 1$ *и* $0 \leqslant k < +\infty$, *то интеграл* (33.16) *сходится*;

2) *если* $\alpha \geqslant 1$ *и* $0 < k \leqslant +\infty$, *то интеграл* (33.16) *расходится.*

В частности, если

$$f(x) \sim \frac{1}{(b-x)^{\alpha}},$$

то интеграл (33.16) *сходится при* $\alpha < 1$ *и расходится при* $\alpha \geqslant 1$.

Аналогичные теоремы имеют, конечно, место и для несобственных интегралов вида (33.4), а также в случае, когда функции f и g неположительны на рассматриваемом промежутке.

Отметим, что утверждения (33.15) для интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$, т. е. то, что

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \text{сходится при } 0 < \alpha < 1, \\ \text{расходится при } \alpha \geqslant 1, \end{cases}$$

геометрически означает (рис. 108), что области

$$G_{\alpha} = \left\{(x, y): 0 < x < 1,\ 0 < y < \frac{1}{x^{\alpha}}\right\}$$

при $0 < \alpha < 1$ имеют конечную площадь, а при $\alpha \geqslant 1$ — бесконечную. Это непосредственно следует из геометрической интерпретации несобственного интеграла.

Примеры. 1. Интеграл

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (33.17)$$

сходится. В самом деле, беря в качестве функции сравнения

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \left(\alpha = \frac{1}{2}\right),$$

имеем

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{1-x}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

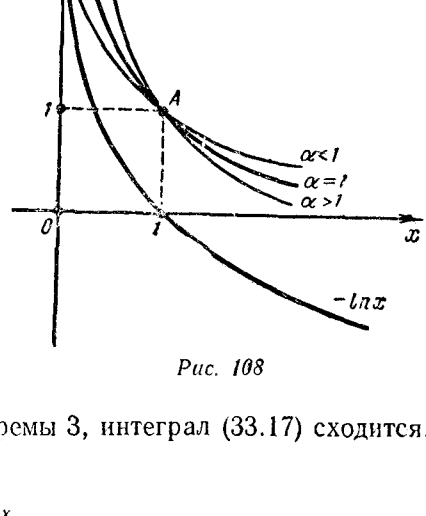


Рис. 108

поэтому, согласно следствию теоремы 3, интеграл (33.17) сходится.

2. Интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}\,dx$$

расходится. В качестве функции сравнения здесь можно взять

$$g(x)=\frac{1}{1-x}, \quad \alpha=1.$$

3. Интеграл

$$\int_0^1 \ln x\, dx \tag{33.18}$$

сходится.

Действительно, по правилу Лопиталя при любом $\alpha > 0$, в частности при $0 < \alpha < 1$,

$$\lim_{x\to+0} x^{\alpha}\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=-\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+0}x^{\alpha}=0,$$

поэтому, согласно теореме 3 (точнее, ее аналогу для отрицательных функций), интеграл (33.18) сходится (см. рис. 108).

Во всех рассмотренных примерах мы определили, сходится интеграл или нет, не вычисляя самого интеграла в конечном виде, хотя это и можно было сделать. Выясним теперь сходимость интеграла, который заведомо не вычисляется в конечном виде.

4. Для выяснения вопроса о сходимости интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x} \tag{33.19}$$

поступим, как и в предыдущем случае; взяв за функцию сравнения функцию вида

$$g(x)=\frac{1}{(1-x)^{\alpha}}, \quad \alpha>0,$$

получим по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to1-0}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\ln x}=-\alpha\lim_{x\to1-0}x(1-x)^{\alpha-1}.$$

Отсюда следует, что выгодно взять $\alpha = 1$, тогда

$$\lim_{x\to1-0}\frac{1-x}{\ln x}=-1,$$

и, значит, интеграл (33.19) расходится.

В случае, если оказывается трудным сразу выбрать показатель α в функции сравнения (33.14), то часто бывает полезно прибегнуть к общему методу выделения главной части функции f в окрестности точки b. Соответствующие примеры будут рассмотрены в пункте 34.3.

33.4. Критерий Коши. Абсолютно сходящиеся несобственные интегралы на конечном промежутке

Пусть функция f определена на полуинтервале $[a, b)$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$.

Отметим прежде всего необходимое и достаточное условие сходимости несобственного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{33.20}$$

носящее название *критерия Коши*.

Теорема 4. (Критерий Коши). *Для того чтобы интеграл* (33.20) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что если*

$$b - \delta < \eta' < b \quad \text{и} \quad b - \delta < \eta'' < b,$$

то

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{33.21}$$

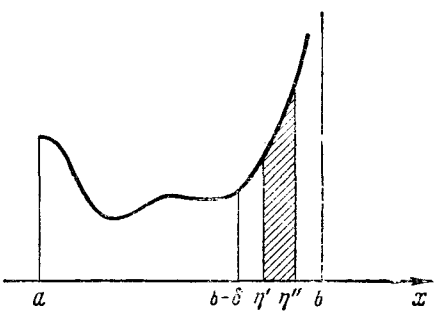


Рис. 109

Доказательство. Положим

$$\varphi(\eta) = \int_a^{\eta} f(x)\,dx, \quad a \leqslant \eta < b,$$

тогда сходимость интеграла (33.20), т. е. существование предела (33.1) эквивалентно существованию предела $\lim\limits_{\eta \to b-0} \varphi(\eta)$.

В силу же критерия Коши для существования предела функции имеем: для того чтобы существовал предел $\lim\limits_{\eta \to b-0} \varphi(\eta)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если

$$b - \delta < \eta' < b \quad \text{и} \quad b - \delta < \eta'' < b,$$

то

$$|\varphi(\eta'') - \varphi(\eta')| < \varepsilon. \tag{33.22}$$

Поскольку

$$\varphi(\eta'') - \varphi(\eta') = \int_a^{\eta''} f(x)\,dx - \int_a^{\eta'} f(x)\,dx = \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx,$$

то (33.22) равносильно условию (33.21) (рис. 109).

Теорема доказана.

Определение 2. *Интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл* $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Из теоремы 4 непосредственно следует критерий абсолютной сходимости интеграла.

Теорема 5. *Для того чтобы интеграл* (33.20) *абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что если*

$$b-\delta<\eta'<b \quad и \quad b-\delta<\eta''<b,$$

то

$$\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2}|f(x)|\,dx\right|<\varepsilon.$$

Теорема 6. *Если интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *абсолютно сходится, то он и просто сходится**).

Доказательство. Пусть фиксировано $\varepsilon > 0$. Если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ абсолютно сходится, то в силу критерия Коши (см. теорему 5) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''}|f(x)|\,dx\right|<\varepsilon, \tag{33.23}$$

если

$$b-\delta<\eta'<b, \quad b-\delta<\eta''<b.$$

Так как

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''}f(x)\,dx\right|\leqslant\left|\int_{\eta'}^{\eta''}|f(x)|\,dx\right|,$$

то в силу неравенства (33.23) для любых указанных η' и η''

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''}f(x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

поэтому в силу критерия Коши (см. теорему 4) интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится.

Теорема доказана.

*) Подчеркнем, что здесь, как и раньше, мы рассматриваем только функции, интегрируемые по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $\eta \in [a, b)$.

В дальнейшем (см. п. 34.4) будут приведены примеры сходящихся, но неабсолютно сходящихся несобственных интегралов.

С помощью установленных в п. 33.3 признаков сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций можно устанавливать абсолютную сходимость несобственных интегралов, а значит, и просто их сходимость в случае, если они абсолютно сходятся.

Например, интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

сходится, и притом абсолютно, ибо

$$\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{1-x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

и интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится.

§ 34 НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

34.1. Определение несобственных интегралов с бесконечными пределами

Обобщим понятие интеграла на случай бесконечных промежутков.

Пусть функция f определена для всех $x \geqslant a$ и пусть она интегрируема на любом конечном отрезке $[a, \eta]$, $\eta \geqslant a$.

Определение 1. *Будем говорить, что функция f интегрируема в несобственном смысле, или, что то же, что интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (34.1)$$

сходится, если существует конечный предел

$$\lim_{\eta\to+\infty} \int_a^{\eta} f(x)\,dx.$$

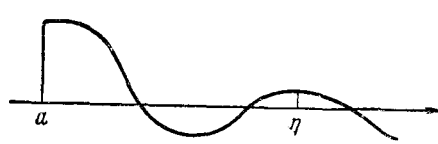


Рис. 110

Этот предел, если он существует, и называется несобственным интегралом (34.1). *Таким образом* (рис. 110),

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\eta\to+\infty} \int_a^{\eta} f(x)\,dx.$$

Существование несобственного интеграла (34.1) эквивалентно существованию несобственного интеграла

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx \tag{34.2}$$

при любом $c > a$. Действительно,

$$\int_a^{\eta} f(x)\,dx = \int_a^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\eta} f(x)\,dx,$$

поэтому интегралы (34.1) и (34.2) одновременно существуют или не существуют.

Если $f(x) \geqslant 0$ для $x \geqslant a$, то несобственный интеграл (34.1) численно равен площади неограниченной области

$$G = \{(x, y) : x > a,\ 0 < y < f(x)\},$$

т. е.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \operatorname{mes} G.$$

В этом легко убедиться с помощью теоремы 2 п. 31.2, подобно тому как это было сделано в предыдущем параграфе для несобственных интегралов от неограниченных функций (см. п. 33.1).

Упражнение 1. Привести пример функции f, положительной при $x \geqslant 1$ и неограниченной в каждой окрестности $+\infty$, для которой интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Аналогично определяется и несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

для функции f, определенной на полупрямой $x \leqslant a$ и интегрируемой по Риману на любом отрезке $[\xi, a]$, именно

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\xi \to -\infty} \int_{\xi}^{a} f(x)\,dx. \tag{34.3}$$

Если же для функции f имеют смысл несобственные интегралы $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ и $\int_b^{+\infty} f(x)dx$, где $a \leqslant b$, а также собственный или не-

собственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ определяется согласно формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (34.4)$$

Упражнение 2. Доказать, что существование и значение несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в определении (34.4) не зависит от выбора точек a и b, удовлетворяющих сформулированным выше условиям.

Вместо «интеграл существует» и, следовательно, конечен (соответственно не существует) часто говорят также, что интеграл сходится (соответственно расходится).

В дальнейшем для простоты мы в основном ограничимся рассмотрением несобственных интегралов вида (34.1). Для интегралов типа (34.3) и (34.4) соответствующие утверждения также будут справедливы, и читатель легко сформулирует и докажет их самостоятельно по мере собственной потребности.

В качестве примера покажем, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится при } \alpha > 1, \\ \text{расходится при } \alpha \leqslant 1. \end{cases} \qquad (34.5)$$

В самом деле, если $\alpha \neq 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{для } \alpha < 1, \\ -\dfrac{1}{1-\alpha} & \text{для } \alpha > 1. \end{cases}$$

Если же $\alpha = 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty.$$

34.2. Формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов

Подобно тому как это имело место для несобственных интегралов от неограниченных функций, на интегралы с бесконечными пределами переносятся формулы интегрального исчисления,

причем метод их доказательства аналогичен случаю интегралов от неограниченных функций. Это делается особенно ясным, если заметить, что оба определения несобственных интегралов можно формально объединить в одно определение. Сделаем это.

Определение 2. *Пусть функция f определена на конечном или бесконечном промежутке $[a, b)$, $a < b \leqslant +\infty$, и пусть функция f интегрируема на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < b$. Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ определим по формуле*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx, \quad a < \eta < b. \tag{34.6}$$

Очевидно, что в случае конечного b и неограниченности функции f на промежутке $[a, b)$ определение (34.6) превращается в определение (33.1), а в случае $b = +\infty$ — в определение (34.1).

Случай же, когда b конечно, а функция f ограничена на $[a, b)$, не представляет принципиального интереса, ибо, как это уже отмечалось в п. 33.1 (см. упражнение 1 в п. 33.1 и замечание после него), при этих предположениях существование предела (34.6) эквивалентно интегрируемости по Риману функции f на отрезке $[a, b]$ (в точке b функция f доопределяется произвольным образом).

Если предел

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx, \quad a < \eta < b$$

равен ∞, $+\infty$ или $-\infty$, то соответственно пишут

$$\int_a^b f(x)\,dx = \infty, \quad \int_a^b f(x)\,dx = +\infty \text{ или } \int_a^b f(x)\,dx = -\infty.$$

В пункте 33.2 формулы интегрального исчисления с помощью определения (34.6) при конечном b обобщались на случай несобственных интегралов от неограниченных функций. Таким же точно образом указанные формулы с помощью определения (34.6), но уже при $b = +\infty$ могут быть перенесены и на случай интегралов вида (34.2). В частности, справедливы, например, следующие утверждения.

1. *Пусть функция f непрерывна при $x \geqslant a$ и пусть F — какая-либо первообразная функции f на полупрямой $x \geqslant a$, тогда*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a), \tag{34.7}$$

где

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x),$$

причем обе части равенства (34.7) *одновременно имеют смысл или нет.*

2. *Если* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится и* k*—число, то интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} kf(x)\,dx$ *также сходится и*

$$\int_a^{+\infty} kf(x)\,dx=k\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

3. *Если интегралы* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходятся, то* $\int\limits_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]\,dx$ *сходится и*

$$\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]dx=\int_a^{+\infty} f(x)\,dx+\int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

4. *Если функции* u, v *непрерывно дифференцируемы на полупрямой* $x\geqslant a$, *то*

$$\int_a^{+\infty} udv=uv\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty} vdu,$$

причем если любые два из выражений $\int\limits_a^{+\infty} udv$, $uv\Big|_a^{+\infty}$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} vdu$ *имеют смысл, то имеет смысл и оставшееся.*

5. *Пусть функция* f *непрерывна при* $x\geqslant a$, *функция* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной на полуинтервале* $[\alpha,\ \beta)$, $\alpha<\beta\leqslant+\infty$, *причем* $a=\varphi(\alpha)\leqslant\varphi(t)<\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=+\infty$, *тогда*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\int_\alpha^{\beta} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{34.8}$$

При этом оба интеграла в формуле (34.8) *одновременно существуют или нет.*

Отметим, что всякий несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad -\infty < a < b < +\infty,$$

от неограниченной функции f может быть заменой переменной сведен к несобственному интегралу по неограниченному промежутку. Действительно, делая, например, замену переменных

$$x = \frac{bt + a}{t + 1}, \quad dx = \frac{b - a}{(t + 1)^2}\,dt, \tag{34.9}$$

получим

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^{+\infty} f\left(\frac{bt + a}{t + 1}\right)\frac{dt}{(t + 1)^2}.$$

Отсюда следует, что при выполнении условий, обеспечивающих возможность замены переменной (34.9), всякое утверждение для несобственных интегралов от неограниченных функций по конечному отрезку может быть перефразировано в утверждение для несобственных интегралов по неограниченным промежуткам, и наоборот.

Примеры. 1. Вычислить интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Делая замену переменного $x = \frac{1}{t}$, получим

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

2. Пусть

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx =$$

$$= nI_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Замечая, что

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

окончательно имеем

$$I_n = n!$$

34.3. Несобственные интегралы с бесконечными пределами от неотрицательных функций

Для указанных в заглавии интегралов справедливы теоремы, аналогичные теоремам, доказанным в п. 33.3, для несобственных интегралов от неотрицательных неограниченных функций.

Теорема 1. *Пусть функция f определена и неотрицательна для $x \geqslant a$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < +\infty$. Для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы интегралы*

$$\int_a^{\eta} f(x)\,dx, \quad a \leqslant \eta < +\infty,$$

были бы ограничены в совокупности, причем в этом случае

$$\sup_{\eta \geqslant a} \int_a^{\eta} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Условие ограниченности интегралов

$$\int_a^{\eta} f(x)\,dx$$

при $\eta \geqslant a$ равносильно условию ограниченности этих интегралов при $\eta \geqslant a'$, где $a' > a$.

В самом деле, в силу неотрицательности функции f, если $a < \eta < a'$, то

$$\int_a^{\eta} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{a'} f(x)\,dx,$$

т. е. интегралы $\int_a^{\eta} f(x)\,dx$, $a < \eta < a'$, всегда ограничены.

Заметим еще, что в случае, если интеграл от неотрицательной функции f расходится, то в силу монотонного возрастания функции

$$\varphi(\eta)=\int_a^{\eta} f(x)\,dx$$

ее предел при $\eta\to+\infty$ равен $+\infty$, поэтому, согласно сделанному в п. 34.2 соглашению, в этом случае

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=+\infty.$$

В дальнейшем в этом пункте будем предполагать, что функции f и g определены и неотрицательны при $x\geqslant a$ и интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a,\ \eta]$, $a<\eta<+\infty$.

Теорема 2 (признак сравнения). *Пусть*

$$f(x)=O(g(x)) \text{ при } x\to+\infty\ ^{*)},$$

тогда, если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходится, то сходится и* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, *а если интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится, то расходится и интеграл* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Следствие. *Пусть* $g(x)\neq 0$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$, *тогда:*

1) *если интеграл* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходится и* $0\leqslant k<+\infty$, *то интеграл* $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ *также сходится;*

2) *если интеграл* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *расходится и* $0<k\leqslant+\infty$, *то интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *также расходится.*

---

*) В частности, если $f(x)\leqslant g(x)$.

В частности, если $f \sim g$ (см. п. 8.3), *то интегралы*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad и \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Все эти теоремы доказываются совершенно аналогично теоремам п. 33.3. Если в теореме 2 и ее следствии в качестве функции сравнения $g(x)$ взять функцию

$$g(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

то получится следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $f(x) \geqslant 0$ *при* $x \geqslant a > 0$. *Тогда если*

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad x \to +\infty, \quad \alpha > 1,$$

то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{34.10}$$

сходится, если же

$$\frac{1}{x^\alpha} = O(f(x)), \quad x \to +\infty \quad и \quad \alpha \leqslant 1,$$

то интеграл (34.10) *расходится.*

Следствие. *Пусть*

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = k,$$

тогда:

1) *если* $\alpha \leqslant 1$ *и* $0 < k \leqslant +\infty$, *то интеграл* (34.10) *расходится*:

2) *если* $\alpha > 1$ *и* $0 \leqslant k < +\infty$, *то интеграл* (34.10) *сходится.*

В частности, если

$$f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha},$$

то интеграл (34.10) *сходится при* $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha \leqslant 1$.

Примеры. 1. Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x^3+1}} \tag{34.11}$$

сходится.

Действительно, возьмем $\alpha = \frac{3}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, тогда

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}-\varepsilon} \ln x}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} = -\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}} = 0. \qquad (34.12)$$

Выберем ε так, чтобы $\frac{3}{2} - \varepsilon > 1$, тогда интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}-\varepsilon}} \qquad (34.13)$$

сходится, а значит, в силу следствия теоремы 3 сходится и интеграл (34.11).

В случае, когда сразу не ясен порядок подынтегральной функции, следует попытаться выделить ее главную часть в виде $\frac{c}{x^{\alpha}}$ (c и α — постоянные), прибегнув, например, к формуле Тейлора.

2. Исследуем сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln \cos \frac{1}{x}}{x^p}\, dx. \qquad (34.14)$$

Здесь подынтегральная функция всюду отрицательна. Очевидно, интеграл (34.14) сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{+\infty} -\frac{\ln \cos \frac{1}{x}}{x^p}\, dx, \qquad (34.15)$$

у которого подынтегральная функция всюду положительна.

Раскладывая функцию $\ln \cos \frac{1}{x}$ по формуле Тейлора, получим

$$-\frac{\ln \cos \frac{1}{x}}{x^p} = -\frac{\ln\left[1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x^p} = -\frac{-\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^p} =$$

$$= \frac{1}{2x^{2+p}} + o\left(\frac{1}{x^{2+p}}\right).$$

Таким образом,

$$-\frac{\ln \cos \frac{1}{x}}{x^p} \sim \frac{1}{2x^{2+p}} \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

и, значит, интеграл (34.14) сходится при $2 + p > 1$, т. е. при $p > -1$, и расходится при $p \leqslant -1$.

34.4. Критерий Коши. Абсолютно сходящиеся несобственные интегралы с бесконечными пределами. Метод улучшения сходимости интегралов

Будем снова предполагать, что функция f определена для всех $x \geqslant a$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \xi]$, $a < \xi < +\infty$.

Теорема 4 (критерий Коши). *Для того чтобы интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{34.16}$$

был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ *существовало такое число* $b = b(\varepsilon) \geqslant a$, *что если* $b' > b$ *и* $b'' > b$, *то* (рис. 111)

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

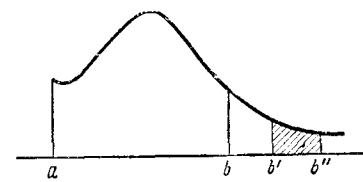


Рис. 111

Эта теорема, подобно соответствующей теореме из п. 33.4, сразу следует из критерия Коши существования предела при $\eta \to +\infty$ у функции

$$\varphi(\eta) = \int_a^{\eta} f(x)\,dx, \qquad \eta \geqslant a,$$

ибо

$$\lim_{\eta \to +\infty} \varphi(\eta) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

и

$$|\varphi(\eta'') - \varphi(\eta')| = \left|\int_{\eta}^{\eta''} f(x)\,dx\right|.$$

Определение 1. *Интеграл* (34.16) *называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx. \tag{34.17}$$

Как всегда, здесь предполагается, что функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, где $\eta > a$.

Критерии сходимости интегралов от неотрицательных функций, очевидно, применимы также и в качестве критериев абсолютной сходимости интегралов.

Пусть, например, требуется выяснить: сходится абсолютно или нет интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx. \tag{34.18}$$

Поскольку

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то, согласно теореме 2 п. 34.3, сходится и интеграл

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx,$$

т. е. интеграл (34.18) абсолютно сходится.

Из теоремы 4, согласно определению абсолютной сходимости интегралов, непосредственно получается следующий критерий абсолютной сходимости интегралов.

Теорема 5. *Для того чтобы интеграл* (34.16) *абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое число* $b = b(\varepsilon) \geqslant a$, *что если* $b' > b$ *и* $b'' > b$, *то*

$$\left|\int_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon.$$

Теорема 6. *Если интеграл* (34.16) *абсолютно сходится, то он и просто сходится.*

Подобно аналогичному утверждению в п. 33.4 эта теорема непосредственно следует из критерия Коши сходимости интегралов и неравенства

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{b}^{b''} |f(x)|\,dx\right|.$$

В качестве примера рассмотрим интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{34.19}$$

Покажем, что этот интеграл сходится, но не абсолютно. Прежде всего заметим, что поскольку

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

то подынтегральная функция, доопределенная единицей при $x=0$, будет непрерывна на полупрямой $x\geqslant 0$ и, значит, интегрируема по Риману на любом отрезке $[0, b]$, в частности, на отрезке $[0, 1]$. Поэтому вопрос о сходимости, соответственно абсолютной сходимости, интеграла (34.19) эквивалентен вопросу о сходимости, соответственно абсолютной сходимости, интеграла

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{34.20}$$

Для исследования его сходимости проинтегрируем его по частям:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,d(\cos x)=$$

$$=-\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\cos x\,d\left(\frac{1}{x}\right)=\cos 1-\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

В правой части мы получили интеграл (34.18), который, как мы знаем, абсолютно, а значит, и просто сходится.

Таким образом, оба получившихся выражения в правой части имеют смысл, т. е. конечны, поэтому, во-первых, проделанное интегрирование по частям законно, а во-вторых, левая часть также конечна, т. е. интеграл (34.20) сходится.

Заметим, что в результате интегрирования по частям интеграла (34.20) мы заменили его суммой некоторого конечного выражения и другого несобственного интеграла, у которого в знаменателе подынтегрального выражения стоит более высокая степень x, чем в (34.20), а в числителе ограниченная, как в (34.20) функция. В получившемся интеграле подынтегральная функция быстрее стремится к нулю, чем в исходном, точнее,

$$\frac{|\cos x|}{x^2}=o\left(\frac{|\sin x|}{x}\right)\text{ при }x\to\infty.$$

Поэтому его сходимость оказалось легче непосредственно исследовать, чем сходимость исходного интеграла: он оказался даже не просто сходящимся, а абсолютно сходящимся.

Метод исследования сходимости несобственных интегралов, при котором исследование сходимости данного интеграла сводится к исследованию сходимости другого интеграла, который в каком-то смысле «лучше сходится», чем данный, называется *методом улучшения сходимости*.

Покажем теперь, что интеграл (34.20) не сходится абсолютно, т. е. что интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \tag{34.21}$$

расходится.

Действительно, из неравенства

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

при любом $a > 1$ имеем

$$\int_1^a \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{2}\int_1^a \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^a \frac{\cos 2x}{x}\,dx. \tag{34.22}$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится и равен $+\infty$. Интеграл же $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ сходится. Чтобы в этом убедиться, проинтегрируем его по частям

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,d(\sin 2x) = \frac{\sin 2x}{2x}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \sin 2x\, d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{\sin 2}{2} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2}\,dx.$$

Сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ непосредственно следует из сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2}\,dx$, что устанавливается аналогично сходимости интеграла (34.18). Переходя теперь к пределу при $a \to +\infty$ в неравенстве (34.22), получим, что правая, а следовательно, и левая часть этого неравенства стремится к $+\infty$ и потому интеграл (34.21) расходится.

Таким образом, интеграл (34.20), а значит, и интеграл (34.19) не сходятся абсолютно.

В заключение докажем один достаточный критерий сходимости интегралов, называемый обычно *признаком Дирихле*.

Теорема 7 (признак Дирихле). *Пусть:*

1) *функция f непрерывна и имеет ограниченную первообразную F при $x \geqslant a$;*

2) *функция g непрерывно дифференцируема при $x \geqslant a$;*

3) *функция g монотонно убывает при $x \geqslant a$;*

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$,

тогда интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx \tag{34.23}$$

сходится.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу сделанных предположений функция fg непрерывна, а значит, и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, b]$, $a < b < +\infty$, и потому имеет смысл говорить о несобственном интеграле (34.23).

Интегрируя по частям на отрезке получим

$$\int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \int\limits_a^b g(x)\, dF(x) =$$

$$= g(x)\, F(x) \Big|_a^b - \int\limits_a^b F(x)\, g'(x)\, dx. \tag{34.24}$$

Исследуем поведение обоих слагаемых правой части при $b \to +\infty$. В силу ограниченности функции F (см. условие 1 теоремы)

$$M = \sup |F(x)| < +\infty,$$

поэтому

$$|g(b)\, F(b)| \leqslant M g(b),$$

и в силу условия 4 теоремы

$$\lim_{b \to +\infty} g(b)\, F(b) = 0.$$

Далее, из монотонного убывания функции g следует, что $g'(x) \leqslant 0$ при $x \geqslant 0$ и поэтому

$$\int\limits_a^b |F(x)\, g'(x)|\, dx \leqslant M \int\limits_a^b |g'(x)|\, dx =$$

$$= -M \int\limits_a^b g'(x)\, dx = M\,[g(a) - g(b)] \leqslant M g(a),$$

ибо из условий 3 и 4 теоремы следует, что $g(x) \geqslant 0$, в частности, что $g(b) \geqslant 0$.

Таким образом, интегралы

$$\int_a^b |F(x)\,g'(x)|\,dx$$

ограничены в совокупности при всех $b > a$, и поэтому интеграл

$$\int_a^{+\infty} F(x)\,g'(x)\,dx$$

абсолютно, а значит, и просто сходится, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b F(x)\,g'(x)\,dx.$$

Мы доказали, что в правой части равенства (34.24) оба слагаемых при $b \to +\infty$ имеют конечный предел, а значит, и предел левой части при $b \to +\infty$ конечен, а это и означает сходимость интеграла (34.23).

Теорема доказана.

Применим признак Дирихле к исследованию сходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx, \quad \alpha > 0. \tag{34.25}$$

Функция $f(x) = \sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$, а непрерывно дифференцируемая функция $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ при $\alpha > 0$ монотонно убывает и стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Все условия теоремы 7 выполнены, поэтому интеграл (34.25) сходится.

Следует, однако, иметь в виду, что признак Дирихле дает только достаточные, а не необходимые условия сходимости интеграла; поэтому не всегда с помощью его можно решить вопрос о сходимости интеграла. Например, исследуем сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{x^\alpha - \sin x}, \quad \alpha > 0. \tag{34.26}$$

Попытаемся применить признак Дирихле, положив $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha - \sin x}$. Очевидно, что $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Най-

дем производную:

$$g'(x)=\frac{\alpha x^{\alpha-1}+\cos x}{(x^{\alpha}-\sin x)^2}.$$

Отсюда видно, что при $\alpha<1$ эта производная при $x\to\infty$ бесконечное число раз меняет знак и, следовательно, сама функция $g(x)$ не монотонно убывает.

Таким образом, при $\alpha<1$ признак Дирихле оказывается не применим для выяснения вопроса о сходимости интеграла (34.26). В этом случае естественно попробовать прибегнуть снова к методу выделения главной части.

Применяя формулу разложения бинома по формуле Тейлора (см. п. 13.3), получим при $x\to\infty$

$$\frac{\sin x}{x^{\alpha}-\sin x}=\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\sin x}{x^{\alpha}}}=\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\left[1+\frac{\sin x}{x^{\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)\right]=$$

$$=\frac{\sin x}{x^{\alpha}}+\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)=\frac{\sin x}{x^{\alpha}}+\frac{1}{2x^{2\alpha}}-\frac{\cos 2x}{2x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right). \quad (34.27)$$

Интегралы

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,dx \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^{2\alpha}}\,dx \qquad (34.28)$$

сходятся по признаку Дирихле при всех $\alpha>0$. Интеграл же

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{2x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)\right]dx \qquad (34.29)$$

сходится при $2\alpha>1$, т. е. при $\alpha>\frac{1}{2}$, и расходится при $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$. Действительно, $o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)=\frac{\varepsilon(x)}{x^{2\alpha}}$, где $\varepsilon(x)\to 0$ при $x\to\infty$, причем из формулы (34.27) следует, что эта функция $o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)$ непрерывна, и, следовательно, имеет смысл говорить об интеграле (34.29). Выберем $A>1$ так, чтобы при $x>A$ имело место $|\varepsilon(x)|<\frac{1}{4}$, тогда при $x>A$

$$\frac{1}{4x^{2\alpha}}<\frac{1}{2x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)<\frac{3}{4x^{2\alpha}},$$

и, следовательно, интеграл (34.29) сходится и расходится при тех же значениях параметра α, что и интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{2\alpha}}$.

Таким образом, при $\alpha > \frac{1}{2}$ все интегралы (34.28) и (34.29) сходятся, а значит, в силу (34.27) сходится и интеграл (34.26). При $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ интегралы (34.28) сходятся, а интеграл (34.29) расходится, следовательно, расходится и интеграл (34.26).

Заметим, что при $\alpha \leqslant 0$ интеграл (34.26) расходится. Действительно, в этом случае знаменатель подынтегральной функции обращается в ноль бесконечное число раз; причем если $x_0^\alpha - \sin x_0 = 0$, то функция $x^\alpha - \sin x$ в окрестности точки x_0, согласно формуле Тейлора имеет вид (почему?) $x^\alpha - \sin x = (x - x_0)^k \varphi(x)$, где k — некоторое натуральное число, а $\varphi(x_0) \neq 0$. Поскольку $\sin x_0 \neq 0$, то в каждой подобной точке x_0 мы имеем неинтегрируемую особенность.

Упражнение 3. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость следующих интегралов:

1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4 + x^2 + 1}$, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$, $\int\limits_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\,dx$,

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^x}{x^{10}}\,dx$, $\int\limits_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt[3]{x}}$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$,

$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$, $\int\limits_0^1 \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x^3 (1 - x^2)}}$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\alpha x\,dx$.

2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (\ln x)^p}$, $-\infty < p < +\infty$.

3. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.

4. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{(x + \cos x)^\alpha}\,dx$.

5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)}\,dx$.

Задача 17. Привести пример двух эквивалентных при $x \to +\infty$ функций f и g: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, таких, что $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\,dx$ расходится.

ГЛАВА
ЧЕТВЕРТАЯ

РЯДЫ

§ 35. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

35.1. Определение ряда и его сходимость

В настоящем параграфе понятие суммы обобщается на некоторые случаи бесконечного числа слагаемых и изучаются свойства таких сумм. Многие из рассматриваемых ниже вопросов справедливы не только для вещественных чисел, но и для комплексных чисел. Поэтому в отличие от предыдущих глав в настоящей главе будем вести рассмотрения в комплексной области.

Определение 1. *Пусть задана последовательность комплексных чисел* u_n, $n = 1, 2, \ldots$. *Формально написанная сумма*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{35.1}$$

или, что то же,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

называется рядом, а число u_n *— его n-м членом,* $n = 1, 2, \ldots$.

Подчеркнем, что всюду, где не оговорено противное, члены рассматриваемых рядов подразумеваются комплексными.

Определение 2. *Конечная сумма*

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \tag{35.2}$$

слагаемыми которой являются первые n членов ряда (35.1), *называется n-й частичной суммой данного ряда, а ряд*

$$u_{n+1} + \ldots + u_{n+k} + \ldots, \tag{35.3}$$

членами которого являются все члены ряда (35.1), *начиная с* $(n+1)$*-го, написанные в том же порядке, что и в данном ряде, называется n-м остатком ряда* (35.1).

Определение 3. *Ряд* (35.1) *называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм* $\{s_n\}$ *сходится* (см. п. 3.1 и п. 23.1). *Если ряд не сходится, то говорят, что он расходится. Если ряд* (35.1) *сходится, то предел*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

называется его суммой. В этом случае пишут

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

или

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.4}$$

Согласно этому обозначению, выражение (35.1) в случае сходящегося ряда всегда обозначает его сумму.

Если

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty, \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = +\infty, \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = -\infty,$$

то соответственно пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty.$$

Каждому ряду естественным образом соответствует некоторая последовательность — последовательность его частичных сумм; при этом по определению, сходимость ряда эквивалентна сходимости последовательности его частичных сумм.

Обратно, каждой последовательности можно поставить в соответствие такой ряд, что она будет являться последовательностью его частичных сумм. Действительно, пусть дана последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$. Положим

$$u_1 = z_1, \quad u_2 = z_2 - z_1, \ \ldots, \ u_n = z_n - z_{n-1}, \ \ldots$$

и рассмотрим ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots .$$

Тогда

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n =$$

$$= z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) = z_n.$$

Таким образом, исследование сходимости ряда, согласно определению, сводится к исследованию сходимости последовательности, а исследование сходимости последовательности всегда может быть указанным приемом сведено к исследованию сходимости соответст-

вующего ряда. Поэтому всякое утверждение о сходимости ряда можно перефразировать в терминах сходимости последовательности, и наоборот.

Если остаток (35.3) ряда (35.1) сходится, что его сумму будем обозначать r_n:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k. \tag{35.5}$$

Всякую сумму конечного числа слагаемых

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_0}$$

можно рассматривать как ряд, добавив к ней члены

$$u_{n_0+1} = u_{n_0+2} = \ldots = 0$$

Сумма получившегося ряда, очевидно, будет совпадать с заданной суммой, ибо при всех $n \geqslant n_0$ его частичные суммы равны s_{n_0}.

Если заранее неизвестно, содержит сумма конечное или бесконечное число слагаемых, то иногда удобно в обоих случаях называть ее рядом, считая, что конечная сумма является рядом в вышеуказанном смысле.

Примеры. 1. Пусть q — комплексное число и $|q| < 1$. Тогда ряд

$$q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$$

с членами $u_n = q^n$, $n = 1, 2, \ldots$, называющийся, как известно, *бесконечной геометрической прогрессией*, сходится.

Действительно,

$$s_n = q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q - q^{n+1}}{1-q} = \frac{q}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q},$$

и так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{1-q} = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{q}{1-q}.$$

2. Ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$$

с членами

$$u_n = (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

расходится.

В самом деле, в этом случае

$$s_{2k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$
$$s_{2k+1} = 1, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

поэтому последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ не имеет предела.

35.2. Свойства сходящихся рядов

Теорема 1. *Пусть c — комплексное число. Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

сходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n,$$

называемый произведением данного ряда на число, также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.6}$$

Эта теорема означает, что числовой множитель «можно выносить за скобку» и в случае бесконечного числа слагаемых, если они образуют сходящийся ряд. «Можно» в том смысле, что справедливо равенство (35.6).

Доказательство. Пусть

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{и} \quad s_n' = \sum_{k=1}^{n} cu_k,$$

тогда, очевидно,

$$s_n' = cs_n. \tag{35.7}$$

По условию $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ существует, поэтому в силу (35.7) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n'$ также существует и

$$\lim_{n\to\infty} s_n' = c \lim_{n\to\infty} s_n,$$

это и есть равенство (35.6).

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

сходятся, тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n),$$

называемый суммой данных рядов, также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\sum_{n=1}^{\infty}v_n. \tag{35.8}$$

Эта теорема означает, что сходящиеся ряды «можно складывать почленно» (n-й член с n-м), «можно» в том смысле, что справедливо равенство (35.8).

Доказательство. Пусть

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\quad s_n'=\sum_{k=1}^{n}v_k \quad\text{и}\quad \sigma_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k+v_k),$$

тогда

$$\sigma_n=s_n+s_n',$$

и так как $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}s_n'$ по условию существуют, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$ также существует и

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}(s_n+s_n')=\lim_{n\to\infty}s_n+\lim_{n\to\infty}s_n',$$

это и есть равенство (35.8).

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если ряд сходится, то любой его остаток сходится. Если какой-либо остаток ряда* (35.1) *сходится, то и сам ряд также сходится.*

Доказательство. Пусть

$$s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n,\quad n=1,2,\ldots,$$

— частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, а

$$s_k^{(m)}=u_{m+1}+\ldots+u_{m+k}$$

— частичные суммы его m-го остатка

$$u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots+u_{m+k}+\ldots.$$

Очевидно, что

$$s_n=s_m+s_k^{(m)},\quad n=m+k, \tag{35.9}$$

откуда при фиксированном m следует, что предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n$$

существует тогда и только тогда, когда существует

$$\lim_{k\to\infty} s_k^{(m)}.$$

Иначе говоря, ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится его некоторый остаток. Поскольку натуральное число m было произвольно, то теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что отбрасывание или добавление конечного числа членов к данному ряду не влияет на его сходимость.

Заметим, что, употребляя обозначение (35.4) суммы сходящегося ряда и обозначение (35.5) суммы остатка сходящегося ряда и переходя к пределу при $k\to\infty$ в равенстве (35.9), получим

$$s = s_m + r_m.$$

35.3. Критерии сходимости рядов

Критерий Коши для сходимости последовательностей может быть легко перефразирован для рядов.

Действительно, как известно (см. п. 3.3), для того чтобы последовательность $\{s_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_ε, что

$$|s_{n+p} - s_{n-1}| < \varepsilon$$

для любых номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и любых целых $p \geqslant 0$ (для удобства использования этого критерия в случае рядов мы здесь пишем разность $s_{n+p} - s_{n-1}$ вместо разности $s_{n+p} - s_n$, которую писали раньше в п. 3.2. Это, конечно, не влияет на суть дела).

Если теперь последовательность $\{s_n\}$ является последовательностью частичных сумм ряда (35.1), то

$$s_{n+p} - s_{n-1} = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p},$$

и сформулированный критерий в этих обозначениях принимает следующий вид.

Теорема 4 (критерий Коши). *Для того чтобы ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* n_ε, *что*

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon \tag{35.10}$$

при любом $n \geqslant n_\varepsilon$ *и любом целом* $p \geqslant 0$.

Теорема 5 (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{35.11}$$

Действительно, в этом случае неравенство (35.10) выполняется для любого $p \geqslant 0$ и, в частности, для $p = 0$. Поэтому

$$|u_n| < \varepsilon$$

для всех $n \geqslant n_\varepsilon$, а это в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Примеры. 1. Бесконечная геометрическая прогрессия

$$q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$$

при $|q| \geqslant 1$ расходится, ибо ее n-й член $u_n = q^n$ не стремится к нулю:

$$|u_n| = |q|^n \geqslant 1.$$

2. Рассмотрим так называемый *гармонический ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots .$$

Здесь n-й член $u_n = \frac{1}{n}$ стремится к нулю при $n \to \infty$, но ряд расходится. Действительно, для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} >$$

$$> \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \tag{35.12}$$

т. е. для любого n при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $p = n - 1$ неравенство (35.10) не выполняется.

Таким образом, из критерия Коши следует, что гармонический ряд расходится. Этот пример показывает, что условие (35.11), являясь необходимым для сходимости ряда, не является вместе с тем достаточным.

35.4. Критерии сходимости рядов с неотрицательными членами. Метод выделения главной части n-го члена ряда

В этом пункте займемся исследованием сходимости рядов, все члены которых неотрицательны и, значит, заведомо вещественны.

Теорема 6. *Пусть все члены ряда* (35.1) *неотрицательны:*

$$u_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.13}$$

тогда для того чтобы ряд (35.1) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху, причем если* s *— сумма ряда, а* s_n, $n = 1, 2, \ldots$, *— его частичные суммы, то*

$$\sup_{n=1, 2, \ldots} s_n = s. \tag{35.14}$$

Доказательство. Если ряд (35.1) сходится, т. е. если последовательность его частичных сумм сходится, то эта последовательность, как всякая сходящаяся последовательность, ограничена (см. п. 3.2 и п. 23.1). Однако в общем случае условие ограниченности частичных сумм ряда, как показывает уже пример 2, разобранный в п. 35.1, не является достаточным для сходимости ряда.

Если же выполнено условие (35.13), то

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_n = s_n + u_{n+1} \geqslant s_n,$$

т. е. последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ в этом случае является монотонно возрастающей последовательностью, и потому она сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху. Кроме того, если

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

то

$$s = \sup_{n=1\ 2\ldots} s_n.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 6 следует, что если ряд с членами (35.13) расходится, то последовательность его частичных сумм не ограничена сверху и в силу ее монотонности

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty.$$

Поэтому для расходящихся рядов с неотрицательными членами, согласно сделанному в п. 35.1 соглашению, пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty.$$

Доказанная теорема по своей формулировке внешне напоминает соответствующие теоремы для несобственных интегралов (см. п. 33.3 и 34.3). Между сходимостью рядов с неотрицательными членами и несобственных интегралов от неотрицательных функций можно иногда установить и более непосредственную связь. Именно, если для данного ряда (35.1) с неотрицательными членами удается подобрать функцию $f(x)$, определенную при $x \geqslant 1$ и такую, что $f(n) = u_n$, то при определенных условиях из сходимости или расходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

можно судить и о сходимости или расходимости ряда (35.1).

Теорема 7 (интегральный признак сходимости рядов). *Если функция $f(x)$, определенная при всех $x \geqslant 1$, неотрицательна и монотонно убывает, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad (35.15)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (35.16)$$

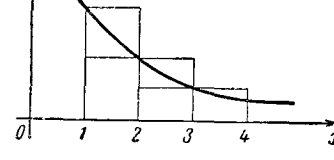


Рис. 112

Доказательство. Если $k \leqslant x \leqslant k+1$, то тогда в силу монотонного убывания функция $f(x)$ (рис. 112)

$$f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и поэтому

$$f(k) \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geqslant f(k+1), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Суммируя эти неравенства от $k = 1$ до $k = n$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k+1),$$

и, полагая

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

получим

$$s_n \geqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx \geqslant s_{n+1} - f(1), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{35.17}$$

Если интеграл (35.16) сходится, то в силу теоремы 1 п. 34.3 при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Отсюда и из неравенства (35.17) следует, что

$$s_{n+1} \leqslant f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx,$$

т. е. последовательность частичных сумм ряда (35.15) ограничена сверху, а значит, согласно предыдущей теореме, этот ряд сходится.

Если теперь ряд (35.15) сходится и его сумма равна s, то, согласно той же теореме, $s_n \leqslant s$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, и, значит, в силу неравенства (35.17) для всех $n = 1, 2, \ldots$,

$$\int_1^{+1} f(x)\,dx \leqslant s.$$

Если теперь $\xi \geqslant 1$, то, беря n так, чтобы $n \geqslant \xi$, получим в силу неотрицательности функции f

$$\int_1^{\xi} f(x)\,dx \leqslant \int_1^{n} f(x)\,dx \leqslant s.$$

Итак, совокупность всех интегралов $\int_1^{\xi} f(x)\,dx$, $\xi \geqslant 1$, ограничена сверху, а потому интеграл (35.16) сходится (см. теорему 1 п. 34.3).

Теорема доказана.

Эта теорема часто существенно облегчает исследование сходимости рядов, так как, если для данного ряда удается подобрать соответствующую функцию f, а значит, свести вопрос об изучении сходимости ряда к изучению сходимости интеграла, то это дает возможность применить развитый в предшествующей главе аппарат интегрального исчисления.

В качестве примера рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots \tag{35.18}$$

с n-м членом

$$u_n=\frac{1}{n^{\alpha}}, \quad n=1, 2, \ldots.$$

В данном случае функция $f(x)$, указанная в теореме, подбирается легко:

$$f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}, \quad x \geqslant 1.$$

И так как интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$, то и ряд (35.18) сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. В случае $\alpha=1$ ряд (35.18) является гармоническим рядом, расходимость которого была установлена в предыдущем пункте. Получим теперь из теоремы 7 простое следствие, удобное, однако, часто в приложениях.

Если существует такое натуральное n_0, что функция $f(x)$ монотонно убывает при $x \geqslant n_0$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$. Этот случай сводится к рассмотренному в теореме 7 заменой переменного $x=y+n_0-1$.

Упражнение 1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$.

Перейдем теперь к признакам сравнения для рядов, также по своей форме весьма напоминающих соответствующие признаки сходимости для несобственных интегралов.

Теорема 8 (признак сравнения). *Пусть*

$$u_n \geqslant 0, \quad v_n \geqslant 0, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{35.19}$$

и

$$u_n=O(v_n)^{*}). \tag{35.20}$$

*) В частности, $u_n \leqslant v_n$ (объяснение обозначения «O» см. в п. 23.2).

Тогда, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{35.21}$$

сходится, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{35.22}$$

а если ряд (35.22) *расходится, то расходится и ряд* (35.21).

Доказательство. Пусть выполнено условие (35.20), тогда существует такое $c > 0$, что

$$u_k \leqslant cv_k, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{35.23}$$

Если теперь ряд (35.21) сходится, то, согласно теореме 6, последовательность $\{s_n\}$ его частичных сумм ограничена, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant M, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{35.24}$$

Обозначим через σ_n частичную сумму ряда (35.22). Тогда в силу неравенств (35.23) и (35.24)

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant c \sum_{k=1}^{n} v_k = cs_n \leqslant cM, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Согласно теореме 6, из ограниченности сверху частичных сумм ряда (35.22) следует его сходимость. Итак, если ряд (35.21) сходится, то ряд (35.22) также сходится.

Если же ряд (35.22) расходится, то и ряд (35.21) расходится, так как если бы он сходился, то по доказанному сходился бы и ряд (35.22), что противоречит условию.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $v_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \tag{35.25}$$

тогда:

1) *если ряд* (35.21) *сходится и* $0 \leqslant k < +\infty$, *то и ряд* (35.22) *также сходится;*

2) *если ряд* (35.21) *расходится и* $0 < k \leqslant +\infty$, *то и ряд* (35.22) *также расходится.*

В частности, если

$$u_n \sim v_n$$

(u_n *и* v_n *эквивалентны, см. п.* 23.2), *то ряды* (35.21) *и* (35.22) *сходятся или расходятся одновременно.*

Из выполнения условия (35.25) для $0 \leqslant k < +\infty$ следует существование такого n_0, что если $n \geqslant n_0$, то

$$\frac{u_n}{v_n} < k+1, \quad \text{т. е.} \quad u_n < (k+1)\, v_n,$$

а это означает, что

$$u_n = O(v_n).$$

Поэтому утверждение 1 следствия непосредственно вытекает из утверждения 1 теоремы.

Из выполнения условия (35.25) для $0 < k \leqslant +\infty$ следует, что для каждого k', такого, что $0 < k' < k$, существует номер $n_0 = n_0(k')$, обладающий тем свойством, что если $n \geqslant n_0$, то

$$\frac{u_n}{v_n} > k',$$

т. е.

$$v_n < \frac{1}{k'}\, u_n,$$

а это означает, что

$$v_n = O(u_n).$$

Поэтому утверждение 2 следствия непосредственно вытекает из утверждения 2 теоремы.

Примеры. 1. Пусть

$$u_n = \frac{\sin^2 n\alpha}{2^n}.$$

Тогда

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

сходится (см. п. 35.1), то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{2^n}.$$

2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$$

расходится, ибо

$$\frac{1}{1+\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

как мы видели (см. исследование ряда (35.18)), расходится.

Эффективность использования критерия сравнения для исследования сходимости ряда зависит, конечно, от запаса «рядов сравнения», т. е. рядов, о которых мы уже знаем, сходятся они или расходятся, и которые тем самым мы можем пытаться использовать для исследования сходимости данного ряда с помощью признака сравнения.

Если в качестве «ряда сравнения» (35.21) взять ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},$$

про который мы уже знаем, при каких α он сходится, то из теоремы 8 непосредственно следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 9. *Пусть* $u_n \geqslant 0$, $n=1, 2, \ldots$. *Тогда, если*

$$u_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \text{ и } \alpha > 1,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{35.26}$$

сходится, если же

$$\frac{1}{n^{\alpha}} = O(u_n) \text{ и } \alpha \leqslant 1,$$

то ряд (35.26) *расходится.*

Следствие. *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} u_n = k,$$

тогда:

1) *если* $\alpha > 1$ *и* $0 \leqslant k < +\infty$, *то ряд* (35.26) *сходится;*

2) *если* $\alpha \leqslant 1$ *и* $0 < k \leqslant +\infty$, *то ряд* (35.26) *расходится.*

В частности, если

$$u_n \sim \frac{1}{n^{\alpha}},$$

то ряд (35.26) *сходится при* $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha \leqslant 1$.

Если члены u_n ряда (35.26) заданы с помощью формул, имеющих смысл для всех вещественных значений n, и, более того, являются «достаточно гладкими» функциями этого параметра, то для практического применения теоремы 9 обычно бывает целесообразно разложить член u_n с помощью формулы Тейлора по степени переменной $\frac{1}{n}$.

Если главный член получившегося разложения будет иметь вид $\frac{c}{n^\alpha}$ то, беря в качестве ряда сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ и применив теорему 9, определим, сходится данный ряд или расходится.

В известном смысле можно сказать, что этот метод исследования сходимости ряда является наиболее удобным и вместе с тем достаточно общим.

Примеры. Исследуем сходимость рядов, общие члены u_n которых задаются нижеуказанными формулами.

1) $u_n = 1 - \cos \frac{\pi}{n}$.

Очевидно, $u_n > 0$. Так как

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0,$$

и, следовательно,

$$u_n = 1 - \left[1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

то в силу теоремы 9 ряд с общим членом u_n сходится.

2) $u_n = \ln \cos \frac{1}{n}$.

Здесь $u_n < 0$. Вспоминая, что

$$\ln(1 + x) = x + o(x), \quad x \to 0,$$

получим

$$u_n = \ln \cos \frac{1}{n} = \ln \left[1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left[-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Отсюда

$$-u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

и потому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-u_n),$$

а значит, и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

сходятся.

3) $u_n=\ln\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$, $n=3, 4, \ldots$.

Имеем $u_n\geqslant 0$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{\pi}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, поэтому

$$u_n=\ln\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)-\ln\left(1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$=2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}+o\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)=\frac{2\pi}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом,

$$u_n\sim\frac{2\pi}{n};$$

так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{n}$$

расходится, то расходится и ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}.$$

Может, конечно, случиться, что с помощью теоремы 9 довольно сложно установить, сходится или расходится ряд, а с помощью какого-нибудь другого приема это сделать значительно проще; примером такого ряда является ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}. \tag{35.26}$$

Этот ряд легко можно исследовать с помощью интегрального признака сходимости: из того, что интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t}$$

расходится, следует, что и ряд (35.26) расходится.

Иногда оказываются полезными некоторые специальные признаки сходимости ряда. Отметим среди них так называемый признак Даламбера*) и признак Коши, непосредственно получающиеся из признака сравнения, если в качестве ряда сравнения взять соответствующим образом выбранную геометрическую прогрессию.

Теорема 10 (признак Даламбера). *Пусть дан ряд с положительными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.27}$$

тогда:

1) *если существуют такое число* q, $0 < q < 1$, *и такой номер* n_0, *что*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q \text{ для всех } n \geqslant n_0,$$

то данный ряд сходится;

2) *если существует такой номер* n_0, *что*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \text{ для всех } n \geqslant n_0,$$

то данный ряд расходится.

Доказательство. Пусть $0 < q < 1$ и пусть существует такой номер n_0, что при $n \geqslant n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q,$$

т. е.

$$u_{n+1} \leqslant q u_n.$$

*) Ж. Даламбер (1717—1783) — французский философ и математик.

Тогда

$$u_{n_0+1} \leqslant u_{n_0} q,$$

$$u_{n_0+2} \leqslant u_{n_0+1}\, q \leqslant u_{n_0} q^2,$$

. . . . . .

$$u_{n_0+p} \leqslant u_{n_0+p-1}\, q \leqslant \ldots \leqslant u_{n_0} q^p,$$

. . . . . .

и так как ряд

$$u_{n_0} q + u_{n_0} q^2 + \ldots + u_{n_0} q^p + \ldots$$

сходится, являясь геометрической прогрессией со знаменателем q $(0 < q < 1)$, то по признаку сравнения сходится и ряд

$$u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \ldots + u_{n_0+p} + \ldots,$$

а значит, и весь ряд (35.27).

Если же существует такое n_0, что

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \text{ для всех } n \geqslant n_0,$$

то

$$u_{n_0+1} \geqslant u_{n_0},$$

$$u_{n_0+2} \geqslant u_{n_0+1} \geqslant u_{n_0},$$

. . . . . .

и так как по предположению $u_{n_0} > 0$, то n-й член ряда, будучи ограничен снизу положительной постоянной, не стремится к нулю. Следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда (см. теорему 5 этого параграфа), и потому ряд (35.27) расходится.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть существует*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Тогда, если $l < 1$, *то ряд* (35.27) *сходится, а если* $l > 1$, *то ряд* (35.27) *расходится.*

Это вытекает непосредственно из доказанной теоремы.

В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{35.28}$$

Здесь

$$u_n = \frac{1}{n!} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

поэтому, согласно следствию теоремы 10, данный ряд сходится.

Теорема 11 (признак Коши). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.29}$$

тогда:

1) *если существуют такое* q, $0 < q < 1$, *и такое* n_0, *что*

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant q \text{ для всех } n \geqslant n_0,$$

то данный ряд сходится;

2) *если существует такой номер* n_0, *что*

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1 \text{ для всех } n \geqslant n_0,$$

то данный ряд расходится.

Доказательство. Если при $n \geqslant n_0$

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant q,$$

т. е.

$$u_n \leqslant q^n,$$

то по признаку сравнения ряд (35.29) сходится, ибо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ при $0 < q < 1$ сходится.

Если же

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1, \quad n \geqslant n_0,$$

то $u_n \geqslant 1$, и, значит, ряд (35.29) расходится (см. теорему 5).

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть существует*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Тогда, если $l < 1$, *то ряд* (35.29) *сходится, а если* $l > 1$, *то ряд расходится.*

Доказательство следствия очевидно.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}. \tag{35.30}$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

то, согласно следствию теоремы 11, ряд (35.30) сходится.

Сходимость ряда (35.30) легко устанавливается и с помощью следствия из теоремы 9.

35.5. Знакопеременные ряды

В этом пункте рассматриваются ряды с вещественными членами, знаки которых, вообще говоря, изменяются при изменении номера; такие ряды называются *знакопеременными рядами*.

Рассмотрим прежде всего так называемые знакочередующиеся ряды, т. е. ряды, члены которых поочередно то положительны, то отрицательны.

Теорема 12 (Лейбниц). *Если*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{35.31}$$

и

$$u_n \geqslant u_{n+1} > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.32}$$

то знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \tag{35.33}$$

сходится.

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы четного порядка ряда (35.33):

$$s_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} u_n.$$

Их можно записать в виде

$$s_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2k-1} - u_{2k}), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

В силу условия (35.32) выражения в круглых скобках неотрицательны и потому $s_{2k} \leqslant s_{2(k+1)}$, т. е. последовательность частичных сумм четного порядка ряда (35.33) монотонно возрастает.

Замечая, что частичные суммы s_{2k} можно записать также и в виде

$$s_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и что выражения в круглых скобках в силу условия (35.32) неотрицательны, а $u_{2k} > 0$, получаем, что $s_{2k} < u_1$, т. е. последовательность $\{s_{2k}\}$ ограничена сверху.

Из монотонного возрастания и ограниченности сверху последовательности $\{s_{2k}\}$ следует, что она сходится.

Пусть

$$\lim_{k \to \infty} s_{2k} = s. \tag{35.34}$$

Покажем, что и частичные суммы нечетного порядка ряда (35.33) стремятся к тому же пределу. Действительно,

$$s_{2k+1} = s_{2k} + u_{2k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{35.35}$$

и так как, согласно (35.31),

$$\lim_{k \to \infty} u_{2k+1} = 0,$$

то в силу (35.34) и (35.35) имеем

$$\lim_{k \to \infty} s_{2k+1} = s. \tag{35.36}$$

Из (35.34) и (35.36) следует, что

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s.$$

Теорема доказана.

Заметим, что для рядов вида (35.33) справедливо неравенство

$$s_{2k} \leqslant s \leqslant s_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{35.37}$$

Действительно, с одной стороны, мы уже видели, что s является пределом монотонно возрастающей последовательности $\{s_{2k}\}$, поэтому $s_{2k} \leqslant s$.

С другой стороны,

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} - (u_{2k} - u_{2k+1}) \leqslant s_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

т. е. последовательность $\{s_{2k-1}\}$ монотонно убывает, и так как s является пределом и последовательности $\{s_{2k-1}\}$ (см. 35.34), то

$$s \leqslant s_{2k-1}.$$

Следствие. *Любая частичная сумма s_n ряда* (35.31) *отличается от его суммы s на величину, меньшую следующего члена u_{n+1},*

иначе говоря, абсолютная величина остатка ряда в этом случае не превышает абсолютной величины его первого члена, т. е

$$|r_n| = |s - s_n| \leqslant u_{n+1}.$$

Действительно, из неравенства (35.37) следует, что

$$s - s_{2k} \leqslant s_{2k+1} - s_{2k} = u_{2k+1},$$

$$s_{2k-1} - s \leqslant s_{2k-1} - s_{2k} = u_{2k},$$

$$k = 1, 2, \ldots.$$

Следствие доказано.

В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \tag{35.38}$$

Его члены удовлетворяют, очевидно, условиям теоремы 12, и потому он сходится. Замечая, что у него $s_1 = 1$ и $s_2 = \frac{1}{2}$, для его суммы s имеем оценку

$$\frac{1}{2} \leqslant S \leqslant 1. \tag{35.39}$$

На ряды переносятся не все свойства конечных сумм. Поясним это на примере того же ряда (35.38).

Если

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots, \tag{35.40}$$

то

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots;$$

сложив этот ряд с рядом (35.40), получим

$$\frac{3}{2} S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{8} + \ldots, \tag{35.41}$$

т. е. ряд, составленный из тех же членов, что и данный ряд (35.40), взятых только в несколько другом порядке, поэтому

$$\frac{3}{2} S = S,$$

откуда следует, что $S = 0$, что противоречит (35.39).

Несмотря на кажущуюся очевидность законности наших рассуждений, мы где-то сделали грубую ошибку. Где? Подробный анализ этого будет дан в одном из следующих пунктов.

35.6. Абсолютно сходящиеся ряды. Использование абсолютно сходящихся рядов для исследования сходимости произвольных рядов

В этом пункте снова изучаются ряды, члены которых, вообще говоря, комплексные числа.

Определение 4. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{35.42}$$

называется абсолютно сходящимся, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \tag{35.43}$$

сходится.

Применяя критерий Коши сходимости ряда к ряду (35.43), получим: *для того чтобы ряд* (35.42) *абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* n_ε, *что если* $n \geqslant n_\varepsilon$, *то*

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

для любого целого $p \geqslant 0$.

Примеры. 1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} \sin \frac{\pi n}{n+1}$$

абсолютно сходится, ибо

$$\left| \frac{i^n}{2^n} \sin \frac{\pi n}{n+1} \right| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится.

2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

как мы знаем, сходится, однако не абсолютно, ибо ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е. гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

расходится.

Теорема 13. *Если ряд абсолютно сходится, то он и просто сходится.*

Доказательство. Пусть ряд (35.42) абсолютно сходится, т. е. ряд (35.43) сходится; тогда в силу необходимости выполнения условия Коши для сходимости ряда (см. теорему 4), для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε, что если $n \geqslant n_\varepsilon$, то

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

для любого целого $p \geqslant 0$.

Отсюда и из неравенства $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|$ следует, что $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$ для любого $n \geqslant n_\varepsilon$ и любого $p = 1, 2, \ldots$. А это и означает в силу достаточности выполнения условия Коши для сходимости ряда, что ряд (35.42) сходится.

Теорема доказана.

Обозначим теперь через

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* \tag{35.44}$$

ряд, составленный из тех же членов, что и ряд (35.42), но взятых, вообще говоря, в другом порядке.

Теорема 14. *Если ряд* (35.42) *абсолютно сходится, то ряд* (35.44) *также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.*

Доказательство. Пусть ряд (35.42) абсолютно сходится, т. е. сходится ряд (35.43), и пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \tilde{s}.$$

Обозначим частичные суммы ряда (35.43) через $\tilde{s}_n$, тогда (см. п. 35.4)

$$\tilde{s}_n \leqslant \tilde{s}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{35.45}$$

Какова бы ни была частичная сумма $\tilde{s}_m^*$ ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} |u_m^*|, \tag{35.46}$$

найдется номер $n = n(m)$, такой, что все члены ряда (35.46), входящие в сумму $\tilde{s}_m^*$, имеют в ряде (35.43) номера, не превышающие n, поэтому

$$\tilde{s}_m^* \leqslant s_n^*,$$

где $n = n(m)$, $m = 1, 2, \ldots$.

Следовательно (см. (35.45)),

$$\widetilde{s}_m^* \leqslant \widetilde{s}, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда и следует сходимость ряда (35.46), т. е. абсолютная сходимость ряда (35.44).

Покажем теперь, что если

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s,$$

то и сумма ряда (35.44) также равна s.

Обозначим частичные суммы ряда (35.42) s_n. Пусть фиксировано $\varepsilon > 0$. Тогда в силу сходимости ряда (35.43) существует такой номер n_ε, что

$$\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ ; \tag{35.47}$$

следовательно, выполняется и неравенство

$$|s - s_{n_\varepsilon}| = \left|\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ . \tag{35.48}$$

Выберем, далее, номер m_ε так, чтобы частичная сумма $s^*_{m_\varepsilon}$ ряда (35.44) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (35.42), входящие в сумму s_{n_ε} (иначе говоря, номер m_ε таков, что все члены ряда (35.42) с номерами, не превышающими n_ε, имеют в ряде (35.44) номера, не превышающие m_ε).

Пусть $m \geqslant m_\varepsilon$. Положим

$$s^{**}_m = s^*_m - s_{n_\varepsilon}.$$

Из (35.47) следует, что

$$|s^{**}_m| \leqslant \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ . \tag{35.49}$$

Используя (35.48) и (35.49), получим при $m \geqslant m_\varepsilon$

$$|s - s^*_m| = |s - (s_{n_\varepsilon} + s^{**}_m)| \leqslant |s - s_{n_\varepsilon}| + |s^{**}_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} u^*_m = s.$$

Теорема доказана.

Теорема 15. *Если ряд* (35.42) *абсолютно сходится и c — какое-либо число, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$$

также абсолютно сходится.

Это следует из критерия Коши сходимости рядов и равенства

$$\sum_{k=n}^{n+p} |cu_k| = |c| \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|.$$

Теорема 16. *Если ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad и \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

абсолютно сходятся, тогда их сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$$

также абсолютно сходится.

Это следует из критерия Коши сходимости рядов и неравенства

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k + v_k| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k| + \sum_{k=n}^{n+p} |v_k|.$$

Теорема 17. *Если ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad и \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{35.50}$$

абсолютно сходятся, то ряд, полученный из всевозможных попарных произведений $u_n v_m$ членов этих рядов, расположенных в произвольном порядке, также абсолютно сходится. Если сумма этого ряда равна s, а суммы рядов (35.50) *равны соответственно s' и s'', т. е.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s', \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = s'',$$

то

$$s = s's''. \tag{35.51}$$

Доказательство. Составим следующую таблицу попарных произведений членов рядов (35.50).

Таблица 6

u_1v_1	u_1v_2	. . .	u_1v_n	. . .
u_2v_1	u_2v_2	. . .	u_2v_n	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
u_mv_1	u_mv_2	. . .	u_mv_n	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	

Составим из всех элементов этой таблицы какой-либо ряд

$$u_{n_1}v_{m_1}+u_{n_2}v_{m_2}+\ldots+u_{n_k}v_{m_k}+\ldots \tag{35.52}$$

и покажем, что он абсолютно сходится.

В силу абсолютной сходимости рядов (35.50) суммы

$$s^*=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \quad \text{и} \quad s^{**}=\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|$$

конечны. Рассмотрим частичные суммы $\widetilde{s}_k$ ряда, составленного из абсолютных величин ряда (35.52), т. е. ряда

$$|u_{n_1}v_{n_1}|+|u_{n_2}v_{n_2}|+\ldots+|u_{n_k}v_{n_k}|+\ldots. \tag{35.53}$$

Имеем

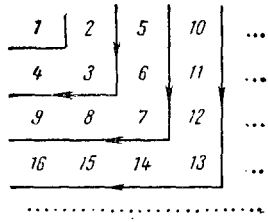
$$\widetilde{s}_k=|u_{n_1}v_{n_1}|+|u_{n_2}v_{n_2}|+\ldots+|u_{n_k}v_{n_k}|\leqslant$$

$$\leqslant(|u_{n_1}|+|u_{n_2}|+\ldots+|u_{n_k}|)(|v_{m_1}|+|v_{m_2}|+\ldots+|v_{m_k}|)\leqslant s^*s^{**}.$$

Таким образом, частичные суммы $\widetilde{s}_k$ ряда (35.53) ограничены в совокупности, и, значит, ряд (35.53) сходится, т. е. ряд (35.52) абсолютно сходится.

Для доказательства формулы (35.51) воспользуемся тем, что сумма ряда (35.52) в силу теоремы 14 не зависит от порядка его членов, и расположим их наиболее удобным для нас способом. Именно занумеруем произведения u_nv_m в порядке, показанном на нижесле-

дующей таблице, где на месте каждого произведения табл. 6 указан его порядковый номер:



В результате получим ряд

$$u_1v_1+u_1v_2+u_2v_2+u_2v_1+\ldots. \tag{35.54}$$

Обозначая через s_n' и s_n'' частичные суммы рядов (35.50), для частичных сумм s_{n^2}, $n=1, 2, \ldots$, ряда (35.54), очевидно, получим

$$s_{n^2}=s_n's_n''. \tag{35.55}$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} s_n'=s', \quad \lim_{n\to\infty} s_n''=s'', \quad \lim_{n\to\infty} s_{n^2}=s,$$

поэтому, переходя к пределу в равенстве (35.55) при $n\to\infty$, получим равенство (35.51).

Теорема доказана.

Теоремы этого пункта показывают, что свойства абсолютно сходящихся рядов во многом похожи на свойства конечных сумм: величина суммы такого ряда не зависит от порядка слагаемых, абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно и т. п. В следующем пункте будет доказано, что для сходящихся рядов, не сходящихся абсолютно, эти свойства не имеют места.

Замечание. В заключение этого пункта подчеркнем, что, когда члены ряда комплексные или вещественные, но меняющие знак, вопрос о сходимости этого ряда нельзя решить только с помощью определения порядка убывания n-го члена. Например, n-е члены рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

имеют одинаковый порядок при $n\to\infty$, однако первый ряд расходится, а второй сходится.

Более того, нетрудно привести пример двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, n-е члены которых эквивалентны:

$$u_n \sim v_n, \quad n=1, 2, \ldots,$$

из которых один сходится, а другой расходится.

В качестве таких рядов можно взять, например, ряд с n-м членом

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

и ряд с n-м членом

$$v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

С одной стороны, здесь

$$u_n \sim v_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ибо

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}} = 1 + \frac{(-1)^{n+1} n}{(n+1)\ln(n+1)},$$

и потому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1.$$

С другой стороны, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ есть ряд вида (35.33), поэтому он сходится. Ряд же $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится. В самом деле, если бы он сходился, то сходился бы и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},$$

т. е. ряд (35.26), который, как мы видели, расходится.

Было бы ошибкой, однако, считать, что метод выделения главной части годится лишь в случае вещественных рядов, члены которых имеют один и тот же знак. Метод выделения главной части может с успехом применяться для выяснения сходимости любых рядов.

Суть этого метода в рассматриваемом случае основана на следующем замечании: пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Если представить его члены в виде $u_n = v_n + w_n$, где ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (почему?). В силу этого для исследования сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ целесообразно попытаться представить его члены в виде $u_n = v_n + w_n$, так чтобы $w_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ при $\alpha > 1$. Тогда поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится (и даже абсолютно), то сходимость данного ряда сводится к исследованию сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Этот прием, конечно, целесообразен в том случае, если получившийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ проще поддается исследованию на сходимость, чем данный ряд (ср. с аналогичным исследованием сходимости интегралов в п. 34.4).

Например, для ряда с общим членом $u_n = \frac{(-1)^n n^2 + \ln^2 n}{n^2 \ln n}$, $n = 2, 3, \ldots$, беря $v_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$, а $w_n = \frac{\ln n}{n^2}$, получаем, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ сходится, ибо ряд из главных частей $\sum_{n=2}^{\infty} v_n$ сходится по признаку Лейбница, а для «остатков» имеем

$$w_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

откуда следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} w_n$.

35.7. Сходящиеся ряды, не сходящиеся абсолютно Признак Дирихле.

Если ряд сходится, но не абсолютно, то, как ниже будет показано, уже нельзя утверждать, что, переставив его члены в другом порядке, получим сходящийся к той же сумме ряд. Парадокс в конце п. 35.5 и объясняется этим обстоятельством: получившийся там ряд (35.41) отличается порядком членов

от данного сходящегося, но не абсолютно, ряда (35.38), и потому нельзя было утверждать, что его сумма также равна S. Более того, получившееся противоречие показывает, что это заведомо не так.

Итак, сумма ряда зависит от порядка слагаемых, т. е. коммутативный закон сложения не имеет места для неабсолютно сходящихся рядов.

Если в данном ряде сгруппировать каким-либо образом его члены, не нарушая их порядка, и сложить, то последовательность частичных сумм получившегося ряда будет являться подпоследовательностью частичных сумм исходного ряда. Поэтому если исходный ряд сходится, то будет сходиться и вновь полученный, причем суммы обоих рядов будут одинаковы. Однако если данный ряд расходится, то второй ряд может сходиться. Например, ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

расходится. Объединив же попарно его члены

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots,$$

получим сходящийся ряд. Таким образом, вообще для рядов неверен и ассоциативный закон сложения.

Рассмотрим некоторые свойства сходящихся, но не абсолютно, рядов с вещественными членами. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.56}$$

Обозначим через u_1^+, u_2^+, ..., u_n^+, ... его неотрицательные члены: $u_n^+ \geqslant 0$, а через $-u_1^-$, $-u_2^-$, ..., $-u_n^-$, ... его отрицательные члены: $u_n^- > 0$, взятые в том же порядке, в каком они расположены в ряде (35.56). Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+, \tag{35.57}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-. \tag{35.58}$$

Один из них, вообще говоря, может превратиться в конечную сумму.

Лемма 1. *Если ряд* (35.56) *сходится, но не абсолютно, то оба ряда* (35.57) *и* (35.58) *расходятся.*

Доказательство. Пусть ряд (35.56) сходится, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s, \tag{35.59}$$

где s_n — его частичные суммы, и пусть один из рядов (35.57) или (35.58) сходится, например, ряд (35.57). Обозначим его частичные

суммы через s_m^+, $m = 1, 2, \ldots$, а частичные суммы ряда (35.58) — через s_k^-, $k = 1, 2, \ldots$. В силу предположенной сходимости ряда (35.57)

$$\lim_{m\to\infty} s_m^+ = s^+ < +\infty. \tag{35.60}$$

Возможны два случая, либо ряд (35.58) сходится, либо он расходится. Если он сходится и

$$\lim_{k\to\infty} s_k^- = s^-, \tag{35.61}$$

то в силу того, что члены рядов (35.57) и (35.58) неотрицательны,

$$\begin{aligned} &s_m^+ \leqslant s^+, \quad m = 1, 2, \ldots, \\ &s_k^- \leqslant s^-, \quad k = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{35.62}$$

Всякая частичная сумма s_n ряда (35.56) может быть записана в виде

$$s_n = s_m^+ - s_k^-, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.63}$$

где m и k зависят, конечно, от n. Если обозначить через $\tilde{s}_n$ частичную сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \tag{35.64}$$

то в силу формулы (35.63) $\tilde{s}_n = s_m^+ + s_k^-$, поэтому, согласно (35.62),

$$\tilde{s}_n \leqslant s^+ + s^-,$$

т. е. частичные суммы ряда (35.64) ограничены, и, значит, ряд (35.64) сходится. Следовательно, ряд (35.56) абсолютно сходится , что противоречит условию леммы.

Рассмотрим вторую возможность, т. е. случай, когда ряд (35.57) сходится, а ряд (35.58) расходится; тогда (почему?)

$$\lim_{k\to\infty} s_k^- = +\infty. \tag{35.65}$$

В этом случае ряд (35.58) заведомо не превращается в конечную сумму, причем при $n\to\infty$ и $k\to\infty$. В силу же условия (35.60) последовательность $\{s_m^+\}$ сходится к конечному пределу, поэтому, переходя в формуле (35.63) к пределу при $n\to\infty$, в силу (35.59) и (35.65) получим в левой части равенства число s, а в правой — символ — ∞. Полученное противоречие показывает, что и второй случай невозможен.

Итак, ни один из рядов (35.57) и (35.58) не может сходиться в предположениях леммы, значит, оба они расходятся.

Лемма доказана.

Теорема 18 (Риман). *Если ряд* (35.56) *сходится, но не абсолютно, то, каково бы ни было число* A, *можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равной* A.

Доказательство. Снова рассмотрим ряды (35.57) и (35.58). Согласно лемме,

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^+ = +\infty, \tag{35.66}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^- = +\infty. \tag{35.67}$$

Пусть, для определенности, $A \geqslant 0$. Выберем число n_1 так, чтобы

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{n_1}^+ > A \tag{35.68}$$

и чтобы (при $n_1 > 1$)

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{n_1-1}^+ \leqslant A. \tag{35.69}$$

Существование номеров n_1, для которых выполняется условие (35.68), следует из условия (35.66); для того чтобы при этом выполнялось и условие (35.69), надо взять наименьший из этих номеров n_1.

Далее, выберем из ряда (35.58) n_2 первых членов так, чтобы

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- < A$$

и чтобы (при $n_2 > 1$)

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1-1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2-1}^- \geqslant A.$$

Существование такого номера n_2 доказывается исходя из (35.67) аналогично существованию номера n_1.

Далее, снова выберем подряд из ряда (35.57) члены до некоторого номера n_3 так, чтобы

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3}^+ > A$$

и (при $n_3 > n_1 + 1$)

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3-1}^+ \leqslant A.$$

Продолжая этот процесс дальше, получим ряд

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_s}^+ - u_{n_2+1}^- - \ldots - u_{n_t}^- + \ldots. \tag{35.70}$$

Для последовательности его частичных сумм

$$s_{n_1},\ s_{n_1+n_2},\ s_{n_2+n_3},\ \ldots,\ s_{n_k+n_{k+1}},\ \ldots,\ k=1,\ 2,\ \ldots,$$

в силу построения выполняются неравенства

$$s_{n_1}>A,\ \ s_{n_1+n_2}<A,\ \ s_{n_2+n_3}>A,\ \ \ldots,$$

причем отклонение от числа A каждой из указанных частичных сумм $s_{n_k+n_{k+1}}$ не превышает ее последнего члена:

$$\left|A-s_{n_k+n_{k+1}}\right|\leqslant u^{\pm}_{n_{k+1}},\tag{35.71}$$

где через $u^{\pm}_{n_{k+1}}$ обозначен член ряда (35.70) с номером n_{k+1}, наверху у него в ряде (35.70) стоит индекс «+» или «—».

В силу сходимости исходного ряда (35.56)

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0,$$

и так как при $k\to\infty$ номер члена $u^{\pm}_{n_{k+1}}$ в ряде (35.56) также стремится к ∞, то

$$\lim_{k\to\infty}u^{\pm}_{n_{k+1}}=0.$$

Поэтому из (35.71) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}s_{n_k+n_{k+1}}=A.\tag{35.72}$$

Если теперь взять любую частичную сумму s_n ряда (35.70), то в силу конструкции этого ряда всегда можно найти такой номер $k=k(n)$, что будет иметь место либо неравенство

$$s_{n_k+n_{k+1}}\leqslant s_n\leqslant s_{n_{k+1}+n_{k+2}},$$

либо неравенство

$$s_{n_k+n_{k+1}}\geqslant s_n\geqslant s_{n_{k+1}+n_{k+2}},$$

а потому из (35.72) следует, что и

$$\lim_{n\to\infty}s_n=A.$$

Теорема доказана.

Упражнение 2. Доказать, что если ряд (35.56) сходится, но не абсолютно, то можно так переставить его члены, что он будет расходиться (соответственно так, что его сумма будет равна $+\infty$, а также и так, что она будет равна $-\infty$).

В заключение этого параграфа дадим достаточный критерий для сходимости числовых рядов, пригодный и для рядов с комплексными числами.

Предварительно рассмотрим одно преобразование сумм вида

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n, \tag{35.73}$$

где a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — комплексные числа.

Положим

$$B_1 = b_1, \quad B_2 = b_1 + b_2, \quad \ldots, \quad B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

тогда

$$b_1 = B_1, \quad b_2 = B_2 - B_1, \quad \ldots, \quad b_n = B_n - B_{n-1}$$

и

$$S = a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \ldots + a_n (B_n - B_{n-1}).$$

Раскрывая скобки и группируя по-новому члены, получим

$$S = (a_1 - a_2) B_1 + (a_2 - a_3) B_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n) B_{n-1} + a_n B_n.$$

Таким образом, окончательно

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n. \tag{35.74}$$

Это преобразование сумм вида (35.73) называется *преобразованием Абеля**); оно является в известном смысле аналогом интегрирования по частям. Эта аналогия особенно бросается в глаза, если формулу (35.74) записать в виде

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \ B_i - B_{i-1}) = (a_n B_n - a_1 B_1) - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_i.$$

Докажем с помощью преобразования Абеля лемму.

Лемма 2 (неравенство Абеля). *Если*

$$a_i \geqslant a_{i+1} > 0, \ i = 1, 2, \ldots, n-1^{**}), \tag{35.75}$$

и

$$|b_1 + \ldots + b_i| \leqslant B, \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{35.76}$$

то

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leqslant B a_1.$$

---

*) Н. Абель (1802—1829) — норвежский математик.

**) Следовательно, числа a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — вещественны.

Действительно, согласно условию (35.75), $a_i - a_{i+1} \geqslant 0$, и поэтому в силу формулы (35.74) и условия (35.76)

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})|B_i| + a_n |B_n| \leqslant$$

$$\leqslant B\left[\sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) + a_n\right] = Ba_1.$$

Теорема 19 (признак Дирихле). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \tag{35.77}$$

такой, что последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает и стремится к нулю, а последовательность частичных сумм $\{B_n\}$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{35.78}$$

ограничена, тогда ряд (35.77) *сходится.*

Доказательство. В силу ограниченности последовательности $\{B_n\}$ существует такое число $B > 0$, что $|B_n| \leqslant B$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что для любого $n = 2, \ldots$ и любого целого $p \geqslant 0$

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} b_i\right| = |B_{n+p} - B_{n-1}| \leqslant 2B. \tag{35.79}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ следует существование такого номера n_ε, что

$$a_n < \frac{\varepsilon}{2B} \tag{35.80}$$

для всех $n \geqslant n_\varepsilon$.

Теперь, применяя неравенство Абеля к сумме

$$\sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i,$$

где $n \geqslant n_\varepsilon$, и учитывая неравенства (35.79) и (35.80), получим неравенство

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i\right| \leqslant 2Ba_n < \varepsilon,$$

откуда, согласно критерию Коши, и следует, что ряд (35.77) сходится.

Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}. \tag{35.81}$$

Прежде всего, если $\alpha \neq 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin k\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha \sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{35.82}$$

и поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

С другой стороны, последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ монотонно убывает и стремится к нулю. Поэтому при $\alpha \neq 2\pi m$ по признаку Дирихле ряд (35.81) сходится. При $\alpha = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, все члены ряда (35.81) равны нулю, и тем самым он также сходится.

Заметим, что признак Лейбница (см. п. 35.5) следует из признака Дирихле. Действительно, если в ряде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \tag{35.83}$$

где $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$, положить $b_n = (-1)^n$, то, очевидно, суммы $b_1 + \ldots + b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничены и, значит, по признаку Дирихле ряд (35.83) сходится.

Упражнение 3 Исследовать сходимость и абсолютную сходимость следующих рядов

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{-n}}{n^3+1}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n \ln n}{n^2}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1)$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)^p$.

10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{n+1}{n-1}$.

11. $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p \ln\frac{n-1}{n+1}$.

12. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}\right)$

§ 36. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

36.1. Сходимость функциональных последовательностей и рядов

В настоящем параграфе будут рассматриваться последовательности и ряды, членами которых являются некоторые, вообще говоря, комплекснозначные, функции; т. е. последовательности

$$f_n(x),\ n = 1, 2, \ldots, \tag{36.1}$$

и, соответственно, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \tag{36.2}$$

При каждом фиксированном значении аргумента x эти последовательности и ряды, очевидно, представляют собой уже рассматривавшиеся числовые последовательности и ряды.

Пусть E — некоторое множество элементов, в частности, множество точек прямой, плоскости или вообще n-мерного пространства, и пусть (36.1) — последовательность функций, которые определены на множестве E и значениями которых являются, вообще говоря, комплексные числа.

Определение 1. *Последовательность* (36.1) *называется ограниченной на множестве E, если существует такая постоянная $M > 0$, что*

$$|f_n(x)| \leqslant M$$

для всех $x \in E$ и всех $n = 1, 2, \ldots$. (Иногда в этом случае последовательность (36.1) называется также *равномерно ограниченной.*)

Определение 2. *Последовательность* (36.1) *называется монотонно убывающей (соответственно, монотонно возрастающей) на множестве E, если*

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$$

(соответственно если $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$) для всех $x \in E$ и всех $n = 1, 2, \ldots$.

Это определение, очевидно, предполагает, что функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, принимают вещественные значения.

Определение 3. *Последовательность* (36.1) *называется сходящейся в точке*[*] *$x_0 \in E$, если числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится.*

Последовательность (36.1) *называется сходящейся на множестве E, если она сходится в каждой точке множества E.*

Если

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in E,$$

то говорят, что последовательность (36.1) *сходится к функции $f(x)$, $x \in E$.*

Аналогичное определение можно дать и для ряда (36.2).

Определение 3′. *Ряд* (36.2) *называется сходящимся в точке $x_0 \in E$, если сходится числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0).$$

[*] Мы называем элементы множества E точками.

Ряд (36.2) *называется сходящимся на множестве* E, *если он сходится в каждой точке этого множества.*

Определение 4. *Ряд* (36.2) *называется абсолютно сходящимся на множестве* E, *если на множестве* E *сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|.$$

Подобно случаю числовых рядов сумма

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

называется *n-й частичной суммой* ряда (36.2); предел частичных сумм сходящегося на множестве E ряда (36.2) называется его *суммой* $s(x)$:

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

Ряд

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \tag{36.3}$$

называется *n-м остатком ряда*. Он сходится на E тогда и только тогда, когда на E сходится ряд (36.2). Если в этом случае сумму ряда (36.3) обозначить через $r_n(x)$, то

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x).$$

Как и для числовых рядов, каждому функциональному ряду (36.2) можно поставить в соответствие последовательность его частичных сумм

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

При этом каждая функциональная последовательность (36.1) окажется поставленной в соответствие некоторому ряду, для которого она будет последовательностью его частичных сумм. Члены этого ряда определяются однозначно:

$$u_1(x) = f_1(x), \quad u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \quad n = 2, \ldots.$$

Это обстоятельство дает возможность перефразировать всякую теорему, доказанную для функциональных рядов, в соответствующую теорему для функциональных последовательностей, и наоборот. Мы неоднократно будем использовать это обстоятельство.

Примеры. 1. Пусть дан ряд

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots, \tag{36.4}$$

z — комплексное число.

Исследуем его абсолютную сходимость, т. е. сходимость ряда с n-м членом

$$u_n=\frac{|z|^n}{n!}.$$

Применяя признак Даламбера, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1}=0$$

при любом комплексном z. Таким образом, ряд (36.4) абсолютно, а значит, и просто сходится при любом комплексном z, или, как обычно говорят, на всей комплексной плоскости.

2. Изучим сходимость ряда

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\ldots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\ldots, \tag{36.5}$$

x — вещественное число.

Этот ряд сходится при всех x. Действительно, если $x\neq 0$, то мы имеем геометрическую прогрессию со знаменателем

$$q=\frac{1}{1+x^2},\quad 0<q<1.$$

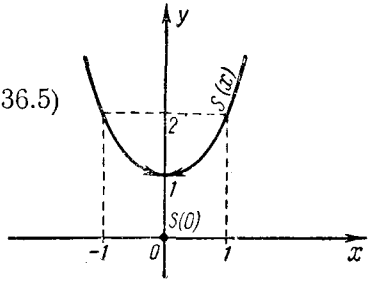


Рис. 113

И в этом случае сумма $s(x)$ ряда (36.5) легко вычисляется:

$$s(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2.$$

Если же $x=0$, то все члены ряда (36.5) равны нулю, поэтому он, очевидно, сходится и $s(0)=0$.

Таким образом,

$$s(x)=\begin{cases}0 & \text{для } x=0,\\ 1+x^2 & \text{для } x\neq 0.\end{cases}$$

График функции $s(x)$ изображен на рис. 113.

Как видно, несмотря на то, что все члены ряда (36.5) являются непрерывными функциями и ряд сходится во всех точках ве-

ществ енной оси, его сумма является разрывной функцией. Следовательно, в случае сходящихся рядов (36.2), членами которых являются непрерывные вещественные функции $u_n(x)$, их сумма $s(x)$, вообще говоря, не является непрерывной, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} s(x) \neq s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

или, что то же,

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

Таким образом, предел суммы бесконечного числа слагаемых необязательно равен сумме их пределов.

Рассмотренный ряд (36.5) показывает, как при естественных процессах (геометрическая прогрессия) из простых непрерывных функций возникают функции значительно более сложной природы — разрывные функции.

В дальнейшем мы выясним условия, при которых можно гарантировать непрерывность суммы сходящегося ряда непрерывных функций.

Упражнение 1. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^2}.$$

36.2. Равномерная сходимость последовательностей и рядов

Определение 5. *Пусть задана последовательность функций* (36.1) *и функция* f, *определенная на множестве* E. *Будем говорить, что указанная последовательность сходится к функции* f *равномерно на множестве* E, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* n_ε, *что если* $n \geqslant n_\varepsilon$, то

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \tag{36.6}$$

для всех $x \in E$.

Последовательность (36.1) *называется равномерно сходящейся на множестве* E, *если существует функция* f, *к которой она равномерно сходится на* E.

Очевидно, что если последовательность (36.1) равномерно сходится к функции f на множестве E, то она и просто сходится к этой функции на E.

Если последовательность $\{f_n\}$ сходится на множестве E к функции f, то мы будем это символически записывать следующим образом:

$$f_n \to f \text{ на } E.$$

Если же эта последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на E к функции f, то будем писать

$$f_n \rightrightarrows f \text{ на } E.$$

Заметим, что если последовательность (36.1) просто сходится к функции f на множестве E, то это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in E$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon; x)$, зависящий как от ε, так и от x, такой, что для всех номеров $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство (36.6).

Сущность равномерной сходимости последовательности функций состоит в том, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такой номер n_ε, зависящий только от заданного ε и не зависящий от

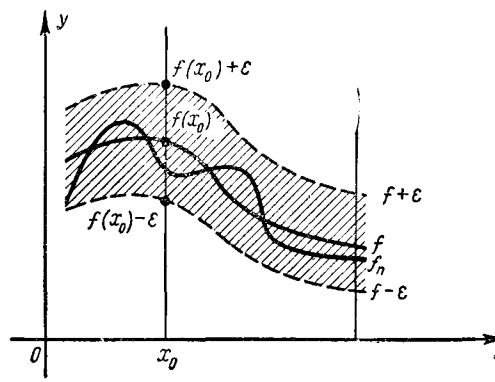


Рис. 114

выбора точки $x \in E$, что при $n \geqslant n_\varepsilon$ неравенство (36.6) будет выполняться всюду на множестве E, т. е. «графики» функций f_n будут расположены в «ε-полоске», окружающей график функции f (рис. 114).

Таким образом, в случае равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n (именно при $n \geqslant n_\varepsilon$) значения функций f_n дают приближенное значение функции f с погрешностью, меньшей ε, сразу на всем множестве E.

Примеры. 1. Последовательность

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \tag{36.7}$$

на отрезке $[0, q]$, $0<q<1$ сходится равномерно к функции, тождественно равной нулю на этом отрезке $[0, q]$.

Действительно, если $0 \leqslant x \leqslant q$, то

$$0 \leqslant x^n \leqslant q^n, \quad n=1, 2, \ldots. \tag{36.8}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, то для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε, что $q^n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$.

Отсюда в силу неравенства (36.8) $0 \leqslant x^n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in [0, q]$. Это означает, что $x^n \rightrightarrows 0$ на $[0, q]$, $0<q<1$.

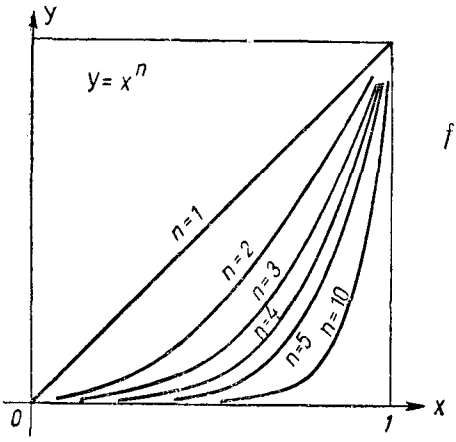


Рис. 115

2. Та же последовательность (36.7) на отрезке $[0; 1]$ сходится к функции

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ для } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 \text{ для } x = 1, \end{cases} \tag{36.9}$$

но уже неравномерно (рис. 115).

Формула (36.9) очевидна. Докажем, что последовательность (36.7) не сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$, Так как предельная функция в точке $x = 1$ делает скачок, равный 1, то естественно ожидать, что если взять $\varepsilon > 0$, не превышающий половины этого скачка, то уже не удастся найти такой номер n_ε, что при $n \geqslant n_\varepsilon$ на всем отрезке $[0, 1]$ будет выполняться неравенство

$$|x^n - f(x)| < \varepsilon. \tag{36.10}$$

Действительно, беря для функции $f_n(x) = x^n$ точку $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, получим

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Поэтому, если взять $\varepsilon < \frac{1}{2}$, то в этом случае заведомо не найдется номера n, для которого выполнялось бы неравенство (36.10) для всех $x \in [0, 1]$. А это и означает, что последовательность (36.7) на отрезке $[0, 1]$ не сходится равномерно.

Сформулируем и докажем критерий равномерной сходимости последовательности, обычно также называемый критерием Коши.

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости последовательностей). *Для того чтобы последовательность функций f_n, $n=1, 2, \ldots$, определенных на некотором множестве E, равномерно сходилась на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой номер n_ε, что для всех номеров $n\geqslant n_\varepsilon$, всех целых $p\geqslant 0$ и всех точек $x\in E$ выполнялось неравенство*

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon. \tag{36.11}$$

Доказательство необходимости. Пусть последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E. Тогда, согласно определению равномерной сходимости, существует функция f, такая, что для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ и всех $x\in E$

$$|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому если $n\geqslant n_\varepsilon$ и $p\geqslant 0$, то для всех $x\in E$

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$

Доказательство достаточности. Если выполнено условие (36.11), то при любом фиксированном $x\in E$ последовательность

$$f_n(x),\ n=1, 2, \ldots, \tag{36.12}$$

является числовой последовательностью, удовлетворяющей критерию Коши (см. п. 3.2), и потому сходится.

Обозначим предел последовательности (36.12) на множестве E через $f(x)$.

Покажем, что последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к функции f на множестве E. Действительно, в силу условия (36.11) для любого $\varepsilon>0$ существует такое n_ε, что для всех $n\geqslant n_\varepsilon$, всех целых $p\geqslant 0$ и всех $x\in E$

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{36.13}$$

Замечая, что $\lim\limits_{p\to\infty} f_{n+p}(x)=f(x)$, перейдем к пределу в неравенстве (36.13) при $p\to\infty$, тогда для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ и всех $x\in E$ получим

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

а это и означает, что

$$f_n \rightrightarrows f \text{ на } E.$$

Теорема доказана.

Часто бывает полезным следующее простое *достаточное условие равномерной сходимости* последовательностей.

Теорема 2 (признак Вейерштрасса). *Если существует такая числовая последовательность* $\{a_n\}$, *что*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad a_n \geqslant 0, \tag{36.14}$$

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant a_n \tag{36.15}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$ *и всех* $x \in E$, *то последовательность* $\{f_n\}$ *равномерно на* E *сходится к функции* f.

Доказательство. В силу условия (36.14) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что $a_n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$. Но тогда в силу условия (36.15)

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$, а это и означает равномерную сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f на множестве E.

Теорема доказана.

Для рядов, естественно, также можно ввести понятие равномерной сходимости.

Определение 6. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{36.16}$$

члены которого являются функциями, определенными на множестве E, *называется равномерно сходящимся на этом множестве, если последовательность его частичных сумм равномерно сходится на* E.

Таким образом, равномерная сходимость ряда (36.16) означает существование такой функции $s(x)$, что

$$s_n(x) \rightrightarrows s(x) \text{ на } E. \tag{36.17}$$

Поскольку из (36.17) следует, что $s_n(x) \to s(x)$ на E, то $s(x)$ является суммой ряда (36.16).

Положим

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x).$$

Тогда $s(x)-s_n(x)=r_n(x)$ и условие (36.17) можно переписать в эквивалентной форме:

$$r_n(x)\rightrightarrows 0 \text{ на } E, \tag{36.18}$$

откуда следует, что, *для того чтобы сходящийся на E ряд* (36.16) *равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|r_n(x)|=0. \tag{36.19}$$

Таким образом, из равномерной сходимости ряда, в частности, вытекает, что начиная с некоторого номера верхние грани

$$\sup_{x\in E}|r_n(x)|$$

конечны, а условие (36.19) сводит понятие равномерной сходимости ряда к стремлению к нулю числовой последовательности этих верхних граней. Докажем эквивалентность условий (36.18) и (36.19).

В самом деле, если имеет место (36.18), то для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n\geqslant n_\varepsilon$ и всех точек $x\in E$ выполняется неравенство

$$|r_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда для всех $n\geqslant n_\varepsilon$

$$\sup_{x\in E}|r_n(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

а это и означает выполнение условия (36.19).

Обратно, если выполнено условие (36.19), то для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n\geqslant n_\varepsilon$

$$\sup_{x\in E}|r_n(x)|<\varepsilon,$$

а значит, и подавно для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ и $x\in E$

$$|r_n(x)|<\varepsilon,$$

что и означает выполнение условия (36.18). Утверждение доказано.

Далее, замечая, что

$$s_{n+p}(x)-s_{n-1}(x)=\sum_{k=n}^{n+p}u_k(x),$$

из теоремы 1 получаем следующий критерий равномерной сходимости.

Теорема 3 (критерий Коши равномерной сходимости рядов). *Для того чтобы ряд* (36.16) *равномерно сходился на множестве* E, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *существовал такой номер* n_ε, *что для всех номеров* $n\geqslant n_\varepsilon$, *всех целых* $p\geqslant 0$ *и всех* $x\in E$ *выполнялось неравенство*

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right|<\varepsilon. \tag{36.20}$$

Следствие (необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Если ряд* (36.16) *равномерно сходится на множестве* E, *то*

$$u_n(x)\rightrightarrows 0 \text{ на } E. \tag{36.21}$$

Условие (36.21) получается из (36.20), если положить $p=0$.

Упражнение 2. Доказать, что условие (36.21) эквивалентно условию

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|u_n(x)|=0.$$

Упражнение 3. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ равномерно сходятся, то и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)+v_n(x)] \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} cu_n(x)$$

равномерно сходятся.

Часто бывает полезным следующий достаточный признак равномерной сходимости.

Теорема 4 (признак Вейерштрасса). *Пусть даны два ряда: функциональный* (36.16), *членами которого являются функции, определенные на множестве* E, *и числовой*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n,\ \alpha_n\geqslant 0,\ n=1,2,\ldots. \tag{36.22}$$

Если ряд (36.22) *сходится и*

$$|u_n(x)|\leqslant\alpha_n,\ n=1,2,\ldots, \tag{36.23}$$

то ряд (36.16) *абсолютно и равномерно сходится на множестве* E.

Абсолютная сходимость ряда (36.16) на E в случае сходимости ряда (36.22) сразу следует по признаку сравнения из неравенства (36.23).

Равномерная же сходимость этого ряда легко следует из теоремы 2 этого пункта. Мы, однако, приведем ее непосредственное доказательство.

Если ряд (36.22) сходится, то в силу критерия Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε, что $\sum_{k=n}^{n+p} a_k < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех целых $p \geqslant 0$. Отсюда и из (36.23) следует, что

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$.

Поэтому в силу критерия Коши для равномерной сходимости ряда (см. теорему 3) ряд (36.16) равномерно сходится на множестве E.

Примеры. 1. Рассмотрим снова (см. п. 36.1) ряд

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{36.4}$$

и покажем, что, каково бы ни было число $r > 0$, ряд (36.4) сходится равномерно в круге $|z| \leqslant r$. Как мы уже видели, ряд (36.4) сходится при любом комплексном z, в частности, при $z = r$, т. е. числовой ряд

$$1 + r + \frac{r^2}{2!} + \ldots + \frac{r^n}{n!} + \ldots$$

сходится. Беря его в качестве ряда сравнения (36.22) для ряда (36.4), имеем

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \frac{r^n}{n!}$$

при $|z| \leqslant r$. Поэтому наше утверждение о равномерной сходимости ряда (36.4) непосредственно следует из теоремы 4.

Покажем, что ряд (36.4) не сходится равномерно на всей комплексной плоскости. Это следует из невыполнения в данном случае необходимого условия равномерной сходимости ряда (см. следствие теоремы 3). Действительно, при любом фиксированном n_0

$$\lim_{|z| \to \infty} \left|\frac{z^{n_0}}{n_0!}\right| = +\infty. \tag{36.24}$$

Поэтому, если задано $\varepsilon > 0$, то, каково бы ни было n_0, в силу (36.24) можно подобрать z_0 так, чтобы

$$\left|\frac{z_0^{n_0}}{n_0!}\right| > \varepsilon,$$

т. е. $\frac{z^n}{n!}$ не стремится равномерно к нулю на всей комплексной плоскости.

2. Исследуем равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin nx}{\sqrt{1+n^2}\,(1+nx^2)}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{36.25}$$

Прежде всего заметим, что

$$\left| \frac{x \sin nx}{\sqrt{1+n^2}\,(1+nx^2)} \right| \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{1+n^2}\,(1+nx^2)}. \tag{36.26}$$

Далее, $1+nx^2 \geqslant 2|x|\sqrt{n}$ *), поэтому

$$\frac{|x|}{\sqrt{1+n^2}\,(1+nx^2)} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}\,(1+n^2)} \leqslant \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}. \tag{36.27}$$

И так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

сходится, то по признаку Вейерштрасса в силу неравенств (36.26) и (36.27) исходный ряд (36.25) равномерно сходится на всей вещественной оси.

3. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^5 x^2} \sin nx. \tag{36.28}$$

Очевидно,

$$|e^{-n^5 x^2} \sin nx| \leqslant n|x|e^{-n^5 x^2}.$$

Найдем максимум функции

$$v_n(x) = n|x|e^{-n^5 x^2}$$

при фиксированном n. Функция $v_n(x)$ четная, поэтому достаточно рассмотреть лишь $x \geqslant 0$ (почему?).

Производная $v_n'(x) = n(1-2n^5x^2)\,e^{-n^5 x^2}$ обращается в ноль в точке $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{\frac{5}{2}}}$. Поскольку $v_n(x) \geqslant 0$ для всех x $v_n(0) = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n(x) = 0$, то в точке x_0 функция $v_n(x)$ имеет максимум (почему?). Поэтому

$$v_n(x) \leqslant v_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,n^{\frac{5}{2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

*) Мы воспользовались здесь неравенством $2ab \leqslant a^2 + b^2$, которое сразу получается из очевидного неравенства $(a-b)^2 \geqslant 0$.

и так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд (36.28) равномерно сходится на всей вещественной оси.

Метод, примененный для исследования равномерной сходимости ряда (36.28) (исследования на экстремум модуля общего члена или его мажоранты методами дифференциального исчисления), является достаточно общим и часто применяется на практике. Этим методом можно было бы исследовать и равномерную сходимость ряда (36.25), однако примененный выше метод для исследования этого ряда значительно быстрее приводит к цели.

4. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}. \tag{36.29}$$

По признаку Лейбница (см. п. 35.5) этот ряд сходится при любом вещественном x и, как было отмечено там же, остаток ряда оценивается первым своим членом

$$|r_n(x)| < \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Из этого следует, что

$$r_n(x) \rightrightarrows 0 \text{ при } -\infty < x < +\infty,$$

т. е. ряд (36.29) равномерно сходится на всей вещественной оси.

Покажем, что этот ряд во всех точках не сходится абсолютно. Действительно, для любого x существует такое натуральное n_x, что $x^2 \leqslant n$ для всех $n \geqslant n_x$, поэтому

$$\frac{1}{x^2+n} \geqslant \frac{1}{2n} \text{ для всех } n \geqslant n_x.$$

А так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то в силу признака сравнения ряд (36.29) абсолютно не сходится.

Замечание. Признак Вейерштрасса дает лишь достаточное условие равномерной сходимости ряда, а отнюдь не необходимое. Например, ниже будет доказано, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

равномерно сходится на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (см. пример после теоремы 5). Однако, каков бы ни был числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, из не-

равенства $\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leqslant \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots, \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, следует, что $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]} \left|\frac{\sin nx}{n}\right| = \frac{1}{n} \leqslant \alpha_n$, и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ расходится. Поэтому в случае $u_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ не существует сходящегося числового ряда (36.22).

Докажем теперь достаточный признак равномерной сходимости, применимый в отличие от признака Вейерштрасса и к не абсолютно сходящимся рядам.

Теорема 5 (признак Дирихле). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x), \tag{36.30}$$

в котором функции $a_n(x)$ и $b_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, определены на множестве E и таковы, что

1) *последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонно убывает и равномерно стремится к нулю на множестве E;*

2) *последовательность частичных сумм $B_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

ограничена на множестве E.

Тогда ряд (36.30) *равномерно сходится на множестве E.*

Доказательство. В силу условия 2 теоремы существует такое $B > 0$, что $|B_n(x)| \leqslant B$ для всех $x \in E$ и всех $n = 1, 2, \ldots$, и поэтому

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x)\right| = |B_{n+p}(x) - B_{n-1}(x)| \leqslant |B_{n+p}(x)| + |B_{n-1}(x)| \leqslant 2B$$

для всех $x \in E$, всех $n = 2, 3, \ldots$, и всех целых $p \geqslant 0$.

Из условия же 1 теоремы следует, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что $0 \leqslant a_n(x) < \frac{\varepsilon}{2B}$ для всех $x \in E$ и всех $n \geqslant n_\varepsilon$.

Теперь, применяя неравенство Абеля (см. п. 35.7), получим, что

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x)\, b_k(x)\right| \leqslant 2Ba_n(x) < \varepsilon$$

для всех $x \in E$, всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех целых $p \geqslant 0$. Это и доказывает равномерную сходимость ряда (36.30).

Теорема доказана.

В качестве примера применения признака Дирихле рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Согласно этому признаку, этот ряд равномерно сходится на любом отрезке, не содержащем точек вида $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Действительно, последовательность $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, в данном случае является числовой последовательностью, она монотонно убывает и стремится к нулю (а значит, и равномерно стремится к нулю), а сумма

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

(см. п. 35.7), т. е. ограничены на указанном отрезке.

Упражнение 3. Исследовать сходимость, абсолютную сходимость и равномерную сходимость рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)\, x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}.$$

36.3. Свойства равномерно сходящихся рядов и последовательностей

Мы видели, что сумма сходящегося ряда непрерывных функций, вообще говоря, не является непрерывной функцией. Нижеследующая теорема дает достаточные условия непрерывности суммы ряда.

Теорема 6. *Если функции* $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, *непрерывны на множестве* $E \subset E^n$*) *и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

*) Здесь, как и везде, где не оговорено что-либо другое, мы рассматриваем комплекснозначные функции $u_n(x)$. О понятии непрерывности для таких функций см. в п. 23.2.

равномерно сходится на E, то его сумма

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

также непрерывна на E.

Доказательство. Выберем какую-либо точку $x_0\in E$ и докажем, что функция $s(x)$ непрерывна в этой точке. Зафиксируем какое-либо $\varepsilon>0$. Пусть

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\quad x\in E.$$

Согласно условию теоремы,

$$s_n(x)\rightrightarrows s(x)\text{ на }E,$$

поэтому существует такой номер n_ε, что

$$|s(x)-s_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{36.31}$$

для всех $x\in E$ и всех $n\geqslant n_\varepsilon$ и, в частности, для $n=n_\varepsilon$. Функция $s_{n_\varepsilon}(x)$ как сумма конечного числа непрерывных на E функций $u_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, n_\varepsilon$, непрерывна в точке $x_0\in E$. Поэтому существует $\delta=\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)>0$, такое, что для всех точек $x\in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x_0)<\delta$,

$$|s_{n_\varepsilon}(x)-s_{n_\varepsilon}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{36.32}$$

Теперь, замечая, что

$$s(x)-s(x_0)=[s(x)-s_{n_\varepsilon}(x)]+[s_{n_\varepsilon}(x)-s_{n_\varepsilon}(x_0)]+$$
$$+[s_{n_\varepsilon}(x_0)-s(x_0)]$$

(рис. 116), из неравенств (36.31) и (36.32) получим при $\rho(x, x_0)<\delta$ и $x\in E$

$$|s(x)-s(x_0)|<|s(x)-s_{n_\varepsilon}(x)|+|s_{n_\varepsilon}(x)-s_{n_\varepsilon}(x_0)|+|s_{n_\varepsilon}(x_0)-s(x_0)|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность функции $s(x)$ в точке x_0.

Теорема доказана.

Утверждению теоремы можно придать вид

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\lim_{x\to x_0}s(x)=s(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0).$$

И так как каждая функция $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, непрерывна в точке $x_0\in E$, то $u_n(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)$, поэтому

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x).$$

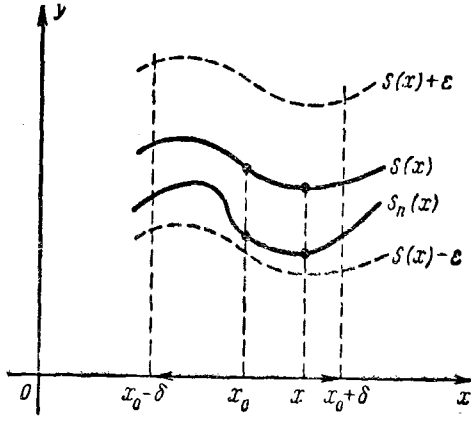


Рис. 116

Таким образом, в условиях теоремы 6 предел суммы ряда равен сумме пределов, т. е., как говорят, законен *почленный переход к пределу* в рассматриваемом ряде.

Сформулируем теорему 6 для последовательностей.

Теорема 6′. *Если функции* f_n, $n=1, 2, \ldots$, *непрерывны на множестве* $E\subset E^n$ *и* $f_n\rightrightarrows f$ *на* E, *то* f *непрерывна на* E.

Это означает, что для любой точки $x_0\in E$

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x),$$

т. е. пределы по n и по x можно переставлять.

Действительно, в силу теоремы 6′

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x).$$

Задача 18 (теорема Дини). Пусть функции f_n, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны и, монотонно убывая (или монотонно возрастая), стремятся на ограниченном замкнутом множестве $E \subset E^n$ к функции f.

Доказать, что, для того чтобы функция f была непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n\}$ сходилась на множестве E равномерно. Перефразировать этот результат для рядов.

Теперь рассмотрим вопросы почленного интегрирования и дифференцирования рядов. Поскольку производная и дифференциал определялись только в вещественной области, то, начиная отсюда, до конца этого параграфа, будем считать, что все рассматриваемые функции определены на вещественных промежутках и принимают вещественные значения.

Теорема 7. *Пусть функции* $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, *непрерывны на отрезке* $[a, b]$ *и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.33}$$

равномерно сходится на $[a, b]$, *тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)\, dt, \tag{36.34}$$

также равномерно сходится на $[a, b]$, *и если*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{36.35}$$

то

$$\int_a^x s(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)\, dt, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.36}$$

Если эту формулу переписать в виде

$$\int_a^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)\, dt,$$

то видно, что она означает законность в условиях теоремы 6 *почленного интегрирования ряда*.

Доказательство. В силу равномерной сходимости ряда (36.33), согласно теореме 6, функция $s(x)$ (см. (36.35)) непрерывна на отрезке $[a, b]$ и потому интегрируема на любом отрезке $[a, x]$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Покажем, что ряд (36.34) равномерно на отрезке $[a, b]$ сходится к функции

$$\int_a^x s(t)\, dt. \tag{36.37}$$

Пусть

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad \text{и} \quad r_n(x)=s(x)-s_n(x).$$

Тогда для любого $x\in[a, b]$ имеем

$$\left|\int_a^x s(t)\,dt-\sum_{k=1}^{n}\int_a^x u_k(t)\,dt\right| = \left|\int_a^x s(t)\,dt-\int_a^x\left[\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\right]dt\right| =$$

$$=\left|\int_a^x s(t)\,dt-\int_a^x s_n(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^x |s(t)-s_n(t)|\,dt =$$

$$=\int_a^x |r_n(t)|\,dt \leqslant \sup_{[a,\,x]}|r_n(t)|\int_a^x dt \leqslant$$

$$\leqslant (x-a)\sup_{[a,\,x]}|r_n(t)| \leqslant (b-a)\sup_{[a,\,b]}|r_n(x)|. \qquad (36.38)$$

Последовательность $\sup\limits_{[a,\,b]}|r_n(x)|$, $n=1, 2, \ldots$, является числовой последовательностью. В силу равномерной сходимости ряда (36.33)

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{[a,\,b]}|r_n(x)|=0$$

(см. п. 36.2), поэтому из неравенства (36.38), согласно признаку Вейерштрасса для равномерной сходимости последовательности, следует, что последовательность частичных сумм ряда (36.34) равномерно сходится к функции (36.37), а это и означает равномерную сходимость ряда (36.34) к функции (36.37). Теорема и, в частности, формула (36.36) доказаны.

Перефразируем полученный результат для последовательностей.

Теорема 7′. *Если последовательность непрерывных на отрезке* $[a, b]$ *функций* f_n, $n=1, 2, \ldots$, *равномерно на этом отрезке сходится к функции* f, *то*

$$\int_a^x f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{на} \quad [a, b],$$

в частности,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)\,dt=\int_a^x\left[\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right]dt.$$

Теорема 8. *Пусть функции $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и ряд, составленный из их производных*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{36.39}$$

равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. Тогда, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

сходится хотя бы в одной точке $c \in [a, b]$, то он сходится равномерно на всем отрезке $[a, b]$, его сумма

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.40}$$

непрерывно дифференцируема и

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{36.41}$$

Если эту формулу переписать в виде

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

то видно, что она означает законность при сделанных предположениях *почленного дифференцирования ряда.*

Доказательство. Пусть

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{36.42}$$

в силу равномерной сходимости этого ряда его можно почленно интегрировать:

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.43}$$

По теореме 7 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{36.44}$$

сходится. Сходится по условию теоремы и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c), \tag{36.45}$$

поэтому сходится и сумма рядов (36.44) и (36.45), т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.46}$$

Поэтому (36.43) можно переписать в виде

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c),$$

или, что то же (см. (36.40)), в виде

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = s(x) - s(c). \tag{36.47}$$

Функция, стоящая в левой части этого равенства, имеет производную по x, значит, и функция $s(x)$ также имеет производную.

Дифференцируя равенство (36.47), получим (см. п. 29.2)

$$s'(x) = \sigma(x), \tag{36.48}$$

где функция $\sigma(x)$ является непрерывной на отрезке $[a, b]$ функцией, ибо представляет собой сумму равномерно сходящегося ряда (36.39), члены которого — непрерывные функции. Подставляя (36.42) в (36.48), мы и получим искомую формулу (36.41).

Остается лишь отметить, что из равенства (36.43) в силу доказанной сходимости рядов (36.44) и (36.45) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_c^x u_n'(t)\,dt$ равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ (см. теорему 7), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ — числовой ряд, поэтому и их сумма, т. е. ряд (36.40), равномерно сходится на отрезке $[a, b]$.

Теорема доказана.

Перефразируем теорему 8 для последовательностей.

Теорема 8′. *Пусть последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций*

$$f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.49}$$

сходится хотя бы в одной точке $c \in [a, b]$, *а последовательность их производных* f_n', $n = 1, 2, \ldots$, *равномерно сходится на* $[a, b]$. *Тогда последовательность* (36.49) *равномерно сходится на* $[a, b]$, *ее предел является непрерывно дифференцируемой на этом отрезке функцией и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{df_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Примеры применения этих теорем будут даны в следующем параграфе.

§ 37. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

37.1. Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда. Формула Коши—Адамара

Определение 1. *Функциональные ряды вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{37.1}$$

где a_n, z *и* z_0 — *комплексные числа, называются степенными рядами. Числа*

$$a_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

называются коэффициентами степенного ряда (37.1).

Будем предполагать, что коэффициенты ряда и число z_0 фиксированы, и будем исследовать поведение ряда (37.1) при различных z.

Если в ряде (37.1) сделать замену переменного, положив

$$\zeta = z - z_0, \tag{37.2}$$

то получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n. \tag{37.3}$$

Очевидно, что исследование сходимости ряда (37.1) эквивалентно исследованию сходимости ряда (37.3), поэтому в дальнейшем будем рассматривать ряды вида (37.3), употребляя, правда, как правило, для обозначения переменной букву z, а не ζ.

Теорема 1 (Абель). *Если степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{37.4}$$

сходится при $z = z_0$, то он сходится и притом абсолютно при любом z, у которого $|z| < |z_0|$.

Доказательство. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \tag{37.5}$$

сходится, тогда его n-й член $a_n z_0^n$ стремится к нулю при $n \to \infty$ (см. п. 35.3), и поэтому последовательность $\{a_n z_0^n\}$ ограничена, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$|a_n z_0^n| \leqslant M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

В силу этого для n-го члена ряда (37.4) получается следующая оценка:

$$|a_n z^n| < |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Если $|z| < |z_0|$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n,$$

являясь геометрической прогрессией со знаменателем

$$q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1,$$

сходится. Поэтому по признаку сравнения (см. п. 35.3) сходится и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|,$$

а это означает абсолютную сходимость ряда (37.4) при $|z| < |z_0|$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если степенной ряд* (37.4) *расходится при $z = z_0$, то он расходится и при всяком z, у которого $|z| > |z_0|$.*

Действительно, если $|z| > |z_0|$ и ряд (37.5) расходится, то расходится и ряд (37.4); так как если бы он сходился, то в силу доказанного сходился бы и ряд (37.5).

Определение 2. *Величина $R \geqslant 0$ (R — число или символ $+\infty$), такая, что при всех z, у которых $|z| < R$, ряд* (37.4) *сходится, а при всех z, у которых $|z| > R$, ряд* (37.4) *расходится, называется радиусом сходимости степенного ряда* (37.4).

Множество точек z, у которых $|z| < R$, называется кругом сходимости ряда (37.4).

Теорема 2. *У всякого степенного ряда* (37.4) *существует радиус сходимости* R. *В круге сходимости, т. е. при любом* z, *у которого* $|z| < R$, *ряд* (37.4) *сходится абсолютно. На любом круге* $|z| \leqslant r$, *где* r *фиксировано и* $r < R$, *ряд* (37.4) *сходится равномерно.*

Доказательство. Разобьем все вещественные числа на два класса: к классу A отнесем все неположительные числа и те из положительных $x > 0$ (если такие существуют), для которых ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, а к классу B отнесем все остальные. Если класс B не пуст, то это разбиение является сечением в множестве вещественных чисел (см. п. 2.2); действительно, если $x \in A$ и $y \in B$, то, согласно теореме Абеля, $x < y$.

Обозначим через R число, определяющее это сечение. В случае, когда множество B пусто, по определению положим $R = +\infty$.

Величина R является радиусом сходимости ряда (37.4).

В самом деле, пусть зафиксировано некоторое z, у которого $|z| < R$. Возьмем вещественное x_0, такое, что $|z| < x_0 < R$. В силу определения величины R получим $x_0 \in A$, поэтому ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \tag{37.5}$$

сходится. Отсюда по теореме Абеля следует, что в зафиксированной точке z, $|z| < R$, ряд (37.4) сходится, и притом абсолютно.

Если же $|z| > R$, то выберем вещественное x_0 так, что $R < x_0 < |z|$, тогда $x_0 \in B$ и, следовательно, ряд (37.5) расходится. В силу следствия из теоремы Абеля отсюда следует, что в этом случае ряд (37.4) расходится.

Если теперь $0 < r < R$, то по доказанному ряд (37.4) при $z = r$ абсолютно сходится, т. е. сходится числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n.$$

А так как для любой точки z круга $|z| \leqslant r$

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n,$$

то, согласно признаку Вейерштрасса (см. п. 36.2), на этом круге ряд (37.4) сходится равномерно.

Теорема доказана.

Таким образом, областью сходимости всякого степенного ряда является всегда «круг»*) с точностью до множества его граничных

*) Слово «круг» пишется в кавычках, так как в случае $R = +\infty$ «круг» означает всю плоскость.

точек. В граничных же точках круга сходимости ряд может как сходиться, так и расходиться (см. нижеследующие примеры).

Было показано, что на всяком круге, лежащем вместе с границей внутри круга сходимости, степенной ряд сходится равномерно. Поскольку члены степенного ряда являются непрерывными функциями, то его сумма непрерывна на всяком указанном круге. Очевидно, что для любой точки z круга сходимости можно подобрать круг, содержащий эту точку и лежащий вместе с границей в круге сходимости (достаточно взять его радиус r таким, что $|z|<r<R$), поэтому *степенной ряд непрерывен в каждой точке своего круга сходимости* $|z|<R$ (подчеркнем, что здесь речь идет об открытом круге).

Все сказанное с помощью преобразования (37.2) легко переносится и на общие степенные ряды вида (37.1). В частности, областью сходимости такого ряда всегда является круг вида $|z-z_0|<R$, конечно, как и выше, с точностью до его граничных точек. Этот круг называется кругом сходимости ряда (37.1), а R — его радиусом сходимости.

Примеры. 1. Радиус сходимости R ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n \tag{37.6}$$

равен нулю, т. е. этот ряд сходится только при $z=0$*).

Действительно, исследуя абсолютную сходимость этого ряда по признаку Даламбера, получим при любом $z\neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(n+1)!\, z^{n+1}|}{|n!\, z^n|}=\lim_{n\to\infty}(n+1)|z|=+\infty.$$

Таким образом, ряд (37.6) не сходится абсолютно при любом $z\neq 0$; отсюда в силу следствия из теоремы Абеля он расходится при любом $z\neq 0$.

2. Радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

равен $+\infty$, ибо, как мы видели (см. п. 36.1), этот ряд сходится при любом z.

3. Геометрическая прогрессия

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{37.7}$$

*) При $z=0$, очевидно, сходится любой ряд вида (37.4).

сходится при $|z|<1$ и расходится при $|z|\geqslant 1$. Поэтому ее радиус сходимости $R=1$. Отметим, что во всех точках границы круга сходимости, т. е. во всех точках окружности $|z|=1$, ряд (37.7) расходится (почему?).

3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2} \tag{37.8}$$

сходится при $|z|\leqslant 1$, ибо при выполнении этого условия $\left|\frac{z^n}{n^2}\right|<\frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится.

При $|z|>1$ ряд (37.8) расходится, так как в этом случае

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z|^n}{n^2}=+\infty^{*)},$$

т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда.

Радиус сходимости ряда (37.8), как и ряда (37.7), равен единице, однако в каждой точке границы круга сходимости ряд (37.8) в отличие от ряда (37.7) сходится.

Теорема 3. *Пусть R — радиус сходимости степенного ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n; \tag{37.4}$$

тогда

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}\ ^{**)}. \tag{37.9}$$

Формула (37.9) называется *формулой Коши — Адамара****).

Доказательство. Положим

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

---

*) Действительно, легко, например, с помощью правила Лопиталя убедиться, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|z|^x}{x^2}=+\infty$ (см. пример 8 в п. 12.2).

**) О верхнем пределе см. в п. 3.8.

***) Ж. Адамар (1865—1963) — французский математик.

Рассмотрим сначала случай $\rho = 0$. Покажем, что в этом случае ряд (37.4) сходится при любом z. Возьмем какое-либо $z \neq 0$ и такое ε, что $0 < \varepsilon < 1$. Тогда (см. теорему 10 п. 3.8) существует такое N_1, что

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\varepsilon}{|z|} \text{ для всех } n \geqslant N_1,$$

т. е.

$$|a_n|\,|z|^n < \varepsilon^n \text{ для всех } n \geqslant N_1.$$

Отсюда по признаку сравнения следует, что ряд (37.4) абсолютно, а значит, и просто сходится при данном z, а так как z было произвольно, то это означает, что $R = +\infty$.

Возьмем другой крайний случай: пусть $\rho = +\infty$. Покажем, что в этом случае ряд (37.4) расходится при любом $z \neq 0$. Действительно, если $\rho = +\infty$, то существует подпоследовательность n_k, $k = 1, 2, \ldots$, натурального ряда, такая, что

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty.$$

Поэтому, каково бы ни было $z \neq 0$, существует такой номер k_z, что при $k > k_z$

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant \frac{1}{|z|},$$

т. е.

$$\left|a_{n_k} z^{n_k}\right| \geqslant 1.$$

Таким образом, не выполняется необходимое условие сходимости ряда — стремление к нулю n-го члена, поэтому при данном $z \neq 0$ ряд расходится, а так как $z \neq 0$ было произвольно, то это означает, что $R = 0$.

Пусть теперь $0 < \rho < +\infty$, покажем, что ряд (37.4) при всяком z, таком, что

$$|z| < \frac{1}{\rho},$$

сходится. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$|z| < \frac{1}{\rho + \varepsilon}\ ^{*)},$$

---

*) Для этого достаточно взять $\varepsilon < \dfrac{1}{|z|} - \rho$.

тогда число $q = (\rho + \varepsilon)|z| < 1$. Согласно свойству верхнего предела, существует такой номер N_1, что при $n \geqslant N_1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon,$$

поэтому при $n \geqslant N_1$

$$|a_n z^n| \leqslant (\rho + \varepsilon)^n |z|^n = q^n, \quad 0 < q < 1,$$

и по признаку сравнения ряд (37.4) при рассматриваемом z абсолютно, а значит, и просто сходится.

Покажем теперь, что ряд (37.4) при всяком z, таком, что

$$|z| > \frac{1}{\rho},$$

расходится. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$|z| > \frac{1}{\rho - \varepsilon};$$

тогда $|z|(\rho - \varepsilon) > 1$. Согласно свойству верхнего предела (см. теорему 10 п. 3.8), существует подпоследовательность n_k, $k = 1, 2, \ldots$, натуральных чисел, такая, что

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \rho - \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Из этого следует, что

$$|a_{n_k} z^{n_k}| > (\rho - \varepsilon)^{n_k} |z|^{n_k} \geqslant 1,$$

т. е. в этом случае не выполняется необходимое условие сходимости ряда — стремление к нулю его n-го члена, и поэтому для рассматриваемого z ряд (37.4) расходится.

Таким образом, ряд (37.4) сходится, если $|z| < \frac{1}{\rho}$, и расходится, если $|z| > \frac{1}{\rho}$, а это и означает, что $R = \frac{1}{\rho}$.

Теорема доказана.

Упражнение 1. Определить радиусы сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}.$$

37.2. Аналитические функции

Определение 3. *Функция $f(z)$ называется аналитической в точке z_0, если существует такое $R > 0$, что в круге $|z - z_0| < R$ она представима степенным рядом вида (37.1), т. е. существуют такие комплексные числа a_n, $n = 1, 2, \ldots$, что*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R. \tag{37.10}$$

Сумма, разность и произведение аналитических в точке z_0 функций снова является аналитической в этой точке функцией (почему?).

Лемма. *Если*

$$r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

— остаток сходящегося ряда (37.10), то

$$r_n(z) = O\left((z - z_0)^{n+1}\right) \quad при \quad z \to z_0 \tag{37.11}$$

и, значит,

$$r_n(z) = o\left((z - z_0)^n\right) \quad при \quad z \to z_0. \tag{37.12}$$

Доказательство. Если $|z - z_0| < R$, то

$$r_n(z) = (z - z_0)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1},$$

и ряд, получившийся после вынесения множителя $(z - z_0)^{n+1}$, сходится. Поэтому функция

$$\varphi(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1},$$

как сумма степенного ряда, непрерывна в круге $|z - z_0| < R$.

Если теперь $0 < r < R$, то функция $\varphi(z)$, будучи непрерывной на замкнутом круге $|z - z_0| \leqslant r$, будет и ограничена на нем, т. е. найдется такая постоянная $M > 0$, что

$$|\varphi(z)| \leqslant M,$$

если $|z - z_0| \leqslant r$. Поскольку

$$r_n(z) = (z - z_0)^{n+1} \varphi(z),$$

то

$$|r_n(z)| = |z - z_0|^{n+1} |\varphi(z)| \leqslant M |z - z_0|^{n+1}$$

если $|z-z_0| \leqslant r$, а это и означает (37.11). Условие (37.12) непосредственно следует из (37.11).

Лемма доказана.

Теорема 4. *Представление аналитической в точке z_0 функции $f(z)$ в виде степенного ряда* (37.10) *единственно, т. е. если*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0|<R, \quad R>0, \tag{37.13}$$

то

$$a_n = b_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Из (37.13) в силу (37.11) следует, что

$$a_0 + a_1 (z-z_0) + \ldots + a_n (z-z_0)^n + O\left((z-z_0)^{n+1}\right) =$$
$$= b_0 + b_1 (z-z_0) + \ldots + b_n (z-z_0)^n + O\left((z-z_0)^{n+1}\right). \tag{37.14}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $z \to z_0$, получим $a_0 = b_0$.

Пусть уже доказано, что $a_j = b_j$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Тогда, уничтожая одинаковые члены в обеих частях равенства (37.14) и деля обе части на $(z-z_0)^k$, получим

$$a_k + a_{k+1} (z-z_0) + \ldots + O\left((z-z_0)^{n+1-k}\right) =$$
$$= b_k + b_{k+1} (z-z_0) + \ldots + O\left((z-z_0)^{n+1-k}\right),$$

откуда при $z \to z_0$ следует, что $a_k = b_k$.

Теорема доказана (ср. с п. 13.2).

37.3. Вещественные аналитические функции

В дальнейшем в этом параграфе везде, где не оговорено противное, будем предполагать, что коэффициенты всех рассматриваемых рядов вещественны и что переменные z и z_0 также вещественны (в этом случае будем их обозначать x и x_0). Правда, все рассматриваемые ниже свойства степенных рядов переносятся в определенном смысле и на степенные ряды в комплексной области, однако для осуществления этого нам пришлось бы обобщить понятие производной и интеграла на функции комплексного аргумента, а это не входит в задачу настоящего курса.

Итак, мы будем рассматривать ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \tag{37.15}$$

где a_n, $n = 1\ 2, \ldots$, x и x_0 — вещественны.

Если R — радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-x_0)$, где z — комплексное число, т. е. ряда с теми же коэффициентами, что и у ряда (37.15), но рассматриваемого в комплексной области, то, очевидно, ряд (37.15) сходится, если $|x-x_0|<R$, и расходится, если $|x-x_0|>R$.

В этом случае R по-прежнему называется *радиусом сходимости*, а интервал $(x_0-R,\ x_0+R)$ — *интервалом сходимости ряда* (37.15).

Теорема 5. *Если $R>0$ — радиус сходимости степенного ряда*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \tag{37.16}$$

то

1) *функция f имеет в интервале $(x_0-R,\ x_0+R)$ производные всех порядков, которые находятся из ряда* (37.16) *почленным дифференцированием;*

2) *для любого $t\in(x_0-R,\ x_0+R)$*

$$\int_{x_0}^{t} f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(t-x_0)^{n+1}}{n+1}, \tag{37.17}$$

т. е. внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать;

3) *степенные ряды, получающиеся из ряда* (37.16) *в результате почленного дифференцирования или интегрирования, имеют тот же радиус сходимости, что и ряд* (37.16).

Доказательство. Найдем радиусы сходимости ряда, получающегося из ряда (37.16) почленным дифференцированием, т. е. ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}, \tag{37.18}$$

и ряда, получающегося из ряда (37.16) почленным интегрированием, т. е. ряда (37.17).

Заметим, что по правилу Лопиталя

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Аналогично $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1.$$

Учитывая это и применяя лемму 2 и 3 п. 3.8, получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|na_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\;\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\;\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}.$$

Заметим, что ряд (37.18) и ряд, получающийся из него умножением на $(x-x_0)$, а также ряд (37.17) и ряд, получающийся из него вынесением за скобку множителя $(t-x_0)$, имеют соответственно одни и те же радиусы сходимости. Поэтому согласно формуле Коши—Адамара и сделанному замечанию радиусы сходимости рядов (37.16), (37.17) и (37.18) совпадают. Утверждение 2 теоремы теперь непосредственно следует из того факта, что всякий степенной ряд равномерно сходится на всяком отрезке, целиком лежащем в интервале сходимости (см. теорему 2), и соответствующих теорем о дифференцируемости и интегрируемости рядов (см. п. 36.3).

Теорема доказана.

Теорема 6. *Если функция f аналитическая в точке x_0, т. е. представима в окрестности этой точки рядом* (37.16) *с радиусом сходимости $R>0$, то*

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\quad n=0,\ 1,\ \ldots \tag{37.19}$$

т. е.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{37.20}$$

Доказательство. Дифференцируя n раз обе части равенства (37.16), получим (см. теорему 5)

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot a_n+(n+1)n\ldots 2a_{n+1}(x-x_0)+$$

$$+(n+2)(n+1)\ldots 3a_{n+2}(x-x_0)^2+\ldots.$$

Отсюда при $x=x_0$ и получается формула (37.19).

Заметим, что из доказанной теоремы следует еще раз свойство единственности разложения функции в степенной ряд (правда, на этот раз в силу сделанных ограничений только в вещественной области, ср. с п. 37.2).

37.4. Разложение функций в степенные ряды. Различные способы записи остаточного члена формулы Тейлора

Определение 4. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{37.21}$$

называется рядом Тейлора функции f в точке x_0.

Как мы знаем, всякая аналитическая в точке x_0 функция бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности этой точки. Оказывается, что обратное, вообще говоря, неверно: существуют функции, бесконечно дифференцируемые, но не аналитические, и, значит, не представимые своим рядом Тейлора.

Примером такой функции является функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{для} \quad x\neq 0, \\ 0 & \text{для} \quad x=0. \end{cases} \tag{37.22}$$

При $x\neq 0$ эта функция имеет производные всех порядков, которые легко вычисляются:

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x)=-\frac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

и вообще

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ — многочлен некоторой степени относительно $\frac{1}{x}$ (n — порядковый номер, а не степень многочлена), т. е. $f^{(n)}(x)$ есть линейная комбинация слагаемых вида

$$\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{37.23}$$

Это легко проверяется по индукции.

Сделав замену переменного $t = \frac{1}{x^2}$, найдем, применив правило Лопиталя, предел модуля выражения (37.23) при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}\right| = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\frac{m}{2}}}{e^t} = 0.$$

Отсюда следует, что и предел выражения (37.23) при $x \to 0$ также равен нулю и что

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \qquad (37.24)$$

при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Из формулы (37.24) при $n = 0$ и $n = 1$ следует, что функция f непрерывна в точке $x = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$, поэтому (см. лемму 2 п. 11.2) $f'(0)$ существует и $f'(0) = 0$. По индукции легко убедиться подобным же образом, что

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, все члены ряда Тейлора функции (37.22) в точке $x_0 = 0$ равны нулю, поэтому его сумма при всех x также равна нулю и, следовательно, не совпадает с самой функцией f. Заметим еще, что, согласно теореме 6 п. 37.3, функция (37.22) не может быть разложена ни в какой степенной ряд (так как если бы это было возможно, то он оказался бы рядом Тейлора), а это и означает, что она не является аналитической.

Возникает вопрос: когда ряд Тейлора (37.21) функции $f(x)$ на указанном интервале сходится к $f(x)$? Чтобы исследовать этот вопрос, напишем формулу Тейлора для функции f (см. п. 13.1):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x), \qquad (37.25)$$

которая справедлива при любом $n = 1, 2, \ldots$. В этой формуле $r_n(x)$ обозначает остаточный член формулы Тейлора. Полагая

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

перепишем формулу (37.25) в виде

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x), \qquad (37.26)$$

где $s_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда Тейлора,

Отсюда видно, что, для того чтобы функция f равнялась сумме своего ряда Тейлора на рассматриваемом интервале, необходимо и достаточно, чтобы для всех x из этого интервала

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0. \tag{37.27}$$

Если это имеет место, то из формулы (37.26) следует, что $r_n(x)$ является также и суммой n-го остатка ряда Тейлора (37.21).

Теорема 7. *Пусть функция f определена и непрерывна вместе со всеми своими производными до порядка $n+1$ включительно на интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$, $h>0$. Тогда остаточный член $r_n(x)$ ее формулы Тейлора* (37.25) *для всех $x\in(x_0-h,\ x_0+h)$ можно записать в следующих трех видах:*

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{37.28}$$

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{37.29}$$

где $|\xi-x_0|<|x-x_0|$,

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \tag{37.30}$$

где $0<\theta<1$.

Формула (37.28) *называется остаточным членом формулы Тейлора в интегральной форме, формула* (37.29) *— в форме Лагранжа, а* (37.30) *— в форме Коши.*

Доказательство. Из

$$f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x}f'(t)\,dt=-\int_{x_0}^{x}f'(t)\,d(x-t),$$

интегрируя по частям, получим

$$f(x)-f(x_0)=-f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x}f''(t)(x-t)\,dt=$$

$$=f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}f''(t)(x-t)\,dt.$$

Пусть для некоторого $m \leqslant n$ уже доказано, что

$$f(x)-f(x_0)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x}f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\,dt. \quad (37.31)$$

Проинтегрируем по частям последний член еще раз:

$$\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x}f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\,dt=-\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x}f^{(m)}(t)\,d(x-t)^m=$$

$$=-\frac{f^{(m)}(t)(x-t)^m}{m!}\Bigg|_{x_0}^{x}+\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x}f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt=$$

$$=\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x}f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt.$$

Подставляя это выражение в (37.31), получим

$$f(x)-f(x_0)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x}f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt,$$

т. е. получим ту же формулу с заменой m на $m+1$.

Таким образом, формула (37.31) доказана по индукции для всех $m \leqslant n$. При $m=n$ она превращается в формулу (37.28).

Применим теперь обобщенную интегральную теорему о среднем к интегралу (37.28), вынося за знак интеграла «среднее значение» производной $f^{(n+1)}$ (см. теорему 1 и упражнение 1 в п. 28.2):

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{x_0}^{x}=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит на интервале с концами в точках x_0 и x, т. е. $|\xi-x_0|<|x-x_0|$. Формула (37.29) доказана.

Если же применить интегральную теорему о среднем к интегралу (37.28), вынося за знак интеграла «среднее значение» всей подынтегральной функции (см. п. 28.2), то получим

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0), \quad (37.32)$$

где ξ, как и выше, лежит на интервале с концами в точках x_0 и x, т. е.

$$\xi = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0<\theta<1.$$

Отсюда $x-\xi = x-x_0-\theta(x-x_0) = (x-x_0)(1-\theta)$. Подставляя это выражение в (37.32), получим формулу (37.30).

Теорема доказана.

Укажем теперь одно достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.

Теорема 8. *Пусть функция f и все ее производные ограничены в совокупности на интервале (x_0-h, x_0+h), т. е. существует такая постоянная $M>0$, что*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M \quad (37.33)$$

для всех $x \in (x_0-h, x_0+h)$ и всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда на интервале (x_0-h, x_0+h) функция f раскладывается в ряд Тейлора, т. е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad |x-x_0|<h. \quad (37.34)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что, каково бы ни было число a,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \quad (37.35)$$

Действительно, пусть n_0 такое, что

$$\frac{|a|}{n_0} < \frac{1}{2}.$$

Тогда при всех $n \geqslant n_0$

$$\frac{|a|}{n} < \frac{1}{2},$$

и поэтому

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!}\,\frac{a}{n_0+1}\cdot\frac{a}{n_0+2}\cdots\frac{a}{n} < \frac{a^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0},$$

а последнее выражение стремится к нулю при $n\to\infty$.

Равенство (37.35) доказано.

Для того чтобы доказать формулу (37.34), достаточно убедиться (см. (37.27)), что

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0, \tag{37.36}$$

где $r_n(x)$ — остаточный член в формуле Тейлора функции f. Возьмем $r_n(x)$ в форме Лагранжа (см. (37.29)). Из неравенства (37.33) следует, что

$$|r_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},\quad |x-x_0|<h.$$

Поскольку в силу (37.35)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$

то при $|x-x_0|<h$ выполняется условие (37.36).

Теорема доказана.

37.5. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Прежде всего найдем разложение в ряд некоторых основных элементарных функций.

1. Разложение в ряд функции $f(x)=e^x$.

Так как $f^{(n)}(x)=e^x$, то для любого фиксированного $h>0$ при всех $x\in[-h, h]$ и всех $n=0, 1, \ldots$

$$0<f^{(n)}(x)<e^h.$$

Таким образом, условия теоремы 8 выполнены ($x_0=0$), поэтому функция e^x раскладывается в ряд Тейлора (37.34) на любом конечном отрезке, а значит, и на всей вещественной оси. Поскольку в данном случае $f^{(n)}(0)=1$, то это разложение имеет вид

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \tag{37.37}$$

Напомним, что в п. 36.1 было установлено, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

абсолютно сходится на всей комплексной плоскости*). Мы видим теперь, что для вещественных $z=x$ его сумма равна e^x. В случае

*) Впрочем, это следует, согласно теореме Абеля, и из доказанной сейчас нами сходимости ряда (37.37) на всей вещественной оси.

существенно комплексных z его сумму по аналогии обозначают e^z; таким образом, формула

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{37.38}$$

для комплексных z является определением функции e^z. Это определение естественно, во-первых, потому, что в случае вещественного $z = x$ эта функция совпадает с показательной функцией e^x, а, во-вторых, потому, что функция e^z сохраняет ряд характерных свойств функции e^x. Покажем, например, что

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \tag{37.39}$$

для любых комплексных z_1 и z_2.

Мы знаем, что ряд (37.38) абсолютно сходится, поэтому ряды

$$e^{z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}, \quad e^{z_2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!}$$

можно почленно перемножить (см. п. 35.6), причем, поскольку получающийся при этом ряд также абсолютно сходится, его члены можно располагать в произвольном порядке. Соберем все члены, содержащие произведения $z_1^n z_2^m$ с одинаковой суммой $n + m$, и расположим эти группы членов по возрастанию $n + m$:

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n+m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+m} \frac{z_1^{n+m-k}}{(n+m-k)!} \cdot \frac{z_2^k}{k!} =$$

$$= \sum_{n+m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m)!} \sum_{k=0}^{n+m} \frac{(n+m)!}{(n+m-k)!k!} z_1^{n+m-k} z_2^k =$$

$$= \sum_{n+m=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^{n+m}}{(n+m)!} = e^{z_1+z_2}.$$

2. Разложение в ряд $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$.

Заменяя в формуле (37.37) x на $-x$ (это означает просто изменение обозначения), получим

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}. \tag{37.40}$$

Складывая и вычитая равенства (37.37) и (37.40), а затем деля их на два, получим

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \tag{37.41}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{37.42}$$

В правых частях этих формул в силу единственности разложения функций в степенные ряды стоят ряды Тейлора функций ch x и sh x.

Поскольку функция e^z определена теперь для всех комплексных z, то на существенно комплексные значения аргумента можно распространить и гиперболические функции sh x и ch x, положив

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Определенные таким образом ch z и sh z для комплексных z раскладываются в степенные ряды (37.41) и (37.42), сходящиеся на всей комплексной плоскости (под x в них в этом случае понимается комплексное число).

3. Разложение в ряд $\sin x$ и $\cos x$. Формулы Эйлера. Если $f(x) = \sin x$, то $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$ (см. пример 3 п. 10.1), поэтому $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ для всех вещественных x.

Согласно теореме 8, отсюда следует, что функция sin x раскладывается в степенной ряд на всей вещественной оси. Вспоминая формулу Тейлора для синуса (см. п. 13.3), получим ряд Тейлора для sin x:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{37.43}$$

Рассуждая аналогично и вспоминая формулу Тейлора для косинуса (см. п. 13.3), получим для него ряд Тейлора

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \tag{37.44}$$

также сходящийся на всей вещественной оси.

В силу теоремы Абеля (см. п. 37.1) ряды, стоящие в правых частях формул (37.43) и (37.44), сходятся также и при любом комплекс-

ном x; это позволяет распространить синус и косинус на комплексные значения аргумента, положив для любого комплексного z

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{37.45}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}. \tag{37.46}$$

В комплексной области легко установить связь между показательной функцией и тригонометрическими.

Заменяя в ряде (37.38) z сначала на iz, а затем на $-iz$, получим

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!}, \quad e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot i^n z^n}{n!}. \tag{37.47}$$

Замечая теперь, что

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 4k, \\ i & \text{при } n = 4k+1, \\ -1 & \text{при } n = 4k+2, \\ -i & \text{при } n = 4k+3, \\ & k = 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

из (37.47) будем иметь

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Сравнивая эти формулы с (37.45) и (37.46), получим

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{37.48}$$

Из них непосредственно следует также формула

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}. \tag{37.49}$$

Конечно, эти формулы, в частности, справедливы и для действительных z.

Формулы (37.48) и (37.49) называются *формулами Эйлера*. Отметим два простых их применения.

В случае, когда в формуле (37.49) $z = \varphi$ — вещественное число, мы получим

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Поэтому комплексное число с модулем r и аргументом φ

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

можно записать в виде

$$z = re^{i\varphi}.$$

Полагая здесь $z = -1$, получим

$$e^{i\pi} = -1$$

— связь между числами e, π и i!

Легко находятся с помощью формул Эйлера модуль и аргумент числа e^z, где $z = x + iy$. Действительно (см. (37.39)),

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

т. е. $|e^z| = e^x$, $\operatorname{Arg} e^z = y$.

Синус и косинус в комплексной области обладают многими свойствами, которыми они обладают и в вещественной области, однако далеко не всеми.

Упражнение 2. Используя формулы Эйлера, доказать, что при любом комплексном z

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z,$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \cos(z + 2\pi n) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi n) = \sin z.$$

Покажем, например, что абсолютные величины синуса и косинуса могут превышать единицу.

Заменяя в рядах (37.45) и (37.46) z на iz, получим

$$\sin iz = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos iz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Сравнивая получившиеся ряды с рядами (37.41) и (37.42) (при $x = z$), получим

$$\operatorname{sh} z = i \sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz.$$

В частности, при вещественном $z = y$

$$|\sin iy| = |\operatorname{sh} y| \quad \text{и} \quad |\cos iy| = \operatorname{ch} y,$$

откуда и видно, что на мнимой оси функции $\sin z$ и $\cos z$ не ограничены по абсолютной величине.

4. Разложение в ряд функции $\ln(1 + x)$.

Формула Тейлора для $\ln(1 + x)$ имеет вид (см. п. 13.3)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} + r_n(x).$$

Запишем остаточный член $r_n(x)$ в форме Лагранжа. Замечая, что

$$[\ln(1+x)]^{(n+1)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

получим

$$r_n(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\quad 0<\theta<1.$$

Если

$$0\leqslant x\leqslant 1,$$

то

$$0<\frac{1}{1+\theta x}\leqslant 1,$$

и потому

$$|r_n(x)|<\frac{1}{n+1}$$

и, в частности,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0. \tag{37.50}$$

Если же $-1<x<0$, то целесообразно записать остаточный член $r_n(x)$ в форме Коши:

$$r_n(x)=(-1)^n\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}.$$

В этом случае

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}=\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}<1$$

и

$$\frac{1}{1+\theta x}=\frac{1}{1-\theta|x|}<\frac{1}{1-|x|},$$

поэтому

$$|r_n(x)|\leqslant\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n\cdot\frac{1}{|1+\theta x|}|x|^{n+1}\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

откуда при $-1<x<0$ также получаем (37.50).

Таким образом,

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \tag{37.51}$$

для всех $x\in(-1;\ 1]$.

При $x=-1$ ряд, стоящий в правой части равенства (37.51), отличается от гармонического ряда лишь множителем -1 и потому расходится. Расходится он также и при всех x, таких, что $|x|>1$,

ибо в этом случае n-й член ряда (37.51) не стремится к нулю, более того (см. п. 12.2),

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n}\right|=+\infty.$$

5. Разложение в ряд бинома $(1+x)^\alpha$.

Формула Тейлора для биномиальной функции имеет вид (см. п. 13.3)

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x) \tag{37.52}$$

Рассмотрим соответствующий ряд (называемый биномиальным рядом с показателем α):

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \tag{37.53}$$

Если α — неотрицательное целое, то ряд (37.53) содержит лишь конечное число членов, отличных от нуля, и, следовательно, сходится при всех x.

Рассмотрим теперь случай, когда α не является неотрицательным целым. В этом случае в ряде (37.53) все члены отличны от нуля при $x\neq 0$.

Для исследования абсолютной сходимости ряда (37.53) используем признак Даламбера. Иначе говоря, применим признак Даламбера к ряду с n-м членом:

$$u_n=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right|.$$

Замечая, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}x\right|=|x|,$$

получаем, что ряд (37.53) абсолютно, а значит, и просто сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$ (см. теорему Абеля в п. 37.1).

Исследуем теперь, чему равна сумма ряда (37.53) при $|x|<1$. Замечая, что

$$\left[(1+x)^\alpha\right]^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

запишем остаточный член $r_n(x)$ формулы (37.52) в форме Коши:

$$r_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1},\quad 0<\theta<1$$

(θ зависит от x и от n). Положим

$$A_n(x)=\frac{(\alpha-1)\ldots[(\alpha-1)-(n-1)]}{n!}x^n,$$

$$B_n(x)=\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1},\quad C_n(x)=\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Тогда

$$r_n(x)=A_n(x)\,B_n(x)\,C_n(x).$$

Очевидно, $A_n(x)$ является общим членом биномиального ряда с показателем $\alpha-1$ и, следовательно, в силу доказанной выше сходимости биномиального ряда при $|x|<1$

$$\lim_{n\to\infty}A_n(x)=0,\quad |x|<1.$$

Далее, из того, что $1-|x|<1+\theta x<1+|x|$, следует, что значения $|B_n(x)|$ заключены между величинами

$$|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1}\quad\text{и}\quad |\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1},$$

не зависящими от θ, т. е. последовательность $\{B_n(x)\}$ при фиксированном $x\in(-1,1)$ ограничена. Наконец,

$$|C_n(x)|=\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n\leqslant\left|\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}\right|<1.$$

Из установленных свойств $A_n(x)$, $B_n(x)$ и $C_n(x)$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0,\quad |x|<1.$$

Таким образом,

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

для любого $x\in(-1;1)$.

Задача 19. Доказать, что:

1) в точке $x=1$ при $\alpha>-1$ биномиальный ряд сходится, а при $\alpha<-1$ расходится;

2) в точке же $x=-1$ при $\alpha\geqslant 0$ биномиальный ряд абсолютно сходится, а при $\alpha<0$ расходится.

При этом каждый раз, когда биномиальный ряд (37.53) сходится, его сумма равна $(1+x)^\alpha$.

37.6. Разложение в степенные ряды и суммирование степенных рядов методом почленного дифференцирования и интегрирования

Дифференцируя или интегрируя известные разложения в ряд Тейлора, можно получать разложения новых функций в степенные ряды. Так, например, интегрируя формулу геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^n t^n + \ldots \qquad (37.54)$$

в пределах от 0 до x, $|x| < 1$ (что законно, ибо ряд (37.54) равномерно сходится на отрезке с концами в точках 0 и x при $|x| < 1$), получим известную уже формулу (37.51):

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots .$$

Дифференцируя или интегрируя заданный степенной ряд, иногда удается получить ряд, сумма которого уже известна; это позволяет вычислить и сумму исходного степенного ряда.

Примеры. 1. Найдем разложение функции $\arcsin x$ в ряд. Замечая, что

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

разложим $(\arcsin x)'$ в ряд по формуле разложения бинома (см. п. 37.5):

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}. \qquad (37.55)$$

Радиус сходимости получившегося ряда равен единице (см. там же). Интегрируя ряд (37.55) от 0 до x, $|x| < 1$, получим

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Искомое разложение найдено.

2. Найдем сумму ряда

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n. \qquad (37.56)$$

Радиус сходимости этого ряда равен единице. В этом легко убедиться, например, по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\,x^{n+1}}{nx^n}\right|=|x|.$$

Следовательно, ряд (37.56) абсолютно сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$. Из (37.56) следует, что

$$\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}.$$

Интегрируя этот ряд почленно от 0 до x, $|x|<1$, получим

$$\int_0^x\frac{S(t)}{t}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}.$$

Продифференцируем получившееся тождество:

$$\frac{S(x)}{x}=\frac{d}{dx}\,\frac{x}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Отсюда имеем

$$S(x)=\frac{x}{(1-x)^2},\quad |x|<1.$$

3. Найдем сумму ряда

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}. \tag{37.57}$$

Радиус сходимости этого ряда равен единице; в этом легко убедиться, например, тем же способом, что и в случае ряда (37.56).

Продифференцировав ряд (37.57) почленно:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n},$$

и использовав разложение логарифма (см. п. 37.5), получим

$$xS'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\quad |x|<1,$$

или

$$S'(x)=-\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Замечая, что $S(0) = 0$, окончательно получим

$$S(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt.$$

Таким образом, здесь ответ выражается не в элементарных функциях.

Упражнения. 3. Разложить в степенной ряд $(\arcsin x)^2$.

4. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

§ 38. КРАТНЫЕ РЯДЫ

38.1. Кратные числовые ряды

Определение 1. *Если дана некоторая совокупность чисел (вообще говоря, комплексных) $u_{n_1 \ldots n_k}$, занумерованных k индексами n_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, каждый из которых независимо от других пробегает натуральный ряд чисел $n_i = 1, 2, \ldots$, то выражение*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k} \tag{38.1}$$

называется k-кратным рядом, а числа $u_{n_1 \ldots n_k}$ — его членами.

Естественно возникает вопрос о том, как определить сходимость ряда (38.1), как определить его сумму, в каких случаях эта сумма не будет зависеть от того или иного порядка слагаемых. Для простоты записи мы ограничимся случаем $k = 2$, т. е. случаем *двукратных рядов* (их называют также *двойными рядами*).

Все результаты легко переносятся и на случай k-кратных рядов любой кратности $k = 2, 3, \ldots$.

Определение 2. *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n,\, m=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{38.2}$$

Сумма вида

$$S_{mn} = \sum_{i=1,\ j=1}^{i=m,\ j=n} u_{ij} \tag{38.3}$$

называется частичной суммой ряда (38.2).

Введем понятие предела совокупности чисел x_{mn} с двумя индексами $m = 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$ (такие совокупности называются последовательностями с двумя индексами).

Определение 3. *Говорят, что последовательность с двумя индексами* x_{mn}, m, $n=1, 2, \ldots$, *сходится к числу* A, *и пишут* $\lim\limits_{m,\, n\to\infty} x_{mn}=A$, *если для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое* N_ε, *что* $|A-x_{mn}|<\varepsilon$ *для всех* $m\geqslant N_\varepsilon$ *и* $n\geqslant N_\varepsilon$.

Определение 4. *Если для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое* N_ε, *что* $|x_{mn}|>\varepsilon$ *для всех* $m\geqslant N_\varepsilon$ *и* $n\geqslant N_\varepsilon$, *то пишут, что* $\lim\limits_{m,\, n\to\infty} x_{mn}=\infty$.

Аналогично определяются бесконечные пределы:

$$\lim_{m,\, n\to\infty} x_{mn}=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{m,\, n\to\infty} x_{mn}=-\infty.$$

Определение 5. *Если существует конечный предел частичных сумм* S_{mn} *ряда* (38.2) *и*

$$\lim_{m,\, n\to\infty} S_{mn}=S, \tag{38.4}$$

то S *называется суммой ряда* (38.2), *а ряд* (38.2) *называется сходящимся.*

В этом случае будем писать

$$\sum_{m,\, n=1}^{\infty} u_{mn}=S.$$

Если конечного предела (38.4) *не существует, то ряд* (38.4) *называется расходящимся.*

Если

$$\lim_{m,\, n\to\infty} S_{mn}=\infty, \text{ или } \lim_{m,\, n\to\infty} S_{mn}=+\infty, \text{ или } \lim_{m,\, n\to\infty} S_{mn}=-\infty, \tag{38.5}$$

то, соответственно, будем писать

$$\sum_{m,\, n=1}^{\infty} u_{mn}=\infty, \quad \sum_{m,\, n=1}^{\infty} u_{mn}=+\infty, \quad \sum_{m,\, n=1}^{\infty} u_{mn}=-\infty.$$

На кратные ряды переносится ряд свойств обычных (однократных) рядов. Например:

1. *Если* $\sum\limits_{m,\,n=1}^{\infty} u_{mn}=S$, *где* S—*число или один из символов* ∞, $+\infty$, $-\infty$, *то* $\sum\limits_{m,\,n=1}^{\infty} \lambda u_{mn}=\lambda S$*) *для любого числа* λ.

2. *Если ряды* $\sum\limits_{m,\,n=1}^{\infty} u'_{mn}=S'$ *и* $\sum\limits_{m,\,n=1}^{\infty} u''_{mn}=S''$ *сходятся, то*

$$\sum_{m,\,n=1}^{\infty}\left(u'_{mn}+u''_{mn}\right)=S'+S''.$$

Эти утверждения легко доказываются аналогично случаю однократных рядов (это предоставляется проделать читателю).

Докажем теперь несколько теорем о кратных рядах.

Теорема 1. *Если ряд* (38.2) *сходится, то*

$$\lim_{m,\,n\to\infty} u_{mn}=0.$$

Это сразу следует из равенства

$$u_{mn}=S_{mn}-S_{m-1\,n}-S_{m\,n-1}+S_{m-1,\,n-1}$$

и условия (38.4).

Теорема 2. *Если все члены ряда* (38.2) *неотрицательны*:

$$u_{mn}\geqslant 0,\quad m,\ n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{38.6}$$

то всегда существует конечный или бесконечный предел его частичных сумм S_{mn}, *причем*

$$\lim_{m,\,n\to\infty} S_{mn}=\sup_{m,\,n=1,\,2,\ldots} S_{mn}. \tag{38.7}$$

Доказательство. Если выполняется условие (38.6) и $m'\geqslant m$, $n'\geqslant n$, то

$$S_{m'n'}\geqslant S_{mn}.$$

Далее, если $S=\sup\limits_{m,\,n=1,\,2,\ldots} S_{mn}$ и $S'<S$, то в силу определения верхней грани существуют такие номера m_0 и n_0, что

$$S_{m_0\,n_0}>S'.$$

Положим $N=\max\{m_0,\ n_0\}$, тогда при $m\geqslant N$ и $n\geqslant N$

$$S_{mn}\geqslant S_{NN}\geqslant S_{m_0\,n_0}>S',$$

и так как $S_{mn}\leqslant S$, $\lim\limits_{mn\to\infty} S_{mn}=S$, т. е. выполняется условие (38.7).

Теорема доказана.

*) При этом мы здесь считаем, что $0\cdot\infty=0\cdot+\infty=0\cdot-\infty=0$.

Следствие. *В предположениях теоремы ряд (38.2) сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены.*

Доказательство следствия очевидно.

Из двукратного ряда ((38.2) можно формально образовать два так называемых повторных ряда. Для этого следует сначала произвести суммирование по одному индексу, зафиксировав другой, а затем произвести суммирование по оставшемуся индексу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}, \quad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{38.8}$$

Аналогично доказанной теоремы о повторных пределах (см. теорему 1 п. 19.1) доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Если сходится двойной ряд (38.2) и сходятся ряды* $\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}$ *для всех* $n = 1, 2, \ldots$, *то повторный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}$ *также сходится и его сумма равна сумме данного ряда* (38.2).

Определение 6. *Ряд* (38.2) *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е. ряд*

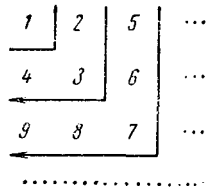
$$\sum_{m,\ n=1}^{\infty} |u_{mn}|. \tag{38.9}$$

Теорема 4. *Если ряд* (38.2) *абсолютно сходится, то сходится и любой ряд (однократный, двукратный или повторный), полученный перестановкой членов данного ряда (в частности, сходится и сам заданный ряд). При этом сумма любого такого ряда совпадает с суммой исходного ряда* (38.2).

Доказательство. Расположим члены ряда (38.2) в бесконечную прямоугольную матрицу, поместив в m-ю ее строчку члены ряда с данным фиксированным первым номером m, расположенные по возрастанию второго индекса n:

$$\begin{array}{l} u_{11}\ u_{12}\ u_{13}\ \ldots\ u_{1n}\ldots \\ u_{21}\ u_{22}\ u_{23}\ \ldots\ u_{2n}\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{m1}\ u_{m2}\ u_{m3}\ \ldots\ u_{mn}\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Занумеруем теперь элементы этой таблицы согласно следующей схеме:



Член ряда (38.2), получивший при такой нумерации номер k, обозначим v_k. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \tag{38.10}$$

и покажем, что он абсолютно сходится, т. е., что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|. \tag{38.11}$$

Обозначим частичные суммы ряда (38.9) через S^*_{mn}, его сумму — через S^*, а частичные суммы ряда (38.11) — через S^*_k. Прежде всего заметим, что для любой суммы S^*_k найдутся такие номера m и n, что все члены ряда (38.11), входящие в сумму S^*_k, войдут и в сумму S^*_{mn}, тогда

$$S^*_k \leqslant S^*_{mn} \leqslant S^*.$$

Отсюда и следует (см. п. 35.4) сходимость ряда (38.11).

Из абсолютной сходимости ряда (38.10) следует, что и любой другой однократный ряд, составленный из членов ряда (38.2), также сходится и его сумма равна сумме ряда (38.10) (см. п. 35.6). Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = S.$$

Покажем теперь, что любой двойной ряд

$$\sum_{m,\ n=1}^{\infty} u'_{mn}, \tag{38.12}$$

полученный некоторой перенумерацией двойными индексами членов данного ряда (38.2), сходится и что его сумма также равна S. Обозначим частичные суммы ряда (38.12) через S'_{mn}, а частичные

суммы ряда (38.10) через S_k. Пусть фиксировано число $\varepsilon > 0$. В силу сходимости ряда (38.11) существует такой номер k_ε, что

$$\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{38.13}$$

тогда и подавно

$$|S - S_{k_\varepsilon}| = \left| \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} v_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{38.14}$$

Выберем номер N_ε так, чтобы частичная сумма $S'_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ ряда (38.12) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (38.10), входящие в сумму S_{k_ε}. Пусть $m \geqslant N_\varepsilon$ и $n \geqslant N_\varepsilon$. Положим

$$S''_{mn} = S'_{mn} - S_{k_\varepsilon}.$$

Тогда, используя (38.13) и (38.14), получим

$$|S - S'_{mn}| = |S - S_{k_\varepsilon}| + |S''_{mn}| < \varepsilon.$$

Итак, S является суммой любого ряда (38.12), в частности, суммой самого ряда (38.2).

Покажем, наконец, что S является и суммой повторных рядов (38.8). В самом деле, при любом фиксированном n

$$\sum_{m=1}^{m_0} |u_{mn}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |v_k| = S^*.$$

Следовательно, все ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

сходятся, и притом абсолютно. Положим

$$u_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{38.15}$$

Зафиксируем снова произвольное число $\varepsilon > 0$. Выберем номер k_ε так, чтобы выполнялось условие (38.13), а следовательно, и условие (38.14). Далее, подобно тому как это было сделано выше, выберем номер N_ε так, чтобы частичная сумма $S_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ ряда (38.2) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (38.10), входящие в сумму S_{k_ε}. Тогда при всех $m \geqslant N_\varepsilon$ и $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} u_{ji} - S_{k_\varepsilon} \right| \leqslant \left| \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} v_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим (см. (38.15))

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S_{k_\varepsilon} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда в силу (38.14) следует, что при $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S \right| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S_{k_\varepsilon} \right| + |S_{k_\varepsilon} - S| < \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

Теорема 4 доказана.

Упражнение 1. Обобщить критерий Коши сходимости однократных рядов на случай кратных рядов.

38.2. Кратные функциональные ряды

Определение 7. *Ряд вида*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k=1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k}(x), \tag{38.16}$$

где функции $u_{n_1 \ldots n_k}(x)$ определены на некотором множестве E, называется k-кратным функциональным рядом, а суммы вида

$$S_{m_1 \ldots m_k}(x) = \sum_{n_1, \ldots, n_k=1}^{m_1, \ldots, m_k} u_{n_1 \ldots n_k}(x)$$

— его частичными суммами.

Определение 8. *Ряд* (38.16) *называется сходящимся на множестве* E, *если при каждом фиксированном* $x_0 \in E$ *сходится кратный числовой ряд*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k=1}^{\infty} u_{n_1, \ldots, n_k}(x_0).$$

Если ряд (38.16) *сходится на* E, *то функция*

$$S(x) = \sum_{n_1, \ldots, n_k=1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k}(x), \quad x \in E$$

называется его суммой.

На кратные функциональные ряды легко переносятся понятия равномерной сходимости ряда, критерий Коши для равномерной сходимости ряда, признак Вейерштрасса равномерной сходимости и т. п. Мы не будем на этом останавливаться.

Упражнение 2. Определив понятие равномерной сходимости двойного ряда, доказать, что если ряд (38.16) сходится равномерно и если его члены являются непрерывными функциями на множестве $E \subset E^n$, то и сумма ряда (38.16) является непрерывной на множестве E функцией.

Определение 9. *Ряды вида*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k=0}^{\infty} c_{n_1 \ldots n_k} (x_1 - x_1^{(0)})^{n_1} \ldots (x_n - x_n^{(0)})^{n_k},$$

где $c_{n_1 \ldots n_k}$ *— комплексные числа, называются кратными степенными рядами.*

Хотя, как это видно из предыдущего, многие утверждения, справедливые для однократных рядов, обобщаются и на кратные ряды, последние имеют и много своих специфических особенностей, существенно отличающих их от однократных рядов.

В качестве примера приведем двойной степенной ряд, который сходится лишь в двух точках плоскости, а именно в точках (0; 0) и (1; 1). Таким образом, аналога теоремы Абеля для степенных рядов (см. п. 37.1), во всяком случае в прямом смысле, для двойных рядов нет. Этот пример показывает опасность использования аналогий, не подкрепленных математическими доказательствами.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m,\,n=0}^{\infty} c_{mn}\,x^m\,y^n, \tag{38.17}$$

где

$$c_{0,\,0}=0, \quad c_{0n}=c_{n0}=n!, \quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

$$c_{1m}=c_{m1}=-m!, \quad m=1,\ 2,\ \ldots,$$

$$c_{mn}=0, \quad m\geqslant 2, \quad n\geqslant 2.$$

Его частичные суммы имеют вид

$$S_{mn}(x,\,y)=(1-y)\sum_{k=1}^{m} k!\,x^k+y+(1-x)\sum_{l=2}^{n} l!\,y^l. \tag{38.18}$$

Очевидно, что $S_{mn}(0\,,\,0)=0$ и $S_{mn}(1\,,\,1)=1$, $m,\ n=1,\ 2,\ \ldots$, и потому ряд (38.17) сходится в точках (0 , 0) и (1 , 1).

Заметим теперь, что радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\,z^n$$

равен нулю (см. ряд (37.6) п. 37.1), при этом его частичные суммы

$$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} k!\,z^k, \quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

при вещественных $z>0$, очевидно, стремятся к $+\infty$. Если же $z<0$, то, объединяя попарно соседние члены, получим

$$S_{2n}(z)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)!\,|\,z\,|^{2k-1}(2k\,|\,z\,|-1).$$

Отсюда видно, что при любом фиксированном $z<0$ при $k>\dfrac{1}{|z|}$ выполняется неравенство $S_{2n}(z)>\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)!\,|\,z\,|^{2k-1}$. Легко убедиться аналогично случаю ряда (37.6) (см. п. 37.1), что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(2k-1)!z^{2k-1}$ расходится при всех $z\neq 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}(z)=+\infty$, $z<0$.

Из сказанного и из равенства (38.18) следует, что если $(x, y) \neq (0, 0)$ или $(x, y) \neq (1, 1)$, то, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$ и каков бы ни был номер m, всегда можно подобрать такой номер n, что

$$|S_{mn}(x, y)| > \varepsilon.$$

А это и означает, что ряд (38.17) расходится.

Упражнение 3. Число S назовем суммой ряда $\sum_{n, m=1}^{\infty} u_{nm}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что $|S - S_{nm}| < \varepsilon$, если только $n + m > N$. Выяснить, эквивалентны или нет это определение и определение 5 п. 38.1.